

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Church, A.: Brief bibliography of formal logic. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 80, 155—172 (1952).

Eine ausgezeichnete Übersicht, mit dem Schwerpunkt im Schrifttum der letzten Jahre. Gliederung: 1. History of logic, 2. Bibliography, 3. Modern editions of scholastic works, 4. Postscholastic traditional logic, 5. Publications of historical interest in the development of mathematical logic, 6. Text-Books and general treatises of mathematical logic, 7. Propositional calculus, 8. Functional calculus of first order, 9. Decision problem of the functional calculus of first order, 10. Decision problems in general, 11. Absolute logic, 12. Theory of types, 13. Gödel's incompleteness theorem, 14. Recursive functions and related topics, 15. Foundations of arithmetic, 16. Informal axiomatic method in the foundations of mathematics, 17. Informal set theory, 18. Axiomatic set theory, 19. Axiom of choice, 20. The Skolem paradox and the relativity of the concepts of set theory, 21. Philosophy of mathematics, 22. Mathematical intuitionism, 23. Semi-intuitionism or empiricism in mathematics, 24. Hilbertian proof theory, 25. Combinatory logic,  $\lambda$ -conversion, 26. Natural inference, Sequenzenkalkül, 27. Algebra of classes, Boolean algebra, 28. Algebra of relations, 29. Many-valued logic, 30. Modality, strict implication, 31. Models of logical systems, 32. Semantics, 33. Sense and denotation, and related distinctions of modes of meaning. — Desiderata: (1) die Semiotik mit den Arbeiten von Tarski, Hermes, Schröter, (2) Zu 6. kann man vermessen: P. Rosenbloom, The elements of mathematical logic, New York 1950, dies. Zbl. 41, 148, mit den wichtigen Referaten zur transatlantischen Forschung, zu 28. R. Lyndon (dies. Zbl. 37, 293), zu 11. den Neudruck von C. Prantl: Geschichte der Logik im Abendlande, 4 Bde., Leipzig 1927, zu 31. die von B. Geyer herausgegebenen neuen Dokumente zur Logik des Petrus Abaelard, unter dem Titel: Peter Abaelards Philosophische Schriften, Münster i. W. 1919—33.

H. Scholz.

● Frege, Gottlob: Translations from the philosophical writings. Edited by Peter Geach and Max Black. Oxford: Basil Blackwell 1952. X, 244 p. 25 s. net.

„Nobody since Aristotle has contributed more than Frege to the technique and philosophy of logic“. Mit dieser im nichtdeutschen Raum jetzt wohl allgemein anerkannten Begründung haben die Herren Peter Geach und Max Black von der Cornell University, USA, die wichtigsten in Betracht kommenden, zum größten Teil fast unzugänglich gewordenen Dokumente ins Englische übersetzt: (1) c.1 der „Begriffsschrift“ von 1879; (2) „Funktion und Begriff“ (1891); (3) „Über Begriff und Gegenstand“ (1892); (4) „Über Sinn und Bedeutung“ (1892); (5) Auszüge aus der Anzeige von Husserls „Philosophie der Arithmetik“ (1894); (6) „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“ (1895); (7) „Was ist eine Funktion?“ (1904); (8) „Die Verneinung“ (1919); endlich die folgenden Stücke aus den „Grundgesetzen der Arithmetik“ (I 1893, II 1903): (9) Abschnitte aus der Vorrede zu Bd. I und der Einführung in das Ganze [Abdruck einer Übersetzung von P. E. B. Jourdain und J. Stachelroth (1915—1917)]; (10) Die Hauptpunkte der Fregeschen Anforderungen an eine korrekte Definition (Bd. II, §§ 56—67, §§ 139—144, 146f.); (11) Die profunde Kritik der (im vor-Hilbertschen Sinne) formalistisch interpretierten Mathematik (Bd. II, §§ 86—137); (12) Die Diskussion des für Frege so verhängnisvollen Russellschen Paradoxons, im Anhang zu Bd. II. — Die Hauptarbeit hat Geach geleistet. Er hat alle Stücke übertragen bis auf (4) und (11), die von Black übertragen worden sind. — Die Auswahl ist mit großer Umsicht und Sachkenntnis getroffen [(5) und (8) stehen nicht einmal in der Bibliographie von A. Church]. Es scheint mir, daß dies auch für die Übertragungen gesagt werden kann. Die Genauigkeit, mit der insbesondere Herr Geach gearbeitet hat, ergibt sich beiläufig auch aus den von ihm bemerkten Druckfehlern, von denen die beiden im Nachwort entdeckten sogar als nicht-unwesentlich zu bezeichnen sind. Besonders herzuheben ist auch noch die Bemerkung, daß das Nachwort auf Grund des gegenwärtigen Erkenntnisstandes nicht mehr aufgefaßt werden darf als eine runde Kapitulation. Es wird angedeutet, daß der in ihm enthaltene wohlbekannte Rettungsversuch auf der Linie liegt, auf der auch Quines „Mathematical Logic“ (Cambridge 1951; dies. Zbl. 44, 247) anzutreffen ist. Es scheint mir dringend erwünscht zu sein, daß Herr Quine hierzu Stellung nimmt. Er wird dies genauer entscheiden können als irgend jemand, der von ihm verschieden ist; denn die Frage ist nicht trivial. Es sei noch bemerkt, daß die wichtigsten Fregeschen Stichworte in einem vorangestellten Glossary den Korrelaten der Übersetzung gegenübergestellt sind.

H. Scholz.



● Curry, Haskell B.: *Leçons de logique algébrique*. (Collection de logique Mathématique. Sér. A. II.) Paris: Gauthier-Villars, Louvain: E. Nauwelaerts 1952. 163 p. 1600 fr.

Fortsetzung von dies. Zbl. 41, 348, nach einer 1950/51 in Löwen gehaltenen Vorlesung. Kapitel I. Formale Systeme. Man geht aus von einer rekursiven Klasse von Dingen („obs“), für welche Operationen erklärt und Prädikate definiert sind (Beispiel: Die obs sind 0, 0', 0'', ...; eine Operation ' ; Prädikat der Identität zwischen obs). Mit diesen Hilfsmitteln erhält man die elementaren Aussagen, die eine entscheidbare Klasse bilden, und die rekursiv aufzählbare Teilklasse der elementaren Sätze mit Hilfe von Axiomen und entscheidbaren Regeln. Zu den brauchbaren Systemen (s. s. acceptables) gehören insbesondere diejenigen, die eine intuitive Interpretation der obs und Prädikate besitzen. Jedes formale System läßt sich überführen in ein logistisches System, d. h. in ein System mit nur einem einstelligen Prädikat (nach Frege wiedergegeben durch „|“, indem man die Prädikate des ursprünglichen Systems durch neue Operationen ersetzt. II. Eingehende Diskussion der verschiedenen Bedeutungen des Wortes „Variable“. Im Gegensatz zu einem Kalkül wird ein formales System mit freien, ohne gebundene Variable eine Algebra genannt. Eine algèbre relationnelle hat eine fundamentale reflexive und transitive Relation. Durch Übergang zu einem logistischen System erhält man eine logistische Algebra. Beispiele, vor allem Verbände, deren Theorie in III entwickelt wird, ausgehend vom Begriff der logischen Gruppe mit den Grundbegriffen  $\leq$  und  $\cdot$  und den Axiomen  $ab \leq a, ab \leq b, x \leq a \wedge x \leq b \rightarrow x \leq ab$ . Insbesondere Entscheidbarkeit in distributiven Verbänden. In IV werden eingehend studiert die implikativen Verbände, die eine zusätzliche Operation  $\supset$  besitzen, welche den Gesetzen  $a \wedge (a \supset b) \leq b$  und  $ax \leq b \rightarrow x \leq a \supset b$  genügt. (Dual sind die „subtraktiven Verbände“.) Es folgt das distributive Gesetz. Beim Übergang zur logistischen Form erhält man die natürlichen Gentzenschen Regeln, für deren Anwendung ein bequemes Schema angegeben wird. Diese Regeln liefern ein System  $TA$ , die absolute Aussagenalgebra. Es wird eine äquivalente Form  $HA$  angegeben, die nur die Abtrennungsregel benutzt. Von den elementaren Aussagen eines formalen Systems  $S$  ausgehend, erhalten wir zusammengesetzte Aussagen, und man kann z. B. im einfachsten Falle  $a \supset b$  jetzt definieren als die Aussage, die besagt, daß man  $b$  aus  $S$  einschließlich des neuen Axioms  $a$  deduzieren kann. Dies kann man symbolisieren durch  $a \vdash b$ , und entsprechend allgemein  $a_1, \dots, a_2 \vdash b$  erklären. Die resultierende (im wesentlichen auf Gentzen zurückgehende) Regel für die Einführung der Verknüpfungen werden angegeben; sie definieren ein System  $LA(S)$ . — Die klassische matrizenlogische Interpretation der aussagenlogischen Verknüpfungen führt zu einem subtraktiven Verband, in dem zusätzlich das Axiom  $b \wedge (a - b) = 0$  gilt. Es wird ausführlich auf die Übereinstimmung dieser Verbände mit den Booleschen Algebren eingegangen. V. Sei  $T$ :  $1 \leq av \supset a$ ,  $R$ :  $\neg a \equiv a \supset f$ ,  $A$ :  $\neg a \equiv a \supset 0$ ; man unterscheidet eine minimale ( $R$ ), intuitionistische ( $A$ ), strikte ( $R, T$ ) und klassische ( $A, T$ ) Negation. Es wird insbesondere bewiesen der Satz von Glivenko, daß  $\neg a$  strikt (klassisch) genau dann gilt, wenn  $\neg a \leq a$  minimal (intuitionistisch) gültig ist. Ausführliche Diskussion der Booleschen Algebren. VI. Verf. nannte eine Algebra  $A$  sekundär über der primären logischen Algebra  $S$ , wenn die zusammengesetzten Aussagen (vgl. IV.) von  $S$  (oder ein Teil davon) elementare Aussagen von  $A$  sind. Beispiele. Traditionelle Logik. Modale Algebren. Mehrwertige Matrizen. Relationenalgebra. Anhang: Die Notation von Łukasiewicz. Kombinatorische Logik. *H. Hermes.*

Curry, Haskell B.: *The permutability of rules in the classical inferential calculus*. *J. symbolic Logic* 17, 245—248 (1952).

In the notation of his book „A theory of formal deducibility“, Notre Dame (Indiana) 1950 (this Zbl. 41, 348) pp. 32—33; the author proves: „Theorem I. If  $R_1$  and  $R_2$  are two rules such that  $R_1$  leads from  $q$  sets of  $p$  premises each to  $q$  conclusions which form the  $q$  premises of  $R_2$ , and if the components for  $R_2$  are parametric for  $R_1$ , and the principal constituents for  $R_2$  are parametric for  $R_1$ , and the principal constituents for  $R_1$  are parametric for  $R_2$ ; then the two rules will give the same conclusion when applied in reverse order“. He shows that this can be used to derive the strengthened form of Gentzen's Hauptsatz (this Zbl. 10, 145; 146) and the elimination theorem for the classical system. *J. C. Shepherdson.*

Curry, Haskell B.: *The system LD*. *J. symbolic Logic* 17, 35—42 (1952).

The system  $LD$  is one of the systems introduced by the author in his „A theory of formal deducibility“ (Notre Dame 1950; this Zbl. 41, 348). It is substantially the minimal calculus with excluded middle first considered by Johansson (this Zbl. 15, 241) and in a sense is the natural system of strict implication, having the property that every proposition is either a theorem or is refutable. The present paper gives details of certain results concerning the system which have been reported in the Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., USA Aug. 30 — Sept. 6th, 1950. — The author proves that if  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, A$  are positive (i. e. formed



wholly without negation) and if  $\mathfrak{X}, \neg \mathfrak{Y} \Vdash A$  in  $LD^*$ ; then  $\mathfrak{X} \Vdash A$  in  $LA^*$ . Here  $LA$  is the intuitionist positive system and  $LA^*, LD^*$  are the systems formed from  $LA, LD$  by adjoining quantifiers. He then proves that if  $\mathfrak{X} \Vdash A$  holds in  $LD$  then  $\mathfrak{X}, \neg A \Vdash A$  holds in  $LM$  (the minimal system for refutability); if  $\mathfrak{X} \Vdash$  (i. e. if  $\mathfrak{X}$  is refutable) holds in  $LD$  then it holds in  $LM$  also. After deducing corollaries from these theorems he considers various other formulations for  $LD$  designed to overcome the objection that one of the rules of  $LD$  in its original formulation allows the elimination of a constituent of higher order than the one which is left. But it turns out that in none of these alternative systems does the elimination theorem hold. Finally he suggests that even in the classical systems  $LC, LK$  it might be better to avoid the use of more than one proposition on the right of the entailment sign  $\Vdash$  and he indicates how this can be done.

J. C. Shepherdson.

**Curry, Haskell B.:** The elimination theorem when modality is present. J. symbolic Logic 17, 249—265 (1952).

In his „A theory of formal deducibility“ [Notre Dame (Indiana) 1950; this Zbl. 41, 348] the author noted that since those lectures were delivered he had succeeded in proving the elimination theorem for the systems containing modal connectives. These proofs are given in this paper. The author first gives a general formulation of the elimination theorem of its proof for rules satisfying certain conditions. He then deals with the modifications necessary to take care of the modal rules which fail to satisfy these conditions. His proof covers the elimination theorem for the systems  $LXY$  obtained by adding the rules  $Yl: \mathfrak{X}, A \Vdash \mathfrak{Y}, Yr: \# \mathfrak{X} \Vdash A$  to the system  $LX$ , where  $X$  stands for  $A, C, M, J, D$ , or  $K$ . The author also discusses certain objections to the remarks on possibility he made in the above mentioned work and suggests ways of overcoming them.

J. C. Shepherdson.

**Markov, A. A.:** Über unentscheidbare algorithmische Probleme. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 34—42 (1952) [Russisch].

This is the text of a lecture given by the author at a conference on algebra and number theory in Moscow in September 1951. It overlaps considerably with earlier papers of the author ([1], [2]; this Zbl. 43, 11. [3], Trudy mat. Inst. Steklov. 38, 176—189 (1951). [4], this Zbl. 42, 246) but contains more exact formulations of certain concepts and a theorem [(10, 2) below] not previously published. — The author first discusses briefly the meaning of the word algorithm in ordinary mathematics and goes on to give the definition of a normal algorithm and various theorems asserting the non-existence of normal algorithms satisfying certain conditions. This is more or less the same as in [3]. He then defines an associative system or associative calculus as he now prefers to consider it. The new theorem (10. 2) is „If  $\mathfrak{A}$  is a normal algorithm on the alphabet  $A$  there exists an associative calculus  $\mathfrak{B}$  on the alphabet  $B = A \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$  such that if  $P, Q$  are words of  $A$ , then  $\mathfrak{A}(P) = Q$  if and only if  $\beta \alpha P \beta \leftrightarrow \beta \gamma Q \beta$  in  $\mathfrak{B}$ “. He says that the concept of a normal algorithm and the principle of normalisation — that every algorithm is equivalent to a normal algorithm — enable one to give simpler proofs of the theorems of [2] and [4]. No proofs are given in this paper.

J. C. Shepherdson.

**Schröter, Karl:** Deduktiv abgeschlossene Mengen ohne Basis. Math. Nachr. 7, 293—304 (1952).

This paper deals with the classical two valued propositional calculus with the usual rules of derivation, viz. substitution and modus ponens. If  $X$  is any set of well formed formulae of this calculus let  $Ab(X)$  denote the „Ableitungsmenge“ of  $X$  i. e. the set of all formulae derivable from  $X$  by these two rules. Then  $X$  is said to be equivalent to  $Y$  when  $Ab(X) = Ab(Y)$ ;  $X$  is said to be independent when there is no formula  $h \in X$  such that  $h \in Ab(X - \{h\})$ ;  $Y$  is said to be a basis for  $X$  when  $Y$  is an independent set equivalent to  $X$ . The author constructs a set  $X$  such that although  $X$  has a basis yet no subset of  $X$  is a basis for  $X$ . He then constructs a set  $X$  which has no basis [He notes that the existence of such sets was stated without proof by Tarski, Monatsh. Math. Phys. 37, 361—404 (1930)]. Finally he shows that the number of sets  $X$  which are deductively closed (i. e. such that  $X = Ab(X)$ ) and do not possess a basis is  $2^{\aleph_0}$ . The proofs of independence needed for the proof of these results are based on two theorems. The first is the theorem of the „Rückverlegbarkeit der Einsetzungen“ viz. that if  $h$  is derivable



from  $X$  by substitution and modus ponens then it is derivable by modus ponens alone from the set of formulae obtainable from  $X$  by substitutions; the author gives a short proof of this since he says that although it is often used it has not been explicitly stated before. The second is a simple purely structural necessary and sufficient condition for derivability by modus ponens alone. This is related to a criterion mentioned by Tarski [Lukasiewicz and Tarski, Soc. Sci. Lett. Varsovie, C. r. Cl. III 23, 1—21 (1930) p. 7] and is of some interest in itself since it is often simpler to apply than the usual matrix methods. — The results of this paper were originally reported by the author in 1937 at the Münster Seminar of H. Scholz.

J. C. Shepherson.

**Lukasiewicz, Jan:** On the intuitionistic theory of deduction. *Indagationes math.* 14, 202—212 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 202—212 (1952).

Es ist bekannt, daß der klassische Aussagenkalkül (AK) mit Einsetzung und Abtrennung so axiomatisiert werden kann, daß man nach Streichung eines einzigen Axioms den intuitionistischen AK erhält (vgl. Hermes-Scholz, „Mathematische Logik“, Leipzig 1952, p. 32 und 37, dies. Zbl. 47, 248). Es liegt also nahe, den intuitionistischen AK in diesem verschärften Sinne als einen echten Teilkalkül des klassischen AK aufzufassen. In der vorliegenden Studie ist gezeigt, daß sich aus einer wesentlich tieferliegenden Vergleichung der beiden Kalküle vielmehr das Gegenteil ergibt. Das wesentlich Tieferliegende in dieser Vergleichung kommt darin zum Ausdruck, daß nicht nur die intuitionistische Alternative  $O$  von der klassischen Alternative  $A$  unterschieden wird, sondern ebenso die intuitionistische Konjunktion  $T$  von der klassischen Konjunktion  $K$  und die intuitionistische Implikation  $F$  von der klassischen Implikation  $C$ . Dagegen braucht die intuitionistische Negation  $N$  von der klassischen nicht unterschieden zu werden. Dies ist überraschend und gewiß nicht trivial. Basis: das zehnzahlige, mit dem Heytingschen deduktiv äquivalente Axiomensystem  $M_6$ , in der klammerfreien Symbolik des Verf. bestehend aus 1.  $FqFpq$ , 2.  $FFpFqrFFpqFpr$ , 3.  $FTppq$ , 4.  $FTpqg$ , 5.  $FpFqTpg$ , 6.  $FpOpq$ , 7.  $FqOpq$ , 8.  $FFpFFqrFOpqr$ , 9.  $FFpNgFqNp$ , 10.  $FpFNpq$  mit Einsetzung und Abtrennung in bezug auf  $F$ . Aus dem Teilsystem  $M_1$ , bestehend aus 1.—5. und 9., ist deduzierbar das folgende  $T$ - $N$ -System  $M_2$ , bestehend aus 1\*.  $NTNTNpNpNp$ , 2\*.  $NTpNNTNpNq$ , 3\*.  $NTNTpNgNNTTqNrNNTpNr$  mit der auf  $T$ - $N$ -Ausdrücke beschränkten Einsetzung und einer Abtrennung, die den Übergang von  $NT\alpha N\beta$  und  $\alpha$  zu  $\beta$  erlaubt. Durch die Einführung von  $Cpq =_{\text{Dt}} NTpNq$  geht  $M_2$  über in das  $C$ - $N$ -System  $M_3$ , bestehend aus 1\*\*.  $CCNppp$ , 2\*\*.  $CpCNpq$ , 3\*\*.  $CCpqCCqrCpr$ . Aus  $M_3$  mit Einsetzung und Abtrennung, beschränkt auf  $C$ - $N$ -Ausdrücke sind alle Thesen des klassischen AK in  $C$  und  $N$  ableitbar. Die Beschränkung der Einsetzung und Abtrennung auf  $C$ - $N$ -Ausdrücke ist wesentlich, weil sonst das im intuitionistischen AK unbeweisbare  $OpNp$  ableitbar werden würde. Führt man nun noch ein  $Kpq =_{\text{Dt}} NCpNq$ ,  $Apq =_{\text{Dt}} CNpq$ , so erhält man zusätzlich alle Thesen des klassischen AK in  $C$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $A$ , mit Einschließung von  $ApNp$ . Daß der intuitionistische AK, in der Konstruktion des Verf., effektiv stärker ist als der klassische, ergibt sich aus den drei folgenden Übergangsthesen: (1)  $FFpqCpq$ , (2)  $FTpqKpq$ , (3)  $FOpqApq$ , deren Nicht-Umkehrbarkeit durch drei dreiwertige Matrizen bewiesen wird. Hieraus folgt, daß  $F$  stärker ist als  $C$ ,  $T$  stärker als  $K$ ,  $O$  stärker als  $A$ , so daß die Beweisbarkeit von  $ApNp$  neben der Unbeweisbarkeit von  $OpNp$  ihren zunächst höchst befremdenden Charakter verliert. Auch dies ist noch nicht der volle, aber der wesentliche Gehalt der vorliegenden Studie. Es scheint mir, daß sie neben den wohlbekannten Entdeckungen von Gödel mit Abstand als der wichtigste Beitrag zur Vergleichung des intuitionistischen und des klassischen AK beurteilt werden muß. Sie ist in jedem und nicht zuletzt auch im handwerklichen Sinne ein Meisterstück der unübertrefflichen Warschauer Schule. Das einzige, was auch sie uns hat schuldig bleiben müssen, ist eine Interpretation des intuitionistischen AK, aus der sich ergibt, daß dieser Kalkül überhaupt als ein Logikkalkül aufgefaßt werden kann. Dann müßten die Ausdrucksmittel dieses Kalküls in jedem Fall eine Sprache bestimmen. Dann müßte als erstes der Wertbereich der Variablen festgelegt werden. Ich würde zusätzlich fordern, daß diese Festsetzung irgendwie Bezug nimmt auf die Gödelsche Entdeckung, daß eine intuitionistische Variable unendlich viele Werte muß annehmen können. Hiervon ist man bis heute, so weit ich sehe, weit entfernt. Ich bin also zwar durchaus bereit, mit dem Verf. (p. 208) zu sagen: „Logic is . . . only an instrument which enables us to draw asserted conclusions from asserted premisses“. Ich sehe jedoch nicht, wie ich im Rahmen irgendeiner wissenschaftlichen Sprache sinnvoll von einer Prämisse oder einer conclusio soll sprechen können, wenn ich nicht einmal den Wertbereich der Variablen kenne. Um so erwünschter ist das vom Verf. p. 208f. angedeutete allgemeine Verfahren, mit dessen Hilfe „all the classical theses not accepted by the intuitionists can easily be disproved“ (p. 209). Es scheint mir jedoch, daß dies an einigen Beispielen hätte gezeigt werden sollen. Denn es ist in unserm Institut zwar gelungen, auf dem angedeuteten Wege zu zeigen, daß das intuitionistische Gegenstück  $FNTNpNgOpq$  zu der klassischen These  $CNKNpNgApq$  keine intuitionistische These sein kann; aber der Beweis hat eine gründliche Kenntnis des intuitionistischen AK zur Voraussetzung, und er ist dann noch ein Ding, das ich als eine Leistung bezeichnen würde.

H. Scholz.



Rose, Alan: Eight-valued geometry. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 30—44 (1952).

In Erweiterung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. 44, 2) studiert Verf. Logiksysteme über  $m$ -wertigen Matrizen, die einen Verband bilden, und in denen  $1, \dots, m-1$  Werte (früher nur ein Wert) ausgezeichnet sind. Die Interpretation der Alternative als Vereinigung und der Konjunktion als Durchschnitt bleibt, die der Negation und der Implikation wird erweitert durch die Festsetzungen:  $Np = 0$ , wenn  $p$  ausgezeichnet ist; sonst  $Np = 1$ .  $Cpq = q$ , wenn  $p$  ausgezeichnet ist; sonst  $Cpq = I$ . Es wird unter Zuhilfenahme eines Satzes von Rosser-Turquette [J. symbolic Logic 10, 61 (1945)] bewiesen, daß das System der Identitäten mit Einsetzung und Abtrennung axiomatisierbar ist, wobei die Anzahl der Axiome nicht von  $m$  abhängt. Verf. gibt eine geometrische Anwendung: Eine Aussage, die in der parabolischen (euklidischen) und in der hyperbolischen Geometrie wahr, in der elliptischen Geometrie aber falsch ist, soll den Wahrheitswert  $a_{ph}$  haben. Entsprechend hat man die Wahrheitswerte  $0, a_p, a_h, a_e, a_{ph}, a_{he}, a_{ep}, a_{ph} = I$ , die eine Boolesche Algebra bilden, und von denen für die euklidische Geometrie die Werte  $a_p, a_{ph}, a_{ep}, I$  ausgezeichnet sind. Die Festsetzungen für  $A$  und  $K$  entsprechen dieser Deutung, die Festsetzungen für  $N$  und  $C$  aber nur insofern, als das Negat einer in der euklidischen Geometrie gültigen Aussage für diese Geometrie falsch ist und umgekehrt, und daß  $CPQ$  genau dann in der euklidischen Geometrie nicht gilt (d. h. einen ausgezeichneten Wert besitzt), wenn  $P$  gilt, aber  $Q$  nicht. (Ref. hält es für kritisch, daß z. B. für eine nur in der parabolischen Geometrie gültigen Aussage  $P$  die Aussage  $NP$  nach der Ausgangsdeutung den Wahrheitswert  $a_{he}$ , nach der Definition von  $N$  aber den Wahrheitswert  $I$  erhält.)  
H. Hermes.

Rosser, J. Barkley: The axiom of infinity in Quine's new foundations. J. symbolic Logic 17, 238—242 (1952).

Die Arbeit enthält einige Bemerkungen über die mengentheoretischen Axiomensysteme von Quine's New Foundation (NF) und Mathematical Logic (ML). NF ist im wesentlichen ein Teil von ML, trotzdem könnte ML  $\omega$ -konsistent sein, NF aber  $\omega$ -inkonsistent. In ML ist ein Unendlichkeitsaxiom beweisbar, hieraus folgt aber nichts für NF. In NF ist das Unendlichkeitsaxiom äquivalent mit der Existenz eines geordneten Paares vom Typ 0.

P. Lorenzen.

Lorenzen, Paul: Über die Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsbegriffes. Studium generale 5, 591—594 (1952).

Verf. gibt eine gedrängte Einführung in das metamathematische Problem der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik sowie eine Erläuterung des Gegensatzes zwischen konstruktiver (finiter) und formalistischer (axiomatischer) Mathematik. Er führt weiter aus, daß das Problem der Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsbegriffs mit dem finiten Widerspruchsfreiheitsbeweis für den arithmetischen Formalismus seine endgültige Lösung gefunden hat, während man in den übrigen Fällen, in denen die Gefahr eines Widerspruchs im Zusammenhang mit einer unendlichen Menge auftritt, den Fehler nicht beim Unendlichkeitsbegriff, sondern beim Mengenbegriff zu suchen hat.

W. Ackermann.

Grünbaum, Adolf: A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements. Philos. Sci. 19, 288—306 (1952).

Bei der Betrachtung des Kontinuums (z. B. einer Strecke) als einer Summe von dimensionslosen Elementen (Punkten) entstanden in der Antike logische Schwierigkeiten, die für die Weiterentwicklung der Mathematik, die schon bald hohe Anforderungen an Exaktheit und Sauberkeit ihrer Überlegungen gestellt hatte, von großer Bedeutung wurden. Verf. diskutiert das Problem vom Standpunkt der modernen Mathematik (Mengenlehre, Topologie, Gruppentheorie) und gelangt so zu einer metrischen Darstellung einer Strecke als eines Aggregates von dimensionslosen Punkten sowie zur Feststellung einer qualitativen (nichtmetrischen) Verschiedenheit zwischen einer Strecke und den auf ihr liegenden Punkten. Für die Beurteilung Zenons ergibt sich dabei, daß Zweifel an seinen Fähigkeiten als Mathematiker und Philosoph nicht berechtigt sind.

K. Vogel.

Juhos, Béla von: Die „Wahrheit“ wissenschaftlicher Sätze und die Methoden ihrer Bestimmung. Methodos 4, 19—40 (1952).

Es werden drei Wahrheitsklassen unterschieden: (1) die als Folgen der leeren Satzklasse zu definierenden logischen Wahrheiten, (2) die empirischen Wahrheiten



erster Stufe: die Wahrheit von Konstatierungen, die nicht-definierte Grundform der Wahrheit empirischer Sätze, (3) die empirischen Wahrheiten zweiter Stufe: die empirisch-hypothetischen Wahrheiten. Sie werden definiert mit Hilfe der empirischen Wahrheiten erster Stufe. Einem Satz kommt die empirische Wahrheit zweiter Stufe zu, wenn die aus dem Satz im Verifikationswege abgeleiteten Konstatierungen übereinstimmen mit den unter den abgeleiteten Bedingungen durch Beobachtung als „wahr“ gewonnenen Konstatierungen. Auf den Hauptpunkt, nämlich den Verifikationsweg, wird in dieser Skizze nicht eingegangen. Der auf Aristoteles zurückgehende semantische Wahrheitsbegriff („Eine Aussage ist wahr genau dann, wenn das zutrifft, was sie besagt“, in der Präzisierung von Tarski und Carnap) wird abgelehnt, weil er das Überprüfungsverfahren offen läßt oder vielmehr überhaupt nicht einkalkuliert und zusätzlich auch noch metaphysisch belastet sein soll. An einer solchen Ablehnung kann niemand gehindert werden. Es folgt nur nichts daraus, wenn man weiß, was mit diesem Wahrheitsbegriff zu machen ist. *H. Scholz.*

**Davenport, Charles K.:** *The role of graphical methods in the history of logic.* *Methodos* 4, 145—164 (1952).

Diese Arbeit handelt nicht von der theoretischen Logik (dem Logikkalkül), sondern von graphischen Veranschaulichungen gewisser Schlußformen der klassischen (Aristotelischen) Logik. Die Methode, logische Ordnungsbeziehungen der Begriffe durch Kreise und sonstige Figuren zu veranschaulichen, geht auf L. Vives zurück, findet sich bei J. Jungius, dem Lehrer von Leibniz, und ist ausführlich behandelt in L. Eulers „Lettres à une princesse d'Allemagne“. Einen wesentlichen Fortschritt über Euler hinaus brachten in dieser Hinsicht I. Venn (*Symbolic Logic* 1881, zweite Aufl. 1894) und L. Carroll (*Symbolic Logic, Part I*, 1896). Die Analyse der Klassenlogik mit Hilfe von Diagrammen, die auch die Behandlung von Leerklassen und Nullklassen ermöglichen, brachte gewisse Mängel der Aristotelischen Logik zutage, die durch eine Untersuchung des klassischen Systems für sich allein nicht entdeckt worden wären. Verf. schildert an Hand von Beispielen die Rolle, die diese graphischen Methoden in der Entwicklung der Logik gespielt haben und noch spielen. Er würdigt kritisch und sachlich fördernd die verschiedenen Formen und Anwendungen der Diagramme in der Klassenlogik, in der Logik der Beziehungen und in der Logik der Systeme. Bei den beiden letzteren Gebieten der Logik zeigen sich deutlich die Zusammenhänge mit der Mathematik. — Die Arbeit schließt mit folgenden Sätzen: „Ein Überblick über die graphischen Methoden . . . gibt gewisse Einsichten in Aufstieg und Niedergang verschiedener logischer Systeme. Der Punkt, an dem ein gegebenes System versagt, scheint zusammenzufallen mit dem Punkt, an dem seine besondere Methode der graphischen Untersuchung für die weitere Anwendbarkeit zu schwerfällig wird. Eine Betrachtung der verschiedenen Typen diagrammatischer Methoden wirft auch einiges Licht auf das Problem der existentiellen Bedeutung gewisser Aussagen und Systeme von Aussagen; denn Diagramme kann man nur in Ausdrücken kategorischer Behauptungen und Verneinungen herstellen“. *E. Löffler.*

**Dienes, Z. P.:** *Sulla definizione dei gradi di rigore.* *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 11, 223—253 (1952).

Verf. unterscheidet mehrere Stufen von „Strenge“, mit welcher eine Definition, ein Beweis, eine Konstruktion, durchgeführt werden kann im Sinne der Kolmogoroffschen Deutung der intuitionistischen Logik. Es werden besonders folgende vier Stufen betrachtet: I. endlicher Anwendungsbereich für Existenzzeichen ( $Ex$ ) und Allzeichen ( $x$ ); II. für ( $x$ ) endlich, für ( $Ex$ ) abzählbar; III. abzählbar für ( $Ex$ ) und ( $x$ ); IV. für ( $x$ ) abzählbar und für ( $Ex$ ) Mächtigkeit  $\aleph_1$ . Mehrere arithmetische und mengentheoretische Fragen werden als Beispiele bearbeitet. *B. de Finetti.*

**Niehers, Heinz:** *Die Struktur grundlegender Relationen zwischen den Werten einer „Größe“.* *Philosophia naturalis* 1, 493—510 (1952).

Vergleicht man physikalische Körper hinsichtlich einer bestimmten physikalischen „Größe“, etwa der Länge oder der Temperatur, so erhält man die Beobachtungswerte von vornherein nicht, wie es die Carnapsche Definition einer „physikalischen Größe“ fordert, als (teilweise) geordnete Menge mit transitiver Relation ( $R$ ): „Weder  $A > B$  noch  $B > A$ “. Denn einerseits ist z. B. bei der Temperatur eine Anordnung der Meßergebnisse nicht evident, andererseits hat selbst dann ( $R$ ) nur die Bedeutung von „ununterscheidbar“ und nicht die transitive von „gleich“. Empirisch feststellbar ist vielmehr nur eine reflexive und symmetrische



Relation  $A \circ B$  („ununterscheidbar“), und Verf. beweist, daß man aus dieser mittels zweier Zusatzforderungen, die für alle physikalischen Grundgrößen als evident bezeichnet werden, eine teilweise Anordnung erklären kann, für die (R) mit der gegebenen Relation  $A \circ B$  übereinstimmt. *H. König.*

**Weizsäcker, C. F. v.:** Eine Frage über die Rolle der quadratischen Metrik in der Physik. *Z. Naturforsch.* **7a**, 141 (1952).

Verf. wirft die Frage auf, ob das Problem der quadratischen Metrik des anschaulichen dreidimensionalen Raumes, bzw. der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, in Zusammenhang mit der quadratischen Metrik und der zugehörigen Struktur des Hilbertraumes steht. Eine Begründung dieser quadratischen Struktur der Zustandsräume wie der anschaulichen Räume aus allgemeinen Prinzipien heraus wird gefordert. *G. Ludwig.*

## Algebra und Zahlentheorie.

● **Haupt, O.:** Einführung in die Algebra. Erster Teil. 2. Aufl. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A. Band 5). Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1952. XVIII, 370 S. Geb. DM 23,00.

**Gericke, Hellmuth:** Einige Grundgedanken der modernen Algebra. *Phys. Bl.* **8**, 392—396 (1952).

**Thomsen, Poul:** Die mathematische Behandlung eines allgemein bekannten Spieles für zwei Personen. *Mat. Tidsskr. A* **1952**, 63—72 (1952) [Dänisch].

Es wird eine Theorie des Nim-Spieles gegeben, die aber schon bekannt ist (siehe z. B. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, I. Band; Leipzig 1910). *G. Lochs.*

**Fletcher, T. J.:** The solution of inferential problems. *Math. Gaz.* **36**, 183—188 (1952).

Es werden Beispiele für die Lösung von Denksportaufgaben mit Hilfe der Aussagenlogik gegeben. *P. Lorenzen.*

## Kombinatorik:

**Carlitz, L.:** Congruences for the ménage polynomials. *Duke math. J.* **19**, 549—552 (1952).

Dans un article récent (ce Zbl. **46**, 8) Riordan a montré que le nombre généralisé  $u_{n,r}$  se rapportant au problème des ménages, satisfait la récurrence:

$$(1) \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} (1-t)^k U_{n-k}(t), \quad \text{où} \quad (2) \quad U_n = U_n(t) = \sum_{r=0}^n u_{n,r} t^r.$$

Faisant usage de (1) il a établi que  $U_n$  vérifie la congruence  $U_{p^2+n} \equiv (t^{p^2} - 1) U_n \pmod{p}$  où  $p$  est premier  $> 2$ . Dans la présente note, l'A. en partant de formules de Riordan prouve le résultat plus large  $U_{m^2+n} \equiv (t - 1)^{m^2} U_n \pmod{m}$  où  $m$  est un entier arbitraire  $\geq 2$ . *S. Bays.*

**Ryser, H. J.:** Matrices with integer elements in combinatorial investigations. *Amer. J. Math.* **74**, 769—773 (1952).

Le problème  $(n, k, \lambda)$ , qui consiste à trouver  $n$  arrangements  $k$  à  $k$  de  $n$  éléments tels que chaque paire de ces arrangements ont exactement  $\lambda = k(k-1)/(n-1)$  éléments communs, est en connexion avec le fait qu'ayant deux matrices carrées  $A$  et  $B$  symétriques d'ordre  $n$ , avec termes entiers, il existe ou non une matrice  $C$  avec termes entiers telle que  $C'AC = B$  ( $C'$  est la transposée de  $C$ ). On dit dans ce cas que  $B$  est intégralement représentée par  $A$ ; en particulier  $B$  est intégralement représentée par l'identité, s'il existe une intégrale  $A$  telle que  $AA' = B$ . — Soit maintenant  $B$  une matrice carrée symétrique d'ordre  $n$  avec les termes  $k$  dans la diagonale principale et  $\lambda$  dans les autres positions. Si le problème  $(n, k, \lambda)$  a une



solution,  $B$  est intégralement représentée par l'identité. Le but du présent mémoire est de montrer que pour certains triples  $n, k, \lambda$  la proposition inverse est également valable. *S. Bays.*

**Errera, A.:** Sur une suite sans répétitions. *Mathesis* **61**, 169—173 (1952).

Dans une suite illimitée formée de deux ou plusieurs lettres répétées, une séquence de  $p$  d'entr'elles,  $p \geq 1$ , est dite une période si cette séquence se répète immédiatement; elle est dite une période simple si elle se répète une fois, une période double, si elle se répète deux fois, etc. M. Euwe [*Nederl. Akad. Wet., Proc.* **32**, 633—642 (1929)] a donné à ce sujet le théorème suivant: Il est possible de construire à l'aide de deux lettres une suite infinie  $E$  n'ayant aucune période double. A. Errera reprend en la développant la démonstration de M. Euwe et construit lui-même avec trois lettres une suite infinie  $E'$  n'ayant aucune période même simple et comme corollaire une seconde suite infinie  $E''$  avec quatre lettres, également dépourvue de toute période. *S. Bays.*

**Rivier, W.:** Sur les jeux de combinaison et à propos d'un théorème d'Euwe. *Revue génér. Sci. pur. appl.* **59**, 197—210 (1952).

Il arrive qu'un jeu de combinaisons s'éternise parceque, à partir d'un certain moment, les joueurs accomplissent cycliquement les mêmes opérations. Aux échecs, la „règle Allemande“ permet de regarder une partie comme nulle dès que la même succession de coups se présente trois fois de suite. Cette règle n'élimine pas toutes les parties illimitées. Euwe [*Proc. Akad. Wet., Amsterdam* **32**, 633—642 (1929)] a construit une suite infinie, composées de deux lettres, dans laquelle on ne peut trouver trois lettres consécutives égales, ni trois séquences consécutives identiques. A. Errera (rapp. précéd.) a donné une suite, formée avec trois lettres, et sans aucune répétition. L'A. donne un exemple de suite,  $s$ , construite avec  $n$  symboles:  $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ , telle que trois séquences consécutives de longueur  $\geq 1$  ne soient jamais identiques. Soit  $S$  la série naturelle des entiers, écrits dans le système de base  $n$ . A chaque terme  $u \in S$  correspond dans  $s$  le résidu (mod.  $n$ ) de la somme des chiffres de  $u$ . De  $s$  l'A. déduit une suite ne présentant plus aucun couple de séquences consécutives identiques. Il est clair que l'on peut en imaginer d'autres. Par exemple, si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis de mesures  $m$  et  $n$ , ( $m > n$ ), toute solution en  $n$  fournira une solution en  $m$  par un homomorphisme des ensembles  $E$  et  $F$ . Quoique l'utilité du problème, pour  $n > 3$  soit restreinte par le fait qu'il existe, à partir de  $n = 3$ , des suites sans répétitions, il serait intéressant d'étudier les propriétés générales de ces suites,  $n$  étant quelconque. *A. Sade.*

**Bose, R. C. and K. A. Bush:** Orthogonal arrays of strength two and three. *Ann. math. Statistics* **23**, 508—524 (1952).

Perfectionnement, dans le cas d'un indice quelconque, et pour  $t = 2$  ou  $3$ , des résultats obtenus par l'un des AA. (Bush, ce Zbl. **47**, 17) dans l'étude des tableaux orthogonaux  $(N, k, s, t)$ . Dans les trois premiers paragraphes, la limite de Plackett et Burman:  $k \leq [(\lambda s^2 - 1)/(s - 1)] = L$ , est resserrée par l'adjonction d'un terme correctif et étendue au cas de  $t = 3$ . Par exemple, si  $\lambda = 1 + a(s - 1) + b$ ,  $0 < b < s - 1$ , et si  $\theta$  est le plus petit entier contenu dans la racine positive de l'équation:  $(b - n)(b + 1 - n) = s(b - 2n)$ , on trouve pour le  $(\lambda s^3, k, s, 3)$ ,  $k \leq L - \theta$ . Dans une 2<sup>e</sup> partie la méthode des différences, déjà employée pour la construction des „balanced incomplete block designs“ (ce Zbl. **23**, 1), est utilisée pour construire des tableaux orthogonaux dans le cas  $t = 2$ . Lorsque l'indice  $\lambda$  et le nombre  $s$  sont deux puissances d'un même nombre premier, on obtient encore une solution  $(\lambda s^2, \lambda s, s, 2)$  au moyen des champs de Galois; l'exemple  $(32, 8, 4, 2)$  est étudié et conduit à un  $(32, 9, 4, 2)$  qui est donné explicitement. Si  $s = p^n$  on peut encore parvenir au tableau orthogonal en usant d'une géométrie projective finie. Finalement des méthodes de construction et des exemples pour  $t = 3$  sont donnés et les cas  $s = 2$ ,  $s = 2^n$ ,  $s = p^n$  étudiés. *A. Sade.*

**Yamamoto, Koichi:** Note on enumeration of  $7 \times 7$  latin squares. *Bull. math. Statist.* **5**, 1—8 (1952).

L'A. poursuit ses recherches sur les rectangles latins [ce Zbl. **37**, 298; **39**, 248; *Japanese J. Math.* **21**, 113—119 (1951)]. Application aux carrés latins. Enumération dans le cas  $n = 7$ . Tables. La méthode suivie est sensiblement celle du rapporteur (ce Zbl. **35**, 289). Mais au lieu de  $L_7 = 16\,942\,080$ , c'est  $7!6!L_7$  qui est calculé. *A. Sade.*



## Lineare Algebra. Polynome. Formen:

**Drazin, M. P.:** A note on skew-symmetric matrices. *Math. Gaz.* **36**, 253—255 (1952).

Ist  $A$  eine alternierende Matrix des Grades  $n$ , so ist die charakteristische Determinante  $\det(A - \lambda I)$  von  $A$  bekanntlich von der Form  $f(\lambda)^2$  oder  $\lambda f(\lambda)^2$ , je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist. Dieser Satz wird in dieser Note auf den Fall übertragen, daß  $A$  das Produkt zweier alternierender Matrizen ist. *K. Shoda.*

**Herstein, I. N.:** Comments on Solow's „structure of linear models“. *Econometrica* **20**, 685—686 (1952).

Verf. weist darauf hin, daß sich verschiedene der von R. Solow (dies. Zbl. **46**, 377) bewiesenen Sätze über stochastische Matrizen leicht aus den klassischen Ergebnissen von Frobenius über unzerlegbare, nicht negative Matrizen oder aus ihrer Verschärfung durch den Ref. (dies. Zbl. **35**, 291) ableiten lassen.

*H. Wielandt.*

**Perfect, Hazel:** Note on a previous paper on matrices with positive elements. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **3**, 187—188 (1952).

Es sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit positiven Elementen,  $y$  ein Eigenvektor von  $A$  mit positiven Elementen (also zur Maximalwurzel von  $A$  gehörig) und  $u$  ein beliebiger positiver Vektor. Bezeichnet man stets die  $i$ -te Komponente eines Vektors  $x$  mit  $x_i$  und für  $r = 0, 1, 2, \dots$  das Maximum (Minimum) von  $(A^r u)_i / y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit  $M_r (m_r)$ , so konvergiert  $M_r / m_r \searrow 1$ . Die früher (dies. Zbl. **43**, 333) geäußerte Vermutung, daß  $y' A^r u / \|A^r u\|$  eine monoton steigende Funktion von  $r$  ist, wird durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

*H. Wielandt.*

**Eaves, J. C.:** On sets of matrices having a delayed commutativity property. *J. Elisha Mitchell Sci. Soc.* **68**, 46—54 (1952).

Haben die beiden  $n \times n$ -Matrizen  $A, B$  die Eigenschaft, daß beide Kommutatoren  $[[A, B], A]$  und  $[[A, B], B]$  mit  $A$  und  $B$  vertauschbar sind, so lassen sich  $A$  und  $B$  durch eine Ähnlichkeitstransformation simultan auf die Dreiecksform bringen (im Fall komplexer Elemente sogar durch eine unitäre Matrix). Die Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn  $[[[A, B], A], A] = [[A, B], B] = 0$  ist. Weiter gibt Verf. einen von der Arbeit von Dratin-Dungey-Gruenberg (dies. Zbl. **43**, 252) unabhängigen Beweis für den Satz, daß  $A_1, \dots, A_m$  sicher dann simultan auf die Dreiecksform transformiert werden können, wenn  $[[A_i, A_j], A_k] = 0$  für alle  $i, j, k$  gilt.

*H. Wielandt.*

**Motzkin, T. S. and Olga Taussky:** Pairs of matrices with property  $L$ . *Trans. Amer. math. Soc.* **73**, 108—114 (1952).

Die hier eingeführten Matrizenpaare mit der Eigenschaft  $L$  bestehen aus zwei quadratischen Matrizen  $A, B$  gleicher Zeilenzahl  $n$  (mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $F$ ), deren Eigenwerte  $\alpha_\nu, \beta_\nu$  so numeriert werden können, daß die Eigenwerte von  $\alpha A + \beta B$  durch  $\alpha \alpha_\nu + \beta \beta_\nu$  gegeben werden ( $\nu = 1, \dots, n$ ), und zwar für je zwei Elemente  $\alpha, \beta \in F$ . Eigenschaft  $L$  ist für  $n \geq 3$  schwächer als Eigenschaft  $P$  (die das Entsprechende für Polynome beliebigen Grades in  $A$  und  $B$  fordert) und für  $n \geq 2$  schwächer als Vertauschbarkeit. Wenn jedoch zwei hermitesche Matrizen (mit komplexen Elementen) die Eigenschaft  $L$  haben, dann sind sie vertauschbar. Dies folgt aus dem für Körper  $F$  beliebiger Charakteristik gültigen Satz: Haben zwei Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m I_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ & \ddots & \\ B_{m1} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix}$$

(mit Einheitsmatrizen  $I_\mu$  und paarweise verschiedenen  $\alpha_\mu \in F$ ) die Eigenschaft  $L$ , so ist  $\det(xI - B) = \prod_\mu \det(xI - B_{\mu\mu})$  und  $\sum' b_{\kappa\lambda} b_{\lambda\kappa} = 0$ ; die Summation erstreckt sich über alle  $b_{\kappa\lambda}$  außerhalb der Diagonalkästchen  $B_{\mu\mu}$ . — Zum Schluß wird das gegenseitige Verhältnis der Eigenschaft  $L$  und verschiedener anderer Abschwächungen und Verschärfungen der Vertauschbarkeit geklärt (u. a. Eigenschaft  $P$ , Quasikommutativität, simultane Transformierbarkeit auf Jordansche Normalform) (s. auch Verf., dies. Zbl. **48**, 15).

*H. Wielandt.*



**Freudenthal, Hans:** Elementarteilertheorie der komplexen orthogonalen und symplektischen Gruppen. *Indagationes math.* **14**, 199—201 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 199—201 (1952).

Es sei  $M$  der Ring der  $n$ -reihigen Matrizen mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper,  $E \in M$  eine nichtsinguläre symmetrische oder antisymmetrische Matrix (also  $E' = \pm E$ ). Für jedes  $A \in M$  werde  $A^* = E^{-1} A' E$  gesetzt. Es bezeichne der Reihe nach  $L, G, \Sigma, \Gamma$  die Menge der Matrizen  $A \in M$ , für welche  $\det A \neq 0$ ,  $AA^* = 1$  (Einheitsmatrix),  $A^* = A$ ,  $A^* = -A$  gilt. Verf. beweist: Sind zwei Matrizen aus  $G$  (oder aus  $\Sigma$  oder aus  $\Gamma$ ) ähnlich unter  $L$ , so auch unter  $G$ . Der Beweis ist der von Frobenius für den Sonderfall  $E = 1$  gegebene [*S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin* 1896, 7—16 (1896)], an einer Stelle (3.6) durch einen Trugschluß verkürzt.

H. Wielandt.

**Brauer, Alfred:** Limits for the characteristic roots of a matrix. V. *Duke math. J.* **19**, 553—562 (1952).

Für Teil IV vgl. dies. Zbl. **46**, 12. Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_{\kappa\lambda})$  mit komplexen Elementen setze man  $P_{\kappa} = \sum_{\varrho \neq \kappa} |a_{\kappa\varrho}|$ ,  $P_{\kappa\lambda} = P_{\kappa} P_{\lambda} - \sum_{\nu, \mu} \{|a_{\kappa\nu} a_{\lambda\mu}| + |a_{\kappa\mu} a_{\lambda\nu}| - |a_{\kappa\nu} a_{\lambda\mu} + a_{\kappa\mu} a_{\lambda\nu}|\}$  mit der Summationsbedingung  $\mu \neq \kappa, \lambda; \nu \neq \kappa, \lambda; \mu < \nu$ . Dann kann in dem früher (dies. Zbl. **29**, 337) vom Verf. bewiesenen Satz, daß jeder Eigenwert  $z$  von  $A$  mindestens eine der  $n(n-1)/2$  Ungleichungen  $|z - a_{\kappa\kappa}| |z - a_{\lambda\lambda}| \leq P_{\kappa} P_{\lambda}$  befriedigt, die Schranke  $P_{\kappa} P_{\lambda}$  durch  $P_{\kappa\lambda}$  ersetzt werden. Für reelle Eigenwerte  $z$  reeller Matrizen  $A$  gilt sogar die günstigere rechte Seite  $P_{\kappa\lambda}^* = P_{\kappa\lambda} - m_{\kappa\lambda}$ ,  $m_{\kappa\lambda} = \min(u_{\kappa\lambda}, |v_{\kappa\lambda}|)$ , worin  $u_{\kappa\lambda}$  die Summe der positiven,  $v_{\kappa\lambda}$  die Summe der negativen Glieder in  $\sum'' a_{\kappa\nu} a_{\lambda\nu}$  bedeutet ( $\nu \neq \kappa, \lambda$ ). Verf. verkleinert die Schranke  $P_{\kappa\lambda}^*$  noch zu einer kompliziert definierten Schranke  $P_{\kappa\lambda}^{***}$ ; falls zu  $z$  ein nicht negativer Eigenvektor vorhanden ist, ist  $P_{\kappa\lambda}^{***} = \max(T_{\kappa\lambda}, |t_{\kappa\lambda}|)$  zulässig (hierin bedeutet  $T_{\kappa\lambda}$  die Summe der positiven,  $t_{\kappa\lambda}$  die Summe der negativen Koeffizienten  $b_{\varrho\sigma}$ , die durch  $\sum_{\varrho < \sigma} b_{\varrho\sigma} x_{\varrho} x_{\sigma} = \sum_{\varrho \neq \kappa} a_{\kappa\varrho} x_{\varrho}$  definiert sind).

H. Wielandt.

**Medlin, Gene W.:** Bounds for the characteristic roots of matrices with real elements. *Duke math. J.* **19**, 563—565 (1952).

Mit den Bezeichnungen der vorangehenden Besprechung gilt für jeden (auch komplexen) Eigenwert  $z$  einer reellen Matrix  $A$  mindestens eine der  $n(n-1)/2$  Ungleichungen  $|z - a_{\kappa\kappa}| |z - a_{\lambda\lambda}| \leq P_{\kappa} P_{\lambda} - m_{\kappa\lambda}$  ( $1 \leq \kappa < \lambda \leq n$ ).

H. Wielandt.

**Schwerdtfeger, Hans:** Sur les matrices permutables avec leur dérivée. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* **11**, 329—333 (1952).

Questa Nota si riferisce al seguente risultato di G. Ascoli (questo Zbl. **38**, 156). — Sia  $X(t)$  una matrice funzione della variabile  $t$  nell'intervallo  $(a, b)$  ( $a \leq t \leq b$ ), e in ogni punto dell'intervallo la  $X(t)$  sia generale (nel senso che in ogni punto la sua equazione caratteristica coincida con l'equazione minima). Allora se, essendo  $X'(t)$  la derivata di  $X(t)$ , è, in tutto  $(a, b)$ , (1)  $X(t) X'(t) = X'(t) X(t)$ , si ha anche, per due punti qualunque  $t_1$  e  $t_2$  di  $(a, b)$ , (2)  $X(t_1) X(t_2) = X(t_2) X(t_1)$ , cioè le matrici  $X(t)$  è a valori permutabili. [Che dalla (2) segua la (1) è immediato, ma qui non interessa.] — Nella Nota qui recensita lo Schwerdtfeger suppone che  $X(t)$  sia funzione analitica di  $t$ , e fa alcune osservazioni tendenti a limitare, o a eliminare, in tale caso, la ipotesi che la  $X(t)$  sia generale. L'A. dimostra anzitutto che, nella ipotesi fatta, il teorema vale richiedendo solo che la  $X(t)$  sia generale in un punto  $t_0$  di regolarità per essa; la (2) vale allora, a causa della analiticità, per due valori qualunque del dominio di regolarità della  $X(t)$ . — Considera poi il caso particolare che  $X(t)$  sia un polinomio in  $t$  di secondo o di terzo grado, e dimostra, mediante verifica diretta, che il teorema vale allora senza alcuna ipotesi sulla generalità della  $X(t)$ .

F. Cecioni.



**Ascoli, Guido:** Remarque sur une communication de Mr. H. Schwerdtfeger. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **11**, 335—336 (1952).

Questa Nota fa seguito alla Nota precedente di Schwerdtfeger. L'A. ha cercato i casi nei quali una diade (cioè una matrice quadrata di caratteristica  $\leq 1$ ) soddisfa alla (1) (vedasi la precedente recensione), ed ha trovato due casi, in uno dei quali è senz'altro soddisfatta la (2), mentre nell'altro (nel quale è  $XX' = X'X = 0$ ) la (2) può non essere soddisfatta. E di ciò ha dato un esempio, che consiste precisamente in una matrice polinomio di quarto grado in una variabile  $t$ . — L'osservazione fatta da Schwerdtfeger sulle matrici polinomi di secondo e di terzo grado non si estende quindi alle matrici polinomi di quarto grado.

*F. Cecioni.*

**Ballieu, Robert:** Sur les rangs-lignes à droite de deux matrices inverses. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **66**, 119—124 (1952).

Die Ränge zweier zueinander reziproken Matrizen über einem Schiefkörper  $K$  sind nicht notwendig gleich, wobei man unter Rang stets den Rang des durch die Zeilen der Matrix erzeugten  $K$ -Rechtsmoduls versteht. Verf. zeigt: Für jeden Schiefkörper, der nicht kommutativ ist, gibt es zueinander reziproke Matrizen des Grades 3, deren Ränge ungleich sind. Er gibt auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für  $K$  an dafür, daß die Ränge der zueinander reziproken Matrizen des Grades 2 über  $K$  stets gleich sind.

*K. Shoda.*

**Duncan, D. G.:** On D. E. Littlewood's algebra of S-functions. Canadian J. Math. **4**, 504—512 (1952).

Auf Resultaten von Thrall [Amer. J. Math. **64**, 371 (1942)] fußend wird für Littlewoods „neue“ Multiplikation  $\{\lambda\} \otimes \{u\}$  der S-Funktionen, die zu den Young-Diagrammen  $(\lambda)$  und  $(u)$  gehören, eine Methode entwickelt, mit der für  $(\lambda) = (m)$  (Diagramm aus einer Zeile) die Fälle  $(u) = (4), (31), (2^2), (21^2)$  und  $(1^4)$  — also alle Partitionen von 4 — erledigt werden können.

*H. Boerner.*

**Amato, V.:** Sulla costruzione delle equazioni delle curve  $G_S$ . Matematiche **7**, 62—66 (1952).

Verf. gibt einige Anweisungen, wie Gleichungen  $f(z, u) = 0$  mit einer vorgeschriebenen Galoisgruppe (Monodromiegruppe) vom speziellen Typus  $G_S$  (dies. Zbl. **39**, 18; **44**, 9) zu konstruieren sind.

*W. Gröbner.*

**Obrechhoff (Obreškov), N.:** Eine Verallgemeinerung des Descartesschen Satzes auf imaginäre Wurzeln. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 489—492 (1952) [Russisch].

Sei  $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit reeller Koeffizientenfolge mit  $v$  Zeichenwechseln; dann hat die Koeffizientenfolge des Polynoms  $f(x)(x^2 - 2\rho x \cos \vartheta + \rho^2)$ ,  $\rho > 0$ ,  $-\pi/(n+2-v) < \vartheta < \pi/(n+2-v)$  nicht weniger als  $v+2$  Zeichenwechsel. In Anwendung dieses, vom Verf. früher [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **33**, 52—64 (1924)] aufgestellten Prinzips werden drei Sätze. Verallgemeinerungen von Sätzen des Verf., Lipka (dies. Zbl. **25**, 295) und Malo [J. de Math. spéc., IV. Sér. **4**, 7—10 (1895)] aufgestellt und bewiesen: I. Liegen die Argumente von  $v$  Wurzeln von  $f(x) = 0$  innerhalb der obigen Grenzen, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel der Koeffizientenfolge von  $f(x)$  entweder gleich  $v$  oder um eine gerade Zahl größer als  $v$ . — II. Liegen  $v$  Wurzeln von  $f(x) = 0$  in dem obigen Winkelraum, und liegen die übrigen Wurzeln in dem Winkelraum  $\pi - \pi/(v+2) < \vartheta < \pi + \pi/(v+2)$ , so ist die Anzahl der Zeichenwechsel genau gleich  $v$ . — III. Verallgemeinerung des Satzes von Malo, wonach, wenn  $\varphi(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$  nur reelle Wurzeln hat, während alle Wurzeln von  $\psi(x) = b_0 + \dots + \beta_n x^n$  reell und vom gleichen Vorzeichen sind, das Polynom  $\chi(x) = a_0 b_0 + \dots + a_k b_k x^k$  [ $k = \min(m, n)$ ] nur reelle Wurzeln hat. Verf. zeigt hier, daß die Beschränkung der Wurzeln von  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  auf gewisse Winkelräume ausreicht, um die Realität der Wurzeln von  $\chi(x)$  beweisen zu können. Der letzte Satz erlaubt es insbesondere,



aus zwei Gleichungen mit nicht-reellen Wurzeln eine Gleichung mit reellen Wurzeln zu kombinieren. *H. Schwerdtfeger.*

**Clark, F. E.:** A sufficient condition for positivity of polynomial forms. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 988—992 (1952).

Auf Grund eines Satzes von Muirhead [*Proc. Edinburgh math. Soc.* **21**, 144—157 (1903)] werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß gewisse einfach gebaute Polynome in  $n$  reellen Veränderlichen positiv sind. *R. W. Weitzenböck.*

### Gruppentheorie:

**Lorenzen, Paul:** Teilbarkeitstheorie in Bereichen. *Math. Z.* **55**, 269—275 (1952).

Extension de certains résultats obtenus par l'A. dans le cas des groupes pré-ordonnés (ce *Zbl.* **35**, 293, théorèmes 26 et 13 du travail) au cas des domaines, un domaine étant un ensemble pré-ordonné par une relation de pré-ordre supposée régulière pour un demi-groupe  $D$  d'opérateurs de  $B$ . ( $a \in B$ ,  $b \in B$ ,  $x \in D$ ,  $a < b \Rightarrow x y < x b$ ). *L. Lesieur.*

**Teissier, Marianne:** Sur quelques propriétés des idéaux dans les demi-groupes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 767—769 (1952).

Es sei  $D$  eine Halbgruppe ohne Null,  $I$  die Vereinigung aller minimalen Ideale von  $D$ , und  $G$  ein idempotentes Linksideal mit der Eigenschaft, daß jedes seiner echten Linksunterideale zu  $I$  gehört. Dann erweist sich die Menge  $R$  aller  $x \in G$  mit  $Gx = G$  als eine in  $C = G \cap (D - I)$  gelegene Unterhalbgruppe von  $D$ . Enthält nun  $G$  nur eine endliche Anzahl  $p$  von minimalen Idealen, so gibt es einen Homomorphismus, der  $R$  auf eine Permutationsgruppe von  $p$  Ziffern abbildet. Falls  $C$  eine Gruppe ist, kann man auf verschiedene weitere Resultate schließen.

*L. Fuchs.*

**Popova, Hélène:** Sur les vecteurs dérivés des quasi-groupes unis. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 1360—1362 (1952).

**Popova, Hélène:** Logarithmétiques réductibles de quasi-groupes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 1589—1591 (1952).

**Popova, Hélène:** L'isotopie des logarithmétiques des quasi-groupes finis. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 769—771 (1953).

**Popova, Hélène:** Sur la logarithmétique d'une boucle. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1220—1222 (1953).

Ces quatre notes résument la suite des travaux de l'A. sur la logarithmétique des quasi-groupes finis. Nous donnons ici les définitions qui leur sont communes, puis la notion principale introduite par chacune d'elles. —  $Q$  étant un quasi-groupe (groupoïde non associatif avec existence des quotients à droite et à gauche), la logarithmétique  $L_Q$  est l'ensemble des applications  $x$  de  $Q$  dans lui-même définies par  $a \rightarrow a^x$ , où  $a^x$  est une puissance non associative de  $a$ . On définit une addition et une multiplication dans  $L_Q$  par  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$  et  $a^{xy} = (a^x)^y$ . Si  $Q$  est l'ensemble fini  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x$  peut être représenté par le vecteur  $\{1^x, 2^x, \dots, n^x\}$ , et  $L_Q$  est un quasi-groupe additif fini, dont l'ordre  $N$  est le nombre de ses éléments distincts. — Dans la 1<sup>ère</sup> note,  $Q$  est un quasi-groupe uni, c'est à dire ne possédant aucun sous-quasi-groupe distinct de  $Q$ , ni aucun quasi-groupe proprement homomorphe à  $Q$ . Etant donné un sous-vecteur  $V = \{1, 2, \dots, r\}$  de  $Q = \{1, 2, \dots, r, \dots, n\}$ , les vecteurs  $\{1^x, 2^x, \dots, r^x\}$  forment un quasi-groupe additif  $L'_V$  sous-logarithmétique de  $L_Q$ , dont l'ordre  $N'$  est une puissance de  $n$ . Le vecteur  $V$  est dit dérivé lorsque  $N' = n$ . Le nombre maximum d'éléments de  $Q$  formant un vecteur dérivé s'appelle la portée de  $Q$ . Cette 1<sup>ère</sup> note donne certains résultats sur les vecteurs dérivés des quasi-groupes finis d'ordre  $n$  et de portée  $r$ . —  $L_Q$  est réductible si elle possède des sous-vecteurs  $\{j, \dots, k\}$  engendrant un quasi-groupe dont l'ordre est plus petit que le produit  $n_j \dots n_k$ , où  $n_i$  désigne l'ordre de l'élément  $i$ . (Le texte indique, sans doute par erreur,  $n_j, \dots, n_k$ .)  $L_Q$  est irréductible dans le cas contraire. Si  $Q$  est fini, l'ordre de  $L_Q$ , supposé irréductible, est égal au produit des ordres des éléments de  $Q$ . — L'isotopie entre deux groupoïdes  $S$  et  $S_0$  relatifs aux mêmes éléments et à des opérations différentes 0 et  $x$  se définit comme suit: il existe trois transformations biunivoques  $u, v, w$  de  $S$  en lui-même telles que  $a \circ b = (a^u \times b^v)^w$ . L'A. donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'isotopie de deux quasi-groupes unis  $Q_1$  et  $Q_2$  entraîne l'isotopie des logarithmétiques  $L_{Q_1}$  et  $L_{Q_2}$ . — Dans la 4<sup>e</sup> note, l'A. étudie le cas particulier d'une boucle (loop), c. à d. d'un quasi-groupe avec élément unité bilatère



Si  $Q$  est fini, avec un seul générateur,  $L_Q$  est une boucle si et seulement si  $Q$  est une boucle. L'A. donne aussi la structure de  $Q$  pour que  $L_Q$  soit une boucle, dans le cas où  $Q$  possède plus d'un générateur.

L. Lesieur.

**Haken, Hermann:** Zum Identitätsproblem bei Gruppen. Math. Z. 56, 335—362 (1952).

Es werden Gruppen  $\mathfrak{G}$  mit Erzeugenden und definierenden Relationen betrachtet, bei denen sich die Erzeugenden so in drei Klassen  $x_i, y_k, a_l$  zusammenfassen lassen, daß die definierenden Relationen als Worte in den Erzeugenden in zwei Klassen zerfallen, nämlich entweder Worte aus Erzeugenden je einer Klasse allein oder Potenzen von Produkten  $P(x, a) \cdot U(y, a)$  sind. Es wird nun vorausgesetzt, daß in den drei Gruppen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{A}$ , die durch je einen Erzeugendentyp mit den zugehörigen definierenden Relationen bestimmt sind, das Identitätsproblem lösbar sei und daß die Worte  $P(x, a)$  in den durch die  $x_i, a_l$  und den Relationen der  $x_i$  und  $a_l$  allein bestimmten Gruppen gewisse Unverkürzbarkeitsbedingungen erfüllen. Dann ist auch in  $\mathfrak{G}$  das Identitätsproblem lösbar und es läßt sich entscheiden, ob ein Wort ein Element aus einem freien Produkt  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\mathfrak{A}, \mathfrak{Y}\mathfrak{A}$  bestimmt. Diese drei freien Produkte sind Untergruppen von  $\mathfrak{G}$ . Ein Beispiel, bei dem die Voraussetzungen für die  $P(x, a)$  gelten, sind die ebenen diskontinuierlichen Gruppen in den Erzeugenden und definierenden Relationen des ebenen Gruppenbildes.

K. Reidemeister.

**Gluškov, V. M.:** Über die Zentralreihen unendlicher Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 491—496 (1952) [Russisch].

The author proves that to an arbitrarily given transfinite ordinal  $\gamma$  there exist groups whose upper central series has exact length  $\gamma$ . This result is dual to that of Mal'cev (this Zbl. 38, 172) who proved the corresponding fact for the lower central series. The proof is constructive and yields an inductive method. An important rôle is played by the properties of finite triangular matrices with 1's along the main diagonal and coefficients from an arbitrary field. If the underlying field has characteristic zero, then the groups constructed will be locally infinite, but if the characteristic is a prime  $p$ , then one obtains  $p$ -groups with the required properties. Some notable corollaries follow from the proof of the main theorem: (i) If the lower central series of a group has finite length  $k$  then the upper central series of the group has, of course, also length  $k$ . But if the lower central series of a group has length  $\omega$  (first limit ordinal), then there is no restriction whatsoever on the length of the upper central series; (ii) If a group has an upper central series and one of its maximal Abelian normal subgroups is contained in a hypercentre with finite suffix, then the group is of finite (nilpötent) class. But if the suffix is the first limit ordinal, then the class of the group can again be arbitrarily large. (iii) To any  $\gamma \geq \omega + 1$  there exist groups with upper central series of length  $\gamma$  which have no lower central series. (iv) If the length of the upper central series of a group is  $\omega$ , then the group is known to possess a lower central series of length  $\leq \omega + 1$  (D. M. Smirnov, On some properties of soluble and generalized soluble groups, Thesis, Ivanovsk. gos. pedagog. Inst. 1951 [in Russian]). There are then two possibilities for the length of the lower central series, viz.  $\omega$  and  $\omega + 1$ . Both cases can be realised, as the author shows by neatly constructed examples.

K. A. Hirsch.

**Fuchs, L.:** Rédeiian skew product of operator groups. Acta Sci. math. 14, 228—238 (1952).

$G$  und  $\Gamma$  seien zwei Gruppen (mit den Elementen  $a, b, \dots$  bzw.  $\alpha, \beta, \dots$ ; Einselement  $e$  bzw.  $\varepsilon$ ), die einen gemeinsamen Bereich  $\Omega$  von Operatoren  $A, B, \dots$  besitzen. L. Rédei (dies. Zbl. 40, 299) hat das schiefe Produkt  $G \circ \Gamma$  als die Menge der Paare  $(a, \alpha)$  mit der Multiplikationsvorschrift  $(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^\alpha \beta^\alpha, a^\beta \alpha^\beta \beta)$  eingeführt. In  $G \circ \Gamma$  werde

$$(*) \quad (a, \alpha)^\Lambda = (a^\Lambda A^\alpha, A^\alpha \alpha^\Lambda)$$

gesetzt; dabei bedeuten  $a^\Lambda$  und  $\alpha^\Lambda$  die Anwendung des Operators  $A$  in der Gruppe  $G$  bzw.  $\Gamma$ , während  $A^\alpha (\in G)$ ,  $A^\alpha (\in \Gamma)$  Funktionen des Operators  $A$  und des in der Bezeichnung auftretenden Gruppenelements sind. Verf. stellt dann ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für  $A^\alpha$  und  $A^\alpha$  auf, die zu den bereits von Rédei angegebenen Bedingungen hinzutreten müssen, wenn  $G \circ \Gamma$  eine Gruppe mit dem Einselement  $(e, \varepsilon)$  und dem Operatorenbereich  $\Omega$  sein soll und die Anwendung eines Operators  $A$  auf ein Element von  $G \circ \Gamma$  durch (\*) gegeben sein soll. Als Spezialfälle werden die Schreiersche und die Zappa-Szépsche Erweiterung sowie ein gemeinsamer Unterfall dieser Erweiterungen betrachtet.

A. Stöhr.



**Sato, Shoji:** On the lattice homomorphisms of infinite groups. I. Osaka math. J. 4, 229—234 (1952).

The main results of this paper can be stated as the equivalence of the following three conditions for a pair  $G, N$  consisting of a (not necessarily finite) group  $G$  and a subgroup  $N$  of  $G$ : (1)  $(S_1 \cap S_2) \cup N \cong (S_1 \cap N) \cup (S_2 \cap N)$  for every pair  $S_1, S_2$  of subgroups of  $G$ ; (2)  $N$  is a normal subgroup of  $G$ , and the natural homomorphism of  $G$  onto  $G/N$  preserves the intersection of every pair of subgroups (since a group homomorphism always preserves the group theoretic union of any system of subgroups, this means that the natural homomorphism of  $G$  onto  $G/N$  induces a lattice homomorphism); (3)  $N$  is a normal subgroup of  $G$ , and if  $G$  has an element of finite order not in  $N$ , then every element of  $G$  has finite order and  $\bigcap_{\alpha} S_{\alpha} \cup N = \bigcap_{\alpha} (S_{\alpha} \cup N)$

for every set of subgroups  $S_{\alpha}$  of  $G$  (this latter condition is equivalent to the property (Z) studied by the reviewer, see this Zbl. 43, 23), whereas if  $G$  has elements of infinite order, then  $G/N$  is without elements of infinite order, every element of  $G$  of finite order is in  $N$  and has order prime to the orders of the elements of  $G/N$ ,  $\{n\} \cap \{m\} \neq 1$  for every pair  $n, m$  of elements of  $N$  of infinite order, and for every  $n$  in  $N$ ,  $X$  in  $G/N$  and  $a$  in  $X$ ,  $\{a\} \cap X$  contains an element permutable with  $n$ . If  $N$  is an abelian normal subgroup of  $G$ , then the above conditions are equivalent to (4)  $G/N$  is without elements of infinite order, the subgroup  $M$  of elements of finite order in  $G$  is contained in the intersection of the centers of  $N$  and  $G$ , the orders of the elements of  $M$  and  $G/N$  are relatively prime, and  $N/M$  is a torsion free locally cyclic group.

D. G. Higman.

**Kertész, A.:** On fully decomposable Abelian torsion groups. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 225—232 (1952).

Eine additive Abelsche Gruppe (kurz: Gruppe)  $G$  heißt vollständig zerlegbar, wenn sie sich als direkte Summe von direkt unzerlegbaren Gruppen darstellen läßt. Unter den Torsionsgruppen sind bekanntlich nur die primären zyklischen und quasizyklischen (d. h. die Untergruppen der Prüferschen Gruppen vom Typ  $p^{\infty}$ ) direkt unzerlegbar (vgl. z. B. Szele, dies. Zbl. 34, 300), daher sind die vollständig zerlegbaren Torsionsgruppen direkte Summen von solchen Gruppen. Um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die vollständige Zerlegbarkeit der primären (und damit auch der Torsions-) Gruppen aufzustellen, führt Verf. den Begriff des Elementes von innerer bzw. äußerer unendlicher Höhe ein: so heißen in der  $p$ -Gruppe  $G$  diejenigen Elemente  $a \neq 0$ , für welche die Gleichung  $p^n x = a$  für jede bzw. für nicht jede natürliche Zahl  $n$  eine Lösung  $x$  von unendlicher Höhe besitzt. Das Kriterium lautet: Die  $p$ -Gruppe  $G$  ist genau dann vollständig zerlegbar, wenn sie kein Element von äußerer unendlicher Höhe besitzt und außerdem ein Hauptsystem enthält. Dabei ist unter einem Hauptsystem [vgl. Verf., Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 121—126 (1952)] ein maximales unabhängiges System zu verstehen ( $a_1, \dots, a_k$  heißen unabhängig, wenn aus der Gleichung  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 0$   $n_1 a_1 = \dots = n_k a_k = 0$  folgt) derart, daß kein Element sich ohne Zerstörung der Unabhängigkeit des Systems durch ein Element von größerer Höhe ersetzen läßt. Von den Anwendungen sei nur das folgende Ergebnis erwähnt: Sind die Höhen der Elemente von endlicher Höhe beschränkt, so ist die  $p$ -Gruppe vollständig zerlegbar.

L. Fuchs.

**Mattioli, Ennio:** Sui gruppi abeliani finiti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 51—57 (1952).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der früheren Forschungen des Verf. (dies. Zbl. 37, 12; 44, 15). Seien  $\mathfrak{R}^{(1)}, \dots, \mathfrak{R}^{(N)}$  isomorphe Abelsche Gruppen mit Ordnungen  $P$  und mit Elementen  $R_r^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ;  $r = 0, \dots, P-1$ ), wo  $N = (P^k - 1)/(P - 1)$ ,  $k \geq 2$  ist. Man nennt eine Gruppe  $\mathfrak{R}$  mit Elementen  $R_0, \dots, R_{P-1}$  ( $R_0 = 1$ ) perfekt, wenn verschiedene Automorphismen  $A_0 = 1, A_1, \dots, A_{P-2}$  von  $\mathfrak{R}$  mit folgenden Eigenschaften existieren: ist  $A_i(R_l) = A_j(R_l)$  ( $l > 0$ ), so ist  $i = j$ . Es gilt dann der folgende Satz: ist  $G = \mathfrak{R}^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{R}^{(N)}$  (der Ordnung  $P^N$ ), wo  $\mathfrak{R}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) perfekte Gruppen sind, so hat  $G$  eine Untergruppe  $\Gamma$  der Ordnung  $P^{N-k}$ , für welche die Zerlegung  $G = \Gamma + \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^{P-1} \Gamma R_r^{(i)}$  gilt.  $\Gamma$  ist

die kleinste Untergruppe von  $G$ , welche alle Elemente  $\gamma_r^{(j)} = R_r^{(i_1)} A_{s_2}(R_r^{(i_2)}) \dots A_{s_f}(R_r^{(i_f)}) R_r^{(j)}$  ( $r = 0, \dots, P-1$ ;  $j = k+1, \dots, N$ ;  $2 \leq f \leq k$ ;  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_f \leq k$ ;  $0 \leq s_2, \dots, s_f \leq P-2$ ) enthält. Mit ähnlichen Problemen beschäftigt sich auch S. K. Zaremba [J. London math. Soc. 27, 242—246 (1952)]. J. Szépe.

**Taketa, Kiyosi:** Über die Struktur der metabelschen Gruppen. III. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 10—32 (1952).

In der vorangegangenen Arbeit (dies. Zbl. 41, 158) hatte Verf. eine zur abgeleiteten Gruppenmatrix  $P$  der maximalen abelschen Substitutionsgruppe  $\mathfrak{A}$  eines



Galoisfeldes äquivalente einfachere Matrix abgeleitet und für Spezialfälle die Ordnung von  $\mathfrak{P}$  bestimmt. In der vorliegenden Note beschäftigt sich Verf. mit der Frage nach dem Typus von  $\mathfrak{P}$  und führt das Problem auf abelsche Substitutionsgruppen kleineren Grades zurück, falls die abgeleitete Gruppenmatrix  $P$  von  $\mathfrak{P}$  gewissen Bedingungen genügt. Schließlich zeigt Verf., daß diese Zurückführung auch für die bisher ausgeschlossenen Formen der Matrix  $P$  möglich ist. *G. Reichel.*

**Zacher, Giovanni:** *Costruzione dei gruppi finiti a sottogruppo di Frattini identico.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 383—394 (1952).

Let  $N$  be the union of the identity subgroup and all the minimal abelian normal subgroups of a finite group  $G$ . The author proves that the Frattini subgroup of  $G$  is equal to the identity if and only if there exists a subgroup  $C$  of  $G$  such that  $G = NC$  and  $1 = N \cap C$ . In particular, every group without proper abelian normal subgroups has the property considered. Using the above theorem and the theory of group extensions, the author constructs the groups with Frattini subgroup equal to the identity from the groups without proper abelian normal subgroups.

*D. G. Higman.*

**Shaw, R. H.:** *Remark on a theorem of Frobenius.* Proc. Amer. math. Soc. **3**, 970—972 (1952).

Let  $G$  be a finite group.  $H$  a subgroup which is its own normalizer in  $G$ , and such that any two conjugates of  $H$  have trivial intersection. The theorem referred to in the title states that under these conditions the set consisting of the identity of  $G$  and those elements of  $G$  not belonging to  $H$  or any of its conjugates is a normal subgroup of  $G$ . This theorem is proved here for solvable  $H$  by means of the theory of transfer. Thus the paper represents a first step towards the solution of the problem to find a proof of Frobenius' theorem which does not rely on the theory of group characters.

*Hanna Neumann.*

**Nagai, Osamu:** *Note on Brauer's theorem of simple groups.* Osaka math. J. **4**, 113—120 (1952).

Es sei  $p$  eine Primzahl und  $\mathfrak{G}$  eine endliche Gruppe, deren  $p$ -Sylowgruppen zyklisch von der Ordnung  $p$  sind und mit ihren Zentralisatoren übereinstimmen; außerdem soll  $\mathfrak{G}$  vollkommen (d. h. gleich der eigenen Kommutatorgruppe) sein. Dann ist die Anzahl  $t$  der Klassen konjugierter Elemente der Ordnung  $p$  ein Teiler von  $p - 1$ , und die Anzahl der  $p$ -Sylowgruppen von  $\mathfrak{G}$  ist  $\equiv 1 \pmod{p}$ , besitzt also die Form  $1 + np$  mit  $n \geq 0$ . Die Gruppenordnung  $g$  von  $\mathfrak{G}$  besitzt die Aufspaltung  $g = \frac{p-1}{t} p (1 + np)$ . Über diese Gruppen hat R. Brauer in einer früheren Arbeit [Ann. of Math., II. Ser. **44**, 57—79 (1943)] bewiesen, daß  $n \geq \frac{1}{3}(p+1)$  ist bis auf genau angebbare Ausnahmen, daß also die Gruppenordnung „im allgemeinen“ groß ist. Verf. vergrößert hier diese Schranke zu  $n \geq p + 2$ , allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $t$  ungerade ist. Als Ausnahmegruppen treten hier wie bei R. Brauer linear gebrochene Substitutionsgruppen in zwei Variablen auf, und zwar ist für  $n < p + 2$  und ungerades  $t$  die Primzahl  $p$  von der Form  $p = 2^\mu - 1$ , und es ist  $\mathfrak{G} = L F(2, 2^\mu)$ . Der Beweis des Verf. schließt sich sachlich und methodisch unmittelbar an die zitierte Arbeit von R. Brauer an, beruht also auf der Theorie der modularen Darstellungen modulo  $p$  von  $\mathfrak{G}$ .

*P. Roquette.*

**Motzkín, T. S. and Olga Taussky:** *On representations of finite groups.* Indagationes math. **14**, 511—512 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 511—512 (1952).

Es sei  $\mathfrak{G}$  eine endliche Gruppe von  $n$ -reihigen Matrizen mit komplexen Elementen. Die Eigenwerte  $\alpha_r, \beta_r$  von je zwei Elementen  $A, B \in \mathfrak{G}$  mögen sich so numerieren lassen, daß entweder jede Linearverbindung  $f(A, B) = \alpha A + \beta B$  ( $\alpha, \beta$  beliebig, komplex) oder jedes Potenzprodukt  $f(A, B) = A^p B^q A^r B^s$  ( $p, q, r, s$  beliebige



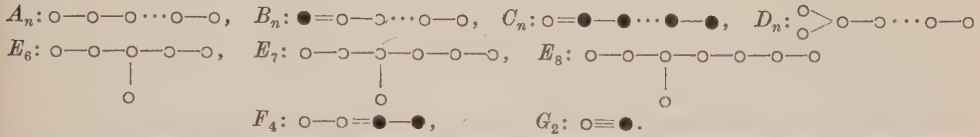
natürliche Zahlen) die Eigenwerte  $f(\alpha_\nu, \beta_\nu)$  besitzt ( $\nu = 1, \dots, n$ ). Dann ist  $\mathcal{G}$  kommutativ. Über Körpern positiver Charakteristik gilt die entsprechende Aussage nicht (s. auch Verff., dies. Zbl. 48, 9). H. Wielandt.

**Dynkin, E. B.: Die maximalen Untergruppen der klassischen Gruppen.** Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 1, 39—166 (1952) [Russisch].

Dies ist eine bedeutsame Untersuchung, die mit den modernen Methoden der Lieschen Theorie arbeitet. Es handelt sich hauptsächlich um Enthaltenseins-Relationen bei Untergruppen der sogen. klassischen Gruppen über dem Körper der komplexen Zahlen. Als sein Hauptresultat bezeichnet der Verf. den Satz, der aussagt, daß die folgenden zwei Klassen von Gruppen, „im Wesentlichen“ zusammenfallen: (I) die Klasse der einfachen irreduziblen Gruppen, (II) die Klasse der Gruppen, die in einer der klassischen Gruppen maximale Untergruppen sind. Ausnahmen werden ausgesondert und in einer Tabelle zusammengestellt. Schon in der Einleitung wird die Nützlichkeit dieses Satzes demonstriert, indem einige allgemeine Frobeniusche Sätze des Matrizenkalküls daraus gefolgert werden. — Die Arbeit zerfällt in sechs Kapitel (S. 45—109) und einen umfangreichen Anhang (S. 109—150), in dem die hier gebrauchten Sätze der Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen, soweit es sich nicht um Ergebnisse der neuesten Untersuchungen des Verf. handelt, im Anschluß an die Arbeiten von Cartan, Weyl und Mal'cev mehr oder weniger ausführlich dargestellt und einige neuere Begriffe (einfache Wurzeln, Randvektoren) besonders behandelt werden. S. 152—166: Tabellen. — Kap. I bringt die fundamentalen Sätze, durch die die maximalen Untergruppen  $G$  in den klassischen Gruppen  $SL(N)$ ,  $O(N)$ ,  $Sp(N)$  im  $N$ -dimensionalen Raum  $R^{(N)}$  mit komplexen Koordinaten charakterisiert werden. Es werden drei Fälle unterschieden: 1.  $G$  ist reduzibel maximal: Im Falle  $SL(N)$  ist jedes solche  $G$  charakterisiert durch einen echten invarianten Teilraum  $\tilde{R}$  von  $R^{(N)}$ , während in den Fällen  $O(N)$  und  $Sp(N)$  die invariante symmetrische bzw. schief-symmetrische Bilinearform  $Q(\xi, \eta)$  auf dem invarianten  $\tilde{R}$  folgender Bedingung zu genügen hat: Entweder: falls für alle  $\eta$  in  $\tilde{R}$  und ein  $\xi$  in  $\tilde{R}$  gilt  $Q(\xi, \eta) = 0$ , so ist  $\xi = 0$ ; oder:  $Q(\xi, \eta) = 0$  auf  $\tilde{R}$ . Abgesehen von der Existenz von  $\tilde{R}$  in den letzten zwei Fällen wird zum Beweis auf die (unzugängliche) Dissertation von Morosov (Kazan 1943) oder auf die Note von Karpelevič (dies. Zbl. 44, 263) verwiesen. — 2.  $G$  ist irreduzibel, nicht einfach, maximal: In  $SL(N)$  mit  $N = st$ ,  $2 \leq s \leq t$  gilt  $G = SL(s) \times SL(t)$  (Kronecker-Produkt), in  $Sp(N)$ ,  $2 \leq s < t$ ,  $t \neq 4$  oder  $s = 2$ ,  $t = 4$  gilt  $G = Sp(s) \times O(t)$ ; in  $O(N)$ :  $G = Sp(s) \times Sp(t)$ ,  $2 \leq s \leq t$  oder  $G = O(s) \times O(t)$ ,  $3 \leq s \leq t$ ,  $s, t \neq 4$ . — 3.  $G$  ist irreduzibel, einfach, maximal: Hier gilt, abgesehen von 4 Reihen und 14 isolierten Ausnahmegruppen, die folgende Regel: In  $SL(N)$ , wenn  $G$  keine bilineare Invariante besitzt, in  $O(N)$  bzw.  $Sp(N)$  im Falle einer symmetrischen bzw. schief-symmetrischen bilinearen Invariante, ist jede irreduzible unimodulare Gruppe  $G$  maximal. Die drei Fälle schließen einander aus, da  $G$  reduzibel ist, wenn eine symmetrische und eine schief-symmetrische Invariante zu gleicher Zeit existieren. Im Hinblick auf bekannte Resultate von Cartan ist diese Aufzählung erschöpfend. Im Zusatz zu Kap. I wird der Fall der maximalen reellen Untergruppen betrachtet. Kap. II behandelt die Enthaltenseins-Relationen bei den irreduziblen linearen unimodularen Gruppen. Von den ersten darauf bezüglichen Sätzen wird dann zum Beweis der Hauptsätze von Kap. I Gebrauch gemacht, während der Beweis dieser Sätze selbst auf Kap. III verschoben wird. Sie sind basiert auf einen Hilssatz, welcher besagt, daß, falls  $N = N_1 N_2 \dots N_k$  ( $N_i > 1$ ), jede irreduzible Untergruppe  $\mathcal{G}$  von  $SL(N)$  äquivalent ist zu einer Untergruppe der Gestalt  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_k$ , wobei  $\mathcal{G}_i$  eine einfache irreduzible Untergruppe von  $SL(N_i)$  darstellt; die Anzahl  $k$ , sowie die Faktoren  $N_i$  der Zerlegung von  $N$  sind durch  $\mathcal{G}$  eindeutig bestimmt, ebenso wie die Gruppen  $\mathcal{G}_i$  bis auf Äquivalenz. Die Gruppe  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_k$  ist dann und nur dann in  $O(N)$  oder in  $Sp(N)$  enthalten, wenn dies für alle die Gruppen  $\mathcal{G}_i$  zutrifft (bzw.). Ist ferner  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_1^* \times \dots \times \mathcal{G}_k^*$ , wobei  $\mathcal{G}_i^*$  irreduzible einfache Gruppen unimodularer Matrizen sind, so kann man jede irreduzible Untergruppe  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{G}^*$  darstellen in der Form  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_k$ , wo  $\mathcal{G}_i$  irreduzible Untergruppe von  $\mathcal{G}_i^*$  ist. Die Aufstellung der Enthaltenseins-Relationen für irreduzible Gruppen ist somit auf den Fall reduziert, in dem die umfangreichste Gruppe einfach ist. Zwei Relationen  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$  und  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_1^*$  unter linearen Gruppen werden als „zum gleichen Typus“ gehörig bezeichnet, wenn  $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}^* \sim \mathcal{G}_1^*$  ( $\sim$  = äquivalent). Typen von Enthaltenseins-Relationen lassen sich somit durch Paare von Schemata beschreiben, welche für Klassen von äquivalenten Gruppen charakteristisch sind. Diese Schemata entstehen durch geeignete Bezifferung der Wurzelschemata, welche sich zur Charakterisierung der einfachen Gruppen (bis auf Isomorphismus) eingebürgert haben. Auch um Erklärungen in späteren Referaten zu vereinfachen, seien diese Schemata der einfachen Gruppen hier beschrieben: Sind  $\alpha, \beta$  zwei verschiedene einfache Wurzelvektoren, so sind (bekanntlich) nur vier verschiedene Winkel zwischen ihnen möglich:  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ . Für jeden Vektor kommen nur zwei Längen in Frage. Jedem Vektor wird im Schema ein Kreischen zugeordnet, leer ( $\circ$ ) oder ausgefüllt ( $\bullet$ ), je nachdem er die größere oder die kleinere Länge hat. Je nach dem Winkel zwischen den zwei Vektoren werden die zwei



entsprechenden Kreischen durch 0 oder 1 oder 2 oder 3 Striche verbunden, so daß sich die folgenden Schemata (ähnlich den Strukturformeln der organischen Chemie) für die einfachen Gruppen ergeben:



Die „Bezifferung“ des Schemas einer irreduziblen Darstellung ergibt sich, indem man an das dem Vektor  $\alpha$  entsprechende Kreischen eine durch  $\alpha$  und das höchste Gewicht (d. h. die Äquivalenzklasse) der Darstellung bestimmte Zahl schreibt. Alle möglichen Enthaltenseins-Relationen  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$ , wo  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}^*$  irreduzible Gruppen unimodularer Matrizen sind und  $\mathfrak{G}^*$  einfach, aber von  $SL(N)$ ,  $Sp(N)$  und  $O(N)$  verschieden, lassen sich so aus einer Tabelle der bezifferten Schemata ablesen. Mit Hilfe von evidenten Fakten der allgemeinen Darstellungstheorie wird nun die ganze Frage der Enthaltenseins-Relationen in diese Theorie hinübergespielt, wonach es dann nur mehr erforderlich ist, für jede einfache Liesche Gruppe  $\mathfrak{G}$  sowie jede ihrer treuen Darstellungen  $\Phi(\mathfrak{G})$  die bezüglich  $\Phi$  irreduziblen Untergruppen von  $\mathfrak{G}$ , d. h. die irreduziblen Untergruppen  $\Phi(\mathfrak{H})$  von  $\Phi(\mathfrak{G})$  aufzufinden. Hierbei beschränkt man sich auf den Fall, daß die umfassendste Gruppe einer aus den vier Reihen von klassischen Gruppen isomorph ist, wobei es ausreicht, für jede der klassischen Gruppen  $\mathfrak{G}$  und jede halbeinfache Untergruppe  $\mathfrak{H}$  eine treue Darstellung  $\varphi$  von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{G}$  und eine treue Darstellung  $\Phi$  von  $\mathfrak{G}$  zu finden, derart, daß  $\Phi \varphi(\mathfrak{H})$  eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{H}$  ergibt. Für jede der drei Typen von klassischen Gruppen wird dies Problem in Kap. IV, V, VI resp. gelöst, während in Kap. III, unter besonderem Hinweis auf den Anhang, der dazu erforderliche, beträchtliche Apparat der Darstellungstheorie entwickelt wird. Von den hier behandelten Gegenständen seien die folgenden wenigstens andeutungsweise erwähnt: Sätze über die Zerlegung des Kronecker-Produktes zweier irreduzibler Darstellungen einer halbeinfachen Lieschen Algebra in irreduzible Darstellungen und Irreduzibilitätsbedingungen für ein Kronecker-Produkt von  $k$  irreduziblen Darstellungen. — Von dem zu einer irreduziblen Darstellung einer halbeinfachen Lieschen Algebra gehörigen bezifferten Schema wird eine Anzahl von Kreischen und Verbindungsstrichen ausgelöscht; Charakterisierung der zu dem übrigbleibenden Schema gehörigen Darstellung als „Teil“ der ursprünglichen Darstellung, wobei eine Darstellung  $\varphi$  einer halbeinfachen Algebra  $G'$  Teil der Darstellung  $\varphi$  einer halbeinfachen Algebra  $G$  heißt, wenn sich eine Numerierung der einfachen Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  von  $G$  und der einfachen Wurzeln  $\beta_1, \dots, \beta_m$  von  $G'$  einführen läßt, so daß, wenn der Darstellungsraum  $R_\varphi$  in  $R_{\varphi'}$  liegt,  $R_{\varphi'}$  gewissen Invarianzbedingungen bez. der den Wurzelvektoren zugeordneten Operatoren  $H$  und  $E_{\alpha_i}, E_{\beta_i}$  genügt (in den Bezeichnungen des fundamentalen Zerlegungssatzes). — Schließlich die Beziehung der „Unterordnung“, die sich ergibt, wenn man in dem bezifferten Schema einer Darstellung von  $G$  die Ziffer-Marken durch nicht größere Marken ersetzt, sowie gewisse der durch  $+$ -Zeichen verbundenen Komponenten des Schemas ausläßt. (Das untergeordnete Schema bezieht sich auf eine Darstellung derselben Algebra.) Ohne genau auf die komplizierten Einzelheiten einzugehen, läßt sich die Fülle der hier eingeführten mannigfaltigen neuen Begriffe und Methoden und ihre Bedeutung für die Beweise der Hauptsätze der Arbeit kaum würdigen; es muß daher auf diese selbst verwiesen werden.

H. Schwerdtfeger.

Dynkin, E. B.: Die halbeinfachen Teilalgebren halbeinfacher Liescher Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. **30 (72)**, 349—462 (1952) [Russisch].

In einer kurzen Einleitung werden die wichtigsten der für das Folgende wesentlichen Teile der Theorie der halbeinfachen (kurz: he.) Lieschen Algebren  $G$  über dem Körper der komplexen Zahlen in Erinnerung gebracht, für die eine etwas ausführlichere Darstellung im Anhang der vorstehend referierten Arbeit des Verf. gegeben worden war: Kanonische Zerlegung, Wurzelsysteme, Mal'cev'sches Idempotent  $H$  und Ordnung in  $H$ , einfache Wurzeln, Gewichte einer Darstellung, Cartansches Skalarprodukt und die damit gebildete Gramsche Matrix  $(g^{\alpha\beta})$  eines Systems einfacher Wurzelvektoren, sowie eine Tabelle dieser Matrizen und ihrer Inversen für alle einfachen Lieschen Gruppen, sowie deren Schemata (vgl. vorstehendes Referat). — Das Hauptproblem der Abhandlung besteht darin, die von Mal'cev [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser mat. 8, 143—174 (1944)] gewonnenen Ergebnisse für die vier Reihen von klassischen Gruppen auf die Ausnahmegruppen auszudehnen. Hier wird das Problem zurückgeführt auf die Klassifikation aller möglichen Darstellungen einer Algebra  $\tilde{G}$  in einer andern  $G$ . Zwei solche Darstellungen  $f_1$  und  $f_2$  heißen äquivalent, wenn es einen inneren Automorphismus  $U$  von  $G$  gibt, so daß  $f_2(x) = U f_1(x)$  für alle  $x$  in  $G$ . Wird dann nur Klassifikation bis auf Konjugiertheit angestrebt, so wurde dies Problem von Mal'cev gelöst für die Reihen  $A_n$  (gewöhnliches Darstellungsproblem),  $B_n, C_n, D_n$ , während bei dem Versuch, das Problem für die Ausnahmegruppen  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ , zu behandeln, sich bedeutende Schwierigkeiten ergaben, deren Überwindung sich



die vorliegende Arbeit als Ziel gesetzt hat. Es handelt sich dabei aber nicht um eine Weiterführung der von Mal'cev begonnenen Rechnungen. Vielmehr erwies sich eine Vertiefung der allgemeinen Theorie mit vielen neuen und allgemeinen Begriffsbildungen als notwendig, deren Wert der Verf. in bewunderungswürdiger Weise demonstriert, indem er sie in dem Fall der genannten Gruppen (bzw. ihrer Lieschen Algebren) zur Anwendung bringt und durch minutiöse Detail-Arbeit das Problem der Aufzählung aller he. Teilalgebren der einfachen Algebren vollkommen löst. Die Ergebnisse werden in Tafeln zusammengestellt, die fast die Hälfte der Abhandlung füllen. — In Kap. I werden neue allgemeine Begriffe eingeführt, die für die Klassifikation der Darstellungen von  $\tilde{G}$  in  $G$  von Bedeutung sind: „Lineare Äquivalenz“ zweier Darstellungen  $f_1, f_2$  besteht, wenn  $\varphi f_1$  und  $\varphi f_2$  im üblichen Sinne äquivalent sind für jede Darstellung  $\varphi$ . Ähnlich: „Lineare Konjugiertheit“ (vgl. Dynkin, dies. Zbl. 44, 26, im folgenden zitiert als „D“). Bedingungen für das Bestehen dieser Relationen werden aufgestellt. Falls  $G$  eine der Algebren  $A_n, B_n, C_n, G_2, F_4, E_6$  ist, folgt lineare Äquivalenz aus  $\omega$ -Äquivalenz, im Falle von  $D_n, E_7, E_8$  aus  $\omega$ -Äquivalenz und  $\omega'$ -Äquivalenz, wo  $\omega$  und  $\omega'$  zwei irreduzible Darstellungen sind, deren bezifferte Schemata (vgl. vorst. Ref.) hier angegeben werden. Umgekehrt werden auch notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet, unter denen zwei Darstellungen linear äquivalent, aber nicht äquivalent sind. „Lineare Konjugiertheit“ wurde in „D“ referiert. Sodann wird mit Hilfe einer Normalisierung des längsten Wurzelvektors das bei inneren Automorphismen invariante Cartansche Skalarprodukt  $(x, y)$  in einer einfachen Algebra bestimmt gemacht. Für eine Darstellung  $f$  von  $G$  besteht die Formel  $(f(x), f(y)) = f_j(x, y)$ . Der hier auftretende Faktor  $f_j$  ist der (ganz-zahlige) Index der Darstellung  $f$ . (Vgl. „D“.) Die in „D“ angegebenen Tatsachen betr. den Index und die, den Begriff der irreduziblen Darstellung verallgemeinernden, „ganzzahligen“ Darstellungen werden hier ausführlich bewiesen. — Kap. II beschäftigt sich mit den regulären Teilalgebren  $\tilde{G}$  von  $G$  (vgl. Dynkin, dies. Zbl. 37, 307); das sind diejenigen, für die man aus Elementen einer Cartanschen Teilalgebra  $K$  von  $G$  und den Wurzelvektoren von  $G$  bez.  $K$  eine Basis aufstellen kann. Ist  $G = K + \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} G_\alpha$  eine

Cartansche Zerlegung von  $G$ , so ist  $\tilde{G} = \tilde{K} + \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}} G_\alpha$  mit  $\tilde{K} \subset K, \tilde{\Sigma} \subset \Sigma$  bei passender Wahl

von  $K$  eine Cartansche Zerlegung von  $\tilde{G}$ . Für die Aufsuchung aller regulären Teilalgebren genügt es dann, alle Teilsysteme  $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$  zu finden, die der Bedingung genügen, daß, wenn  $\alpha \in \tilde{\Sigma}, \beta \in \tilde{\Sigma}$  und  $\alpha + \beta \in \Sigma$ , dann auch  $\alpha + \beta \in \tilde{\Sigma}$ . Halbeinfachen Teilalgebren entsprechen die und nur die Systeme  $\tilde{\Sigma}$ , bei denen aus  $\alpha \in \tilde{\Sigma}$  folgt, daß auch  $-\alpha \in \tilde{\Sigma}$ ; dann ist  $\tilde{\Sigma}$  das Wurzelsystem der entsprechenden Algebra  $\tilde{G}$ . Auf diese Weise wird klar, wie im Falle der regulären Darstellungen die Aufgabe der Aufzählung sich reduziert auf ein rein kombinatorisches Problem, dessen Erledigung einen wichtigen Teilschritt in der Lösung des Hauptproblems darstellt. Von besonderer Bedeutung erweisen sich dabei die sogen. II-Systeme in  $\Sigma$ , d. s. Teilmengen  $\Gamma$  des Wurzelsystems  $\Sigma$ , die die folgenden Eigenschaften haben: Aus  $\alpha \in \Gamma, \beta \in \Gamma$  folgt  $\alpha - \beta \in \Gamma$ ;  $\Gamma$  ist linear unabhängig. Es gilt dann: Ist  $G$  he. und vom Range  $n$ , so ist jedes II-System enthalten in einem II-System von  $n$  Elementen, und jedes solche größte II-System ergibt sich aus einem System einfacher Wurzeln durch eine Kette von gewissen kombinatorischen Operationen („Elementartransformationen“), die darin bestehen, daß man das gegebene II-System in seine nicht weiter zerlegbaren orthogonalen Teilsysteme zerlegt und in diesen in geeigneter Weise Elemente durch andere ersetzt. Hiermit hat man eine Arbeitsmethode, aus dem System der einfachen Wurzeln von  $G$  alle möglichen Systeme einfacher Wurzeln für die regulären Teilalgebren von  $G$  zu finden. Diese Methode wird nun systematisch auf die einfachen Algebren angewandt, und die Resultate werden in Tabellen festgelegt. Besondere Aufmerksamkeit wird den maximalen regulären Teilalgebren gewidmet; hier möge nur das folgende Resultat Erwähnung finden, das mit Hilfe eines Satzes von Tschebotarew [Mat. Sbornik, n. Ser. 11(53), 239–244, (1942)] bewiesen wird: Ist  $\tilde{G}$  eine reguläre Teilalgebra einer halbeinfachen Algebra  $G$ , so ist das Radikal  $\tilde{G}_0$  und eine jede maximale halbeinfache Teilalgebra  $\tilde{G}'$  von  $\tilde{G}$  auch regulär in  $G$ . — Die letzte der fundamentalen Definitionen dieses Kapitels betrifft ein Analogon des Begriffes eines reduzierbaren Systems von Matrizen in einer allgemeinen he. Algebra  $G$ : Eine Menge  $M$  von Elementen in  $G$  heißt ein  $R$ -System, wenn es in einer gewissen regulären Teilalgebra von  $G$  enthalten ist. Jedes System, das nicht  $R$ -System ist, wird  $S$ -System genannt. In jeder treuen Darstellung von  $G$  ist das Abbild eines  $R$ -Systems ein reduzierbares Matrixsystem. Umgekehrt ist jedes reduzierbare Matrixsystem in den klassischen Gruppen  $A_n, \dots, D_n$  ein  $R$ -System. Ist  $G$  he., so ist jede nicht-he. Teilalgebra von  $G$  ein  $R$ -System. Es folgt hieraus eine interessante Verallgemeinerung des Schurschen Lemmas: Die Null ist das einzige Element einer he. Algebra  $G$ , das mit jedem Element eines  $S$ -Systems von  $G$  vertauschbar ist. Die Beziehung dieser Begriffe zu den vorangehenden ist ausgedrückt in den folgenden Sätzen: Jedes  $S$ -System ist ganzzahlig, und jede he.  $R$ -Teilalgebra eines he. Algebra  $G$  ist enthalten in einer he. regulären eigentlichen Teilalgebra  $G'$  von  $G$ . — In Anbetracht der durch das Vorangehende wohl hinreichend illustrierten Fülle und Kompliziertheit der hier eingeführten und miteinander verbundenen Begriffe sei

der Bericht über das Folgende auf die Inhaltsangabe der restlichen vier Kapitel in Stichworten beschränkt. Kap. III: Dreigliedrige einfache Teilalgebren der he. Algebren (beginnend mit der Bemerkung, daß alle he. dreigliedrigen Algebren untereinander isomorph sind und vom Range 1). Behandelt wird u. a. die Frage, wann zwei dreigliedrige Teilalgebren durch einen Automorphismus von  $G$  ineinander übergeführt werden können. — Dreigliedrige  $S$ -Algebren in den he. Algebren. — Tabelle der dreigliedrigen Teilalgebren der Ausnahmealgebren. — Kap. IV. Einfache Teilalgebren der Ausnahmealgebren. — Kap. V. Klassifizierung der  $S$ -Algebren in den Ausnahmealgebren und Enthaltenseins-Relationen unter den  $S$ -Algebren. Nicht-einfache maximale  $S$ -Teilalgebren. Tafeln der  $S$ -Teilalgebren. — Kap. VI. Maximale Teilalgebren der halbeinfachen Algebren und Teilalgebren der Ausnahmealgebren, die bezüglich einer linearen Darstellung irreduzibel sind.

*H. Schwerdtfeger.*

**Najmark, M. A.: Beschreibung aller irreduziblen unitären Darstellungen der klassischen Gruppen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 883—886 (1952) [Russisch].

I. M. Gel'fand and the present author have made exhaustive studies of certain (infinite-dimensional) irreducible unitary representations of the classical groups (here defined as complex unimodular groups, complex orthogonal groups, and symplectic groups). Their work has appeared in a long series of notes and monographs; a complete exposition is found in Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov 36, 1—288 (1950). For all of the classical groups, two classes of representations are found: the so-called principal and complementary series. Up to this time, it was known only for the unimodular group of order 2 that these series exhaust all possible irreducible unitary representations (up to unitary equivalence) (this Zbl. 37, 153). The present note announces and sketches a proof that the principal and complementary series exhaust all possible irreducible unitary representations (up to unitary equivalence) for all of the classical groups. The proof is based upon a study of the maximal ideals in a certain subalgebra of the  $L_1$ -Algebra of the group in question, and upon an evaluation of the norms of certain elements of this  $L_1$ -algebra.

*E. Hewitt.*

**Roquette, Peter: Arithmetische Untersuchung des Charakterringes einer endlichen Gruppe. — Mit Anwendungen auf die Bestimmung des minimalen Darstellungskörpers einer endlichen Gruppe und in der Theorie der Artinschen  $L$ -Funktionen.** J. reine angew. Math. 190, 148—168 (1952).

Die Sätze der klassischen Darstellungstheorie für eine endliche Gruppe  $\mathfrak{G}$  sind bekanntlich ihrem Wesen nach Aussagen über die algebraische Struktur des Gruppen- oder Charakterringes von  $\mathfrak{G}$ . Weitergehende Fragestellungen und die Theorie der modularen Darstellungen führen, wie man vor allem aus den Arbeiten von R. Brauer weiß, auf die Untersuchung der Arithmetik in diesen Ringen. Daher erscheint die vom Verf. in der vorliegenden Arbeit durchgeführte arithmetische Untersuchung des Charakterringes als der natürliche und direkte Weg zu den tiefer liegenden Sätzen der Darstellungstheorie und deren Anwendungen. — Es sei  $p$  eine beliebige, im folgenden festgehaltene Primzahl und  $P_p$  der Körper der rationalen  $p$ -adischen Zahlen. Mit  $g_0$  werde der Exponent von  $\mathfrak{G}$  bezeichnet. Durch Adjunktion der  $g_0$ -ten Einheitswurzeln zu  $P_p$  entsteht der Körper  $K_p$  mit dem Primdivisor  $p$ . Ferner werde mit  $\mathfrak{I}_p$  der Integritätsbereich der  $p$ -adischen ganzen Zahlen aus  $K_p$  bezeichnet. Objekt der Untersuchung ist der Charakterring  $X_p$  von  $\mathfrak{G}$  mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{I}_p$ . Die Blöcke werden in der folgenden direkten Weise eingeführt: Man zerlege  $X_p$  in die direkte Summe direkt unzerlegbarer Ideale:  $X_p = \sum_B B$ .

Die direkten Summanden  $B$  werden als Blöcke bezeichnet. Zunächst wird gezeigt, daß jeder Block ein einziges maximales Primideal besitzt, bestehend aus allen Funktionen aus  $B$ , deren Funktionswerte sämtlich durch  $p$  teilbar sind. Der Blockzerlegung von  $X_p$  entspricht die Zerlegung  $1 = \sum_B \varepsilon^{(B)}$  der 1 in orthogonale Idempotenten. Für einen festen Block  $B$  sei  $\mathfrak{O}$  diejenige

Teilmenge von  $\mathfrak{G}$ , auf der  $\varepsilon^{(B)} = 1$  ist. Man erhält so eine Zerlegung  $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{O}$  von  $\mathfrak{G}$  in sogenannte  $p$ -Oberklassen  $\mathfrak{O}$ . Jede  $p$ -Oberklasse besteht aus vollen Klassen im gewöhnlichen Sinne und enthält genau eine  $p$ -reguläre Klasse  $\mathfrak{K}$ , d. h. eine solche, in der die Elementordnung zu  $p$  prim ist. Zerlegt man ein Element  $G$  aus  $\mathfrak{G}$  in der Form  $G = RP$ , wo  $R$   $p$ -regulär ist und  $P$  als Ordnung eine Potenz von  $p$  besitzt, so besteht  $\mathfrak{O}$  genau aus denjenigen Elementen, deren  $p$ -reguläre Faktoren in  $\mathfrak{K}$  liegen. Mithin sind die Blöcke eineindeutig den  $p$ -regulären Klassen von  $\mathfrak{G}$  zugeordnet. — Zur genaueren Beschreibung der Struktur der Blöcke wird von folgendem Induktionsprozeß Gebrauch gemacht: Bekanntlich entsteht aus einer Darstellung  $\mathfrak{D}$  einer Unter-



Gruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{G}$  durch Überlagerung mit der Permutationsdarstellung der Restklassen von  $\mathfrak{G}$  mod  $\mathfrak{H}$  eine induzierte Darstellung  $\mathfrak{D}^*$  von  $\mathfrak{G}$ . Jedem Element  $\xi$  des  $p$ -adischen Charakterringes von  $\mathfrak{H}$  entspricht nach diesem Induktionsprozeß also ein wohlbestimmtes „induziertes“ Element  $\xi^*$  des  $p$ -adischen Charakterringes von  $\mathfrak{G}$ . Es sei  $B$  ein Block, dem die  $p$ -Oberklasse  $\mathfrak{O}$  zugeordnet ist, und  $R$  ein  $p$ -reguläres Element aus  $\mathfrak{O}$ . Ferner sei  $\mathfrak{P}$  eine  $p$ -Sylowgruppe des Normalisators  $\mathfrak{N}_R$  von  $R$ . Die von dem Komplex  $\mathfrak{C} = R\mathfrak{P}$  erzeugte Untergruppe  $(R) \times \mathfrak{P}$  werde mit  $\mathfrak{H}$  bezeichnet. Der  $p$ -adische Charakterring  $\Psi_p$  von  $\mathfrak{H}$  ist folglich das direkte Produkt des  $p$ -adischen Charakterringes  $\Lambda_p$  von  $(R)$  mit dem  $p$ -adischen Charakterring  $\Pi_p$  von  $\mathfrak{P}$ . Dabei werden  $\Lambda_p$  und  $\Pi_p$  in natürlicher Weise als Funktionerringe auf  $\mathfrak{H}$  aufgefaßt.  $\mathfrak{C}$  erweist sich als  $p$ -Oberklasse von  $\mathfrak{H}$ . Daher gehört zu  $\mathfrak{C}$  ein Block  $E$  von  $\Psi_p$ . Der Block  $E$  wird als ein Elementarblock für  $B$  und  $\mathfrak{H}$  als eine elementare Untergruppe für  $B$  bezeichnet. Den Kern der weiteren Strukturuntersuchung von  $B$  bildet der Satz: Die Funktionen von  $B$  bestehen aus den Induzierten der Funktionen von  $E$ , also  $B = E^*$ . Die Struktur von  $B$  wird nun durch folgende Feststellungen beschrieben:  $\Pi_p$  ist zu  $E$  isomorph.  $B$  ist zu einem Teilring  $T$  von  $\Pi_p$  isomorph.  $T$  besteht aus allen denjenigen Funktionen aus  $\Pi_p$ , deren Werte nur von der Klasse in  $\mathfrak{N}_R$  des Arguments abhängen. Die isomorphe Abbildung von  $B$  auf  $T$  erhält man dadurch, daß man jeder Funktion  $\xi$  aus  $B$  diejenige eindeutig bestimmte Funktion aus  $\Pi_p$  zuordnet, die auf  $\mathfrak{C}$  mit  $\xi$  übereinstimmt. — Durch die vorstehenden Sätze werden Strukturaussagen über die Blöcke, also Aussagen über  $\mathfrak{G}$ , zurückgeführt auf Aussagen über gewisse  $p$ -Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  und ihre Einbettung in die  $\mathfrak{N}_R$ . In den Anwendungen spielen derartige gruppentheoretische Induktionsverfahren die Hauptrolle. Demgemäß gestaltet Verf. die obigen Resultate zu einem Induktionsprinzip aus, das zwar weniger scharf, aber für die Anwendungen handlicher ist. Dieses Prinzip wird gleich „im Großen“ formuliert, bezieht sich also auf den Charakterring  $X$  von  $\mathfrak{G}$  mit ganzen rationalen Koeffizienten. Eine Untergruppe  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{G}$  heißt elementar, wenn es eine Primzahl  $p$  gibt, so daß sich  $\mathfrak{U}$  als direktes Produkt einer  $p$ -regulären zyklischen Gruppe mit einer  $p$ -Gruppe schreiben läßt. Der Charakterring  $\Omega$  von  $\mathfrak{U}$  mit ganzen rationalen Koeffizienten heißt ein elementarer Untergruppencharakterring. Es läßt sich zeigen, daß  $X$  die (nichtdirekte) Summe der Induzierten  $\Omega^*$  aller elementaren Untergruppencharakterringe  $\Omega$  von  $\mathfrak{G}$  ist. Dieser Satz ergibt das folgende Induktionsprinzip: Besitzen die elementaren Untergruppencharaktere von  $\mathfrak{G}$  eine Eigenschaft, welche sowohl beim Induktionsprozeß als auch bei linearer Zusammensetzung erhalten bleibt, so besitzen alle Charaktere von  $\mathfrak{G}$  diese Eigenschaft. Schließlich wird gezeigt, daß dieses Induktionsprinzip sogar gültig bleibt, wenn man statt der elementaren Untergruppencharaktere nur die zyklischen Untergruppencharaktere nimmt. — Als Anwendung des Induktionsprinzips werden zwei Sätze, deren ursprüngliche Beweise man R. Brauer verdankt, aufs neue und wesentlich einfacher bewiesen: 1. Zu jeder Darstellung einer endlichen Gruppe vom Exponenten  $g_0$  gibt es eine äquivalente Darstellung im Körper der  $g_0$ -ten Einheitswurzeln. 2. Die Artinschen  $L$ -Funktionen einer galoisschen Zahlkörpererweiterung sind meromorph.

R. Kochendörffer.

Nielsen, Jacob: Einige grundlegende Begriffe bezüglich diskontinuierlicher Gruppen von linearen Substitutionen in einer komplexen Veränderlichen. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 61—70 (1952) [Dänisch].

Es wird ein „systematischer Begriffsaufbau“ für die Theorie der diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen skizziert. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie (in systematischer Gestalt) veröffentlichen demnächst Verf. und W. Fenchel in Band 1 einer Monographie der Princeton University Press.

W. Maak.

Comét, Stig: Conformal mapping and group automorphisms. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 122—129 (1952).

Durch  $n$  reelle Funktionen  $y_i$  der  $n$  reellen Veränderlichen  $x_k$  werde der  $x$ -Raum abgebildet,  $Y$  sei die „Jacobische Funktionalmatrix“,  $dx$  und  $dy$  seien die mit den Differentialen  $dx_k$  und  $dy_i$  gebildeten Spaltenvektoren, also  $dy = Y dx$ . Durch Striche seien die transponierten Matrizen bezeichnet. Damit die Abbildung konform ist, müssen die infinitesimalen Längen in einem Punkt proportional bleiben, also  $dy' dy = \lambda^2 dx' dx$ , mit nur von den  $x_k$ , nicht aber von  $dx$  abhängigem  $\lambda$ . Daraus folgt (1)  $Y' Y = \lambda^2 E$  ( $E$  die Einheitsmatrix);  $\lambda^{-1} Y$  muß also orthogonal sein. Verf. ersetzt diese Bedingung durch folgende, wie er zeigt gleichwertige: (2) Zu jeder orthogonalen Matrix  $A$  gibt es eine nur von  $A$  und den  $x_k$  abhängige orthogonale Matrix  $B$ , so daß  $B(Y dx) = Y(A dx)$  ist;  $Y$  ist also ein Automorphismus der orthogonalen Gruppe. Beschränkt man in Forderung (2)  $A$  auf eine Untergruppe  $\mathfrak{H}$  der orthogonalen Gruppe, so sind die Abbildungen  $Y$  nicht mehr konform, haben aber doch noch etwas „Konformes“ an sich. Statt (1) findet Verf. die Bedingung  $Y' Y = M$ , worin  $M$  die allgemeine symmetrische, mit allen  $A \in \mathfrak{H}$  vertauschbare Matrix ist, deren Bestimmung ein rein algebraisches Problem ist. Für einige spezielle Untergruppen wird  $M$  und damit auch der Charakter der Funktionen  $y_i$  bestimmt. — Man kann nun die Frage nach Abbildungen stellen, die (2) erfüllen, wenn  $A$  und  $B$  einer andern als der orthogonalen Gruppe angehören. Verf. wählt als Beispiel die symplek-

tische Gruppe. Ist  $n$  gerade und  $S$  die Matrix, in der über der Hauptdiagonale abwechselnd 1 und 0, unter der Hauptdiagonale abwechselnd  $-1$  und 0 und sonst überall 0 steht, so ergibt sich als Bedingung für  $Y$  (3)  $Y' S Y = \lambda S$  mit einem Skalar  $\lambda$ . Für  $n = 2$  ist (3) durch jedes  $Y$  erfüllt, für  $n > 2$  zeigt Verf., daß  $\lambda$  und daher auch  $\det Y$  konstant sein muß. (3) beinhaltet partielle Differentialgleichungen für die  $y_i$ , die so geordnet werden können, daß für  $y_i$   $i - 1$  partielle Differentialgleichungen bestehen, in deren Koeffizienten  $y_1, \dots, y_{i-1}$  eingehen.

G. Lochs.

**Dynkin, E. B.: Der Zusammenhang zwischen den Homologien einer kompakten Lieschen Gruppe und ihrer Untergruppen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 333—336 (1952) [Russisch].

Es seien  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}^*$  zwei kompakte Liesche Gruppen und  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{G}$  in  $\mathfrak{G}^*$ . Untersucht werden die  $\varphi$  entsprechenden Homomorphismen der Bettischen Gruppen von  $\mathfrak{G}$  in die von  $\mathfrak{G}^*$ . Es wird (ohne Beweis) eine Anzahl von Sätzen mitgeteilt, wonach, falls  $\mathfrak{G}$  eine halbeinfache kompakte Gruppe,  $\mathfrak{G}^*$  eine der klassischen Gruppen ist, der Homomorphismus  $\varphi$ , eindeutig bis auf einen Automorphismus von  $\mathfrak{G}^*$ , durch die Homologie-Charakteristiken bestimmt ist. Falls  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}^*$  beides klassische Gruppen sind, ergeben sich Formeln, welche die Homologie-Charakteristiken durch das System der Gewichte der entsprechenden linearen Darstellungen ausdrücken. Es wird auf Anwendungen auf das im Titel genannte Problem, Anwendungen in der Theorie der homogenen Räume, sowie auf das Problem der Verteilung der kompakten, nicht null-homogenen Lieschen Untergruppen hingewiesen. — Grundlage für die Methode der Untersuchung bildet die Pontrjaginsche Konstruktion (dies. Zbl. 22, 316) einer Auswahl von Zyklen in den klassischen Gruppen, aus denen alle Zyklen vermittels einer Addition und einer Multiplikation erzeugt werden können, sowie der Satz, daß in den klassischen Gruppen die Pontrjaginschen Auswahlen von „primitiven“ Zyklen  $y_\nu$  (d. i.  $\int_{y_\nu} \omega' \omega'' = 0$  für zwei beliebige abgeschlossene Differentialformen  $\omega', \omega''$  positiven Grades) kanonisch sind, d. h. daß alle primitiven Zyklen einer ganzzahligen Linearkombination der  $y_\nu$  homolog sind.

H. Schwerdtfeger.

**Cockcroft, W. H.: On the homomorphisms of sequences.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 521—532 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit einem komplizierten algebraischen Sachverhalt, dem sich die Homotopietheorie der von J. C. H. Whitehead (dies. Zbl. 40, 388) behandelten sogenannten C.W.-Komplexe äquivalent erweist. —  $G, A, U, Q$  seien Gruppen,  $G$  abelsch,  $U$  frei und Operatorenbereich von  $A$ ,  $A$  nicht notwendig abelsch, additiv verknüpft.  $S$  sei eine verschränkte Folge (crossed sequence) dieser Gruppen:  $S: G \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{d} U \xrightarrow{\mu} Q$ , d. h. es seien Homomorphismen  $\lambda, d, \mu$  von  $G$  in  $A$  bzw. von  $A$  in  $U$  bzw. von  $U$  auf  $Q$  gegeben, so daß  $\lambda$  Isomorphismus,  $\lambda G = d^{-1}(1)$ ,  $dA = \mu^{-1}(1)$  ist, und für die Operatoren aus  $U$  gilt:  $d(ua) = u(da)u^{-1}$ ,  $(a, b \in A, u \in U)$ ;  $a + b - a = (da)b$ . Offenbar induziert  $S$  dann  $Q$  als Operatorenbereich von  $G$ . Ist  $S'$  ebenfalls eine verschränkte Folge  $S' = G' \xrightarrow{\lambda'} A' \xrightarrow{d'} U' \xrightarrow{\mu'} Q'$  und sind  $\alpha, f$  Homomorphismen von  $A$  auf  $A'$  bzw. von  $U$  auf  $U'$  mit  $\alpha(ua) = (fu)(\alpha a)$ ,  $(u \in U, a \in A)$ ;  $d'\alpha = f d$ , so wird das Paar  $(\alpha, f)$  ein Homomorphismus von  $S$  auf  $S'$  genannt.  $(\alpha, f)$  induziert Homomorphismen  $\Phi_{(\alpha, f)}, \Psi_{(\alpha, f)}$  von  $G$  auf  $G'$  bzw. von  $Q$  auf  $Q'$  und induziert ferner  $Q'$  als Operatorenbereich von  $G$ . Zwei Homomorphismen  $(\alpha, f), (\alpha, \bar{f})$  von  $S$  auf  $S'$  heißen homotop, wenn ein verschränkter (crossed) Homomorphismus  $\eta$  von  $U$  auf  $A'$  existiert mit

$$\begin{aligned} \eta(u_1 u_2) &= \eta u_1 + (f u_1) \eta u_2, & (u, u_1, u_2 \in U) \\ (\bar{f} u) (f u)^{-1} &= d' \eta u, \\ \alpha - \alpha &= \eta d. \end{aligned}$$

Bei festen  $S, S'$  bildet diese Relation die Homotopieklassen von Homomorphismen.  $S$  und  $S'$  heißen vom gleichen Homotopietypus, wenn Homomorphismen  $(\alpha, f)$  von  $S$  auf  $S'$  und  $(\alpha^*, f^*)$  von  $S'$  auf  $S$  existieren, so daß  $(\alpha \alpha^*, f f^*) = (1, 1)$  ist, 1 = identische Abbildung. Ergebnisse: Zwei Homomorphismen  $(\alpha, f), (\alpha, \bar{f})$  sind nur dann homotop, wenn  $\Phi_{(\alpha, f)} = \Phi_{(\bar{\alpha}, \bar{f})}$  und  $\Psi_{(\alpha, f)} = \Psi_{(\bar{\alpha}, \bar{f})}$  ist. Bei festen  $\Phi$  und  $\Psi$  entsprechen die Homotopieklassen, für deren Homomorphismen  $(\alpha, f)$   $\Phi_{(\alpha, f)} = \Phi$  und  $\Psi_{(\alpha, f)} = \Psi$  gilt, eineindeutig den Elementen der 2-Kohomologiegruppe  $H^2(Q, G)$  (siehe S. Eilenberg und S. MacLane, dies. Zbl. 29, 340). — Ist  $S = S'$ , so bilden die Homotopieklassen, deren Homomorphismen identische Abbildungen  $\Phi_{(\alpha, f)}$  und  $\Psi_{(\alpha, f)}$



induzieren, eine Gruppe, die isomorph zu  $H^2(Q, G)$  ist. —  $S$  und  $S'$  sind vom gleichen Homotopietypus, wenn ein Homomorphismus  $(\alpha, f)$  von  $S$  auf  $S'$  existiert, für den  $\Phi_{(\alpha, f)}$  und  $\Psi_{(\alpha, f)}$  Isomorphismen sind. W. Gaschütz.

**Gelbaum, B. R. and G. K. Kalisch:** Measure in semigroups. Canadian J. Math. 4, 396—406 (1952).

Let  $S$  be a semi-group in which the two-sided cancellation law holds. Let  $\mathfrak{R}_1$  be a left-invariant ring of subsets of  $S$  and let  $m_1$  be a left-invariant measure defined on  $\mathfrak{R}_1$  (all measure- and set-theoretic terminology as in Halmos, Measure theory, New York 1950; this Zbl. 40, 168). Let the transformation  $\theta$  of  $S \times S$  into itself be defined by  $\theta(x, y) = (x, xy)$ . Let  $\bar{m}_1$  be the (unique) extension of  $m_1$  over the  $\sigma$ -ring  $\mathfrak{R}_1$  generated by  $\mathfrak{R}_1$ . Consider the following conditions on  $S$ ,  $m_1$ , and  $\mathfrak{R}_1$ . I.  $A, B \in \mathfrak{R}_1$  imply  $\theta(A, B)$  is  $\bar{m}_2$ -measurable,  $\bar{m}_2$  being the completion of the product measure  $\bar{m}_1 \times \bar{m}_1$ . II.  $\sup_{A \in \mathfrak{R}_1} m_1(A) = 1$ . III.  $S$  is a locally compact  $T_1$ -space,

the mapping  $(x, y) \rightarrow xy$  is continuous,  $\mathfrak{R}_1$  is the ring generated by the compact subsets of  $S$ , and  $m_1$  is regular on  $\mathfrak{R}_1$ . IV.  $x \in S$ ,  $A \in \mathfrak{R}_1$ , and  $xA \in \mathfrak{R}_1$  imply  $A \in \mathfrak{R}_1$ . The following theorems are proved. 1. If conditions I and II obtain and if  $m_1$  and  $\mathfrak{R}_1$  are as stated, then  $S$  is a group. 2. If conditions II and III obtain and if  $m_1$  and  $\mathfrak{R}_1$  are as stated, then  $S$  is a group. 3. If  $S$  is Abelian, if conditions II and III hold, and if  $m_1$  and  $\mathfrak{R}_1$  are as stated, then  $S$  has a 1 — 1-continuous image which is a compact Hausdorff group and in which Haar measure is identical with  $\bar{m}_1$ . 4. If conditions I, II, and III obtain and if  $m_1, \mathfrak{R}_1$  are as stated, then the conclusion of Theorem 3 holds. 5. If  $S$  is Abelian, if condition IV holds, and if  $m_1$  and  $\mathfrak{R}_1$  are as stated, then there is a translation-invariant measure in the quotient group  $Q(S)$  of  $S$  which agrees with  $m_1$  on  $S$ , regarded as a subset of  $Q(S)$  (see R. Gelbaum, G. K. Kalisch, and J. M. H. Olmsted; this Zbl. 45, 8).

E. Hewitt.

## **Verbände. Ringe. Körper:**

**Buchi, J. Richard:** Representation of complete lattices by sets. Portugaliae Math. 11, 151—167 (1952).

Die Sätze über die Darstellung vollständiger Verbände durch Mengenverbände werden mittels folgender Begriffsbildung verallgemeinert:  $L$  sei eine Klasse von Mengen  $a, b, c, \dots$  mit einer größten Menge  $e$ .  $\mathfrak{R}$  sei eine Klasse von Subklassen  $(a_v)$  von  $L$ ; wichtig sind u. a.  $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}$ , die Klasse der aus einem Element bestehenden und  $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}$ , die Klasse aller Subklassen von  $L$ . Ist  $L$  abgeschlossen bezüglich  $\cap$  (Durchschnittsmenge), so ist  $L$  ein vollständiger Verband; wenn für jede zu  $\mathfrak{R}$  gehörige Subklasse  $(a_v)$  von  $L$  die Vereinigungsmenge  $\bigvee a_v$  zu  $L$  gehört, heißt  $L$  ein  $\mathfrak{R}$ -Mengen-Verband ( $\mathfrak{R}$ -set-lattice). Gefragt wird nach der Darstellbarkeit eines vollständigen Verbandes als  $\mathfrak{R}$ -Mengen-Verband. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß die  $\mathfrak{R}$ -subirreduziblen Elemente eine  $\cup$ -Basis bilden. ( $u$  heißt  $\mathfrak{R}$ -subirreduzibel, wenn für jede zu  $\mathfrak{R}$  gehörige Klasse  $(a_v)$  aus  $u \in \bigcup a_v$  folgt: es gibt ein  $a_v$ , für welches  $u \in a_v$ . Eine Teilmenge  $B$  von  $L$  heißt  $\cup$ -Basis, wenn jedes  $a$  aus  $L$  sich als  $a = \bigcup u_v, u_v \in B$ , darstellen läßt.) Verf. untersucht Abschwächungen dieser Bedingungen, und im Zusammenhang damit die Rolle des distributiven Gesetzes. Er gewinnt eine Übersicht über alle möglichen Darstellungen und untersucht die Ökonomie der Darstellungen.

H. Gericke.

**Bergmann, Gustav:** Multiplicative closures. Portugaliae Math. 11, 169—172 (1952).

In einem Verband  $L$  heiße eine Abbildung  $f$  ein mc-Operator (multiplicative closure), wenn (1)  $x \leq fx$ , (2)  $ffx = fx$ , (3)  $f(x \cap y) = fx \cap fy$ . Aus (3) folgt: wenn  $x \leq y$ , so ist  $fx \leq fy$ ;  $f$  ist also ein Hüllenoperator. Jedem mc-Operator läßt sich eine Kongruenzrelation zuordnen, nämlich  $x \equiv y$ , wenn  $fx = fy$ . Besitzt in  $L$  jede nicht-leere Teilmenge ein maximales Element, so läßt sich auch jeder Kongruenzrelation ein mc-Operator zuordnen, nämlich:  $fx$  sei das maximale Element der zu  $x$  kongruenten Elemente. Hat  $L$  ein Nullelement und ist jedes Intervall  $(0, x)$  komplementär, so hat jeder mc-Operator die Form  $fx = x \cup f0$ .

H. Gericke.

**Löwig, Henry:** On transitive Boolean relations. Czechosl. math. J. 1 (76), 199—201 (1952).

In einer Booleschen Algebra sei die Relation  $x R y$  durch  $axxy + bxy' + cx'y + dx'y' = 0$  definiert.  $R$  ist reflexiv, wenn  $a = d = 0$ , und dann (aber nicht nur dann) auch transitiv. Die Zusatzbedingung  $b = c$  kennzeichnet  $R$  als symmetrisch, also als Äquivalenzrelation,  $b + c = 1$  als antisymmetrisch, also als Teilordnung,  $b = c'$  als Verbandsordnung.

H. Gericke.

**Iséki, Kiyoshi:** A criterion for distributive lattices. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 241—242 (1952).

Verf. beweist unter Berufung auf eine Note des Ref. (dies. Zbl. 40, 301) von neuem seinen Satz (dies. Zbl. 36, 18), daß ein Verband genau dann distributiv ist, wenn alle seine durchschnitts-irreduziblen Ideale  $I$  prim sind (d. h. aus  $x \cap y \in I$  entweder  $x \in I$  oder  $y \in I$  folgt).  
L. Fuchs.

**Luce, R. Duncan:** A note on Boolean matrix theory. Proc. Amer. math. Soc. 3, 382—388 (1952).

L'A. étudie quelques aspects de la théorie de l'algèbre  $V$  des matrices de Boole d'ordre  $n$ .  $V$  est un treillis de Boole multiplicatif avec élément nul  $O$ , élément unité  $I$ , et élément universel  $E$ . Une matrice  $A \in V$  est symétrique si elle est égale à sa transposée ( $A = A^T$ ); elle est symétrique gauche si  $A \cap A^T = O$ . En vertu de ces définitions, toute matrice de Boole est d'une façon unique l'union de deux matrices disjointes, l'une symétrique et l'autre symétrique gauche. —  $A$  est consistante à gauche (à droite) si l'on a  $AE = E$  ( $EA = E$ ); pour que  $A$  soit consistante à gauche (à droite), il faut et il suffit que  $I < AA^T$  ( $I < A^T A$ ); l'ensemble des matrices consistantes à gauche forme un sous demi-groupe  $C$  de  $V$  consistant à gauche (c. à. d.  $AB \in C \Rightarrow A \in C$ ). — Cette notion se révèle utile dans l'étude des matrices orthogonales:  $A$  est orthogonale si  $A^{-1}$  existe et est égale à  $A^T$ ; l'A. retrouve alors un théorème dû à J. H. Wedderburn: pour que  $A$  soit orthogonale il faut et il suffit que  $A^{-1}$  existe. — Enfin le treillis  $V$  est résidué: on a  $B \cdot A = (B' A^T)'$  et  $B:A = (A^T B')'$ , en désignant par  $X'$  le complément de  $X$ . Ce résultat donne dans certains cas des solutions de l'équation linéaire matricielle  $XA = B$ .  
L. Lesieur.

**Carruth, Philip W.:** Products of ordered systems. Proc. Amer. math. Soc. 3, 983—987 (1952).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 44, 20) werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein geordnetes Produkt geordneter Systeme die Kettenbedingungen erfüllt, sowie dafür, daß ein geordnetes Produkt von Verbänden ein Verband ist. Ferner wird gezeigt, daß ein geordnetes Produkt geordneter Systeme genau dann ein komplementärer, ein relativ-komplementärer oder ein Boolescher Verband ist, wenn es sich um ein Kardinalprodukt handelt und alle Faktoren komplementäre, relativ-komplementäre bzw. Boolesche Verbände sind.  
G. Pickert.

**Thrall, R. M.:** On a Galois connection between algebras of linear transformations and lattices of subspaces of a vector space. Canadian J. Math. 4, 227—239 (1952).

$V$  sei ein Vektorraum endlicher Dimension über einem Schiefkörper  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{N}$  der Verband der Unterräume von  $V$  und  $\mathfrak{T}$  der Endomorphismenring von  $V$ . Zu jedem  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}$  gibt es ein  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$ , bestehend aus den gegen alle Endomorphismen von  $\mathfrak{A}$  invarianten Unterräumen von  $V$ . Es wird nach den für diese Galois-Relation abgeschlossenen Unterverbänden  $\mathfrak{A}^*$  und Unterringen  $\mathfrak{A}^{++}$  gefragt. Die Untersuchung ergibt zwei notwendige Bedingungen der Abgeschlossenheit. 1.  $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}^*$  muß auch projektiv abgeschlossen sein, d. h. es enthält alle zu den in  $\mathfrak{L}$  vorkommenden projektiv verwandten (projectively related) Unterräume. 2. Es sei  $\mathfrak{K}$  ein Körper.  $\mathfrak{A}$  ein Unterring von  $\mathfrak{T}$  mit Einheitselement und im Verband der Unterringe von  $\mathfrak{A}$  habe das Radikal ein (halbeinfaches) Komplement; dann muß  $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}^*$  „relativ einbettbar“ sein; d. h. es muß einen komplementierten Unterverband  $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{L}$  von  $\mathfrak{N}$  geben, der dieselben projektiven Struktureigenschaften wie  $\mathfrak{L}$  hat. An einem Beispiel wird gezeigt, daß nicht jedes  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$  relativ einbettbar ist. Wenn  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$  distributiv ist, so ist es abgeschlossen. Die Frage nach weiteren Zusammenhängen zwischen Galois-Abgeschlossenheit, projektiver Abgeschlossenheit und relativer Einbettbarkeit wird aufgeworfen.  
F. W. Levi.



Kelly, L. M.: The geometry of normed lattices. Duke math. J. 19, 661—669 (1952).

Ein (notwendigerweise modularer) Verband  $L$  werde dadurch „normiert“, daß man jedem  $x \in L$  eine (nicht notwendig positive) Zahl  $|x|$  so zuteilt, daß aus  $x \supset y$  folgt  $|x| \geq |y|$  und  $|x| + |y| = |x \cup y| + |x \cap y|$  gilt. Dann entsteht aus  $L$  ein metrischer Raum  $D(L)$  mit der Distanzfunktion  $d(x, y) = |x \cup y| - |x \cap y|$ . Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein metrischer Raum ein  $D(L)$  ist. Dabei wird — in Verallgemeinerung von Sätzen von Glivenko — nicht verlangt, daß  $L$  ein niedrigstes Element enthält. Weiterhin werden Systeme  $K$  behandelt, in denen eine ternäre Zwischenrelation  $R$  besteht, und es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß  $K$  unter Aufrechterhaltung von  $R$  ein modularer Verband wird. Der letzte Abschnitt behandelt die Aufgabe, aus  $D(L)$  rückwärts  $L$  zu rekonstruieren. Hierbei spielt die aus der Gleichung  $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$  abgeleitete Zwischenrelation eine wichtigere Rolle als die Metrik selbst.

F. W. Levi.

Aubert, K. E.: Lattice-theoretic aspects of abstract ideal theory. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 243—254 (1952).

Es wird über verbandstheoretische Formulierungen der Noetherschen und Krullschen Idealtheorie berichtet. In einem vollständigen Verband mit einer als Multiplikation geschriebenen kommutativen, assoziativen und bez. der Vereinigungsbildung  $\cup$  unbeschränkt distributiven Verknüpfung (commutative residuated lattice, im folgenden kurz als multiplikativer Verband bezeichnet) wird — um multiplikative Abschließungseigenschaften ausdrücken zu können — das Element  $a$  als Ideal-Element bezeichnet, wenn  $a x \subseteq a$  für alle  $x$  gilt. Um auch additive Abschließungseigenschaften ausdrücken zu können, werden solche multiplikativen Verbände eingeführt, in denen noch eine weitere, als Subtraktion geschriebene Verknüpfung mit  $a(b - c) \subseteq a b - a c$ ,  $a - (b \cup c) = (a - b) \cup (a - c)$ ,  $(a \cup b) - c = (a - c) \cup (b - c)$  und ein Element  $0$  mit  $a - 0 = a$ ,  $a 0 = 0$ ,  $0 \subseteq a - a$  gegeben sind. Von der durch  $a + b = a - (0 - b)$  erklärten Addition wird Assoziativität und Kommutativität verlangt. Die weitere Forderung  $0 - (a - b) = a + b$  scheint einen Druckfehler zu enthalten: denn aus ihr würde ja  $0 - a = a$  und damit  $a - b = a + b$  folgen. Für die Krullsche Theorie der Ringe ohne Endlichkeitsbedingung werden multiplikative Boolesche Verbände betrachtet, welche — mit  $n$  als dem kleinsten Element — die Bedingungen erfüllen: Aus  $a, b \supset n$  folgt  $a b \supset n$ ; zu  $a, b, c$  mit  $a, b, a b \cap c \supset n$  gibt es  $a', b'$  mit  $n \subset a' \subseteq a$ ,  $n \subset b' \subseteq b$ ,  $a' b' \subseteq c$ . Das Element  $a$  heißt multiplikativ abgeschlossen, wenn  $a a \subseteq a$  gilt.

G. Pickert.

Almeida Costa, A.: Drei Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Ringe. Anais Fac. Ci. Porto 36, 65—83 (1952) [Portugiesisch].

The first of the three expository lectures announced in the title. G. Ancochea.

Curtis, Charles W.: A note on noncommutative polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 3, 965—969 (1952).

Ein Integritätsbereich  $R$  (assoziativer Schieftring mit Einselement ohne Nullteiler) habe die Eigenschaft  $(M)$ , daß zwei von Null verschiedene Elemente in ihm ein gemeinsames Rechtvielfaches besitzen. O. Ore (dies. Zbl. 1, 266) hat gezeigt, daß aus  $(M)$  die Existenz eines eindeutig bestimmten Rechts-Quotientenschiefkörpers für  $R$  folgt. — In der vorliegenden Arbeit beweist Verf., daß sich die Eigenschaft  $(M)$  von  $R$  auf gewisse Ringerweiterungen überträgt, die als Polynombereiche über  $R$  aufgefaßt werden können. Als Anwendung wird für Algebren  $A$ , die im Zusammenhang mit den Darstellungen von Lie-Algebren auftreten (siehe G. Birkhoff, dies. Zbl. 16, 244 und E. Witt, dies. Zbl. 16, 244), die Existenz von eindeutig bestimmten Quotientenschieftringen über  $A$  nachgewiesen, wenn die zugrunde liegende Lie-Algebra auflösbar ist.

W. Gaschütz.

**Ikeda, Masatoshi:** A characterization of quasi-Frobenius rings. Osaka math. J. 4, 203—209 (1952).

It is shown that a ring  $A$  with unit element and satisfying minimum condition is a quasi-Frobenius ring (Nakayama, this Zbl. 26, 58) if and only if it satisfies the following condition proposed by Shoda [Proc. Japan. Acad. 28, 241—242 (1952)]: any  $A$ -homomorphism  $\theta$  between two left-ideals of  $A$  should be extended to an  $A$ -left-endomorphism of  $A$ , or, equivalently:  $\theta$  should be given by the multiplication of an element of  $A$ . If  $A$  is a quasi-Frobenius ring and  $\theta$  is an isomorphism between two left-ideals of  $A$ ,  $\theta$  can be extended to an  $A$ -left-automorphism of  $A$ . Certain stronger versions of the above condition, which take into consideration residue-modules of left-ideals, are shown to characterize semi-simple rings and rings, which are directly decomposed into a semi-simple ring and a completely primary uni-serial ring.

*T. Nakayama.*

**Nollet, Louis:** Construction des anneaux dont tout sous-anneau est un idéal. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 632—636 (1952).

Verf. gibt eine Übersicht über alle jene Ringe, in denen jeder Unterring ein (Links- bzw. Rechts-)Ideal ist. Es wird gezeigt, daß sich jeder Ring mit der erwähnten Eigenschaft in einen Ring mit derselben Eigenschaft einbetten läßt, der auch ein idempotentes, die Null von links nicht teilendes Element besitzt. Hauptresultat: die letzteren Ringe können folgendermaßen angegeben werden: Es bezeichne  $J$  den Ring der ganzen rationalen Zahlen oder seinen Restklassenring modulo irgendeiner ganzen Zahl  $q$ , ferner sei  $G$  eine additive Abelsche Gruppe von der Charakteristik  $q/t$  (falls  $q \neq 0$  ist); dann ist  $R$  isomorph dem Ringe aller Paare  $(j, g)$  ( $j \in J$ ,  $g \in G$ ) mit den Verknüpfungen:  $(j, g) + (j', g') = (j + j', g + g')$ ,  $(j, g) \cdot (j', g') = (jj', jg')$ . — Es sei bemerkt, daß sich L. Rédei kürzlich mit demselben Problem beschäftigt und alle Ringe (nicht nur die letzterwähnten) explizit gegeben hat; s. Vollidealringe im weiteren Sinn, Teil I u. II in den Acta math. Acad. Sci. Hung. [Vgl. auch Rédei, Monatsh. Math. 56, 89—95 (1952)]. *L. Fuchs.*

**Kaplansky, Irving:** Locally compact rings. III. Amer. J. Math. 74, 929—935 (1952).

Part II voir Amer. J. Math. 73, 20—24 (1951). Un anneau primitif localement compact non discret de caractéristique 0 est une algèbre de dimension finie sur son centre. Même conclusion pour un anneau simple localement compact et non discret possédant des idéaux minimaux. Un théorème de l'A. sur les anneaux semi-simples localement compacts bornés est généralisé. *J. Dixmier.*

**Zemmer jr., Joseph L.:** On the subalgebras of finite division algebras. Canadian J. Math. 4, 491—503 (1952).

Das Problem, alle nicht-assoziativen Divisionsringe mit endlich vielen Elementen aufzustellen, ist noch nicht gelöst. In dieser Arbeit untersucht Verf. zunächst endliche, kommutative, nicht-assoziative Divisionsalgebren mit Einselement über einem Galoisfeld  $F = GF(p^k)$ ,  $p > 2$ . Er beweist, daß jede solche Algebra von gerader Ordnung eine einzige Teilalgebra der Ordnung 2 enthält und daß sie im Falle der Ordnung 4 eine Basis  $1, f, f^2, f^3$  mit  $(f^2)^2 = \alpha + \beta f^2$ ,  $\alpha, \beta \in F$ , besitzt. Durch eine von Dickson herrührende Methode zeigt er ferner die Existenz der oben genannten Algebren gerader Ordnung. Dann studiert er einige Eigenschaften einer nicht-assoziativen Divisionsalgebra der Ordnung  $n$  über  $F$ , deren Automorphismengruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  enthält.

*K. Asano.*

**Kasch, Friedrich:** Zur Erzeugung separabler Algebren. Norsk mat. Tidsskr. 34, 97—99 (1952).

Unter einer separablen Algebra  $A/F$  versteht man eine halbeinfache Algebra  $A$  endlichen Ranges über einem kommutativen Körper  $F$  mit unendlich vielen Elementen, bei der das Zentrum eines jeden ihrer einfachen Summanden separabel über  $F$  ist. Verf. beweist folgenden Satz: Jede separable Algebra  $A/F$  besitzt zwei



bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierte erzeugende Elemente über  $F$ . Es genügt nach A. A. Albert [Two element generation of a separable algebra, Bull. Amer. math. Soc. 50, 786—788 (1944)] den Satz nur in dem Fall zu beweisen, wo  $A$  über  $F$  einfach ist. Die einfache Algebra  $A/F$  ist bekanntlich ein direktes Produkt aus einem Schiefkörper  $K$  mit dem Zentrum  $Z$  und einem vollen Matrizenring  $M$  vom Grade  $m$  über  $Z$ . Wie Verf. bereits bewiesen hat (dies. Zbl. 44, 266), besitzt  $K$  ein separables Element  $a$  über  $Z$ , welches mit seinem Konjugierten zusammen den Körper  $K/Z$  erzeugt. Da  $Z$  über  $F$  separabel ist, kann man von vornherein annehmen, daß  $F(a)$  ein separabler, maximaler Teilkörper von  $K/Z$  ist. Für die Diagonalmatrixeinheiten  $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{mm}$  von  $M$  bilde man die Algebra  $R = F(a)e_{11} + \dots + F(a)e_{mm}$ . Berücksichtigt man dabei, daß  $F$  unendlich viele Elemente besitzt, so kann man zeigen, daß  $R$  über  $F$  ein erzeugendes Element  $\alpha$  besitzt. Verf. konstruiert ein reguläres Element  $\tau$  aus  $A$  von der Art, daß  $\tau R \tau^{-1}$  und  $R$  die Algebra  $A/F$  erzeugen; d. h.  $A$  ist identisch mit  $F(\alpha, \tau \alpha \tau^{-1})$ . *M. Moriya.*

**Kurepa, Gjuro:** Rational numbers as ordered triplets of natural integers. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 7, 133—138 und kroatische Zusammenfassg. 139 (1952).

Für beliebige Tripel  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$  der natürlichen Zahlen wird gesetzt: 1.  $\alpha = \beta$ , wenn  $a_1 b_3 + a_3 b_2 = a_3 b_1 + a_2 b_3$ , 2.  $\alpha < \beta$ , wenn  $a_1 b_3 + a_3 b_2 < a_3 b_1 + a_2 b_3$ , 3.  $\alpha + \beta = (a_1 b_3 + a_3 b_1, a_2 b_3 + a_3 b_2, a_3 b_3)$ , 4.  $\alpha \beta = (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_3 b_3)$ . Dann beweist Verf., daß das System aller Tripel der natürlichen Zahlen einen mit dem rationalen Zahlkörper isomorphen geordneten Körper ausmacht. Die Zuordnung ist dabei  $\alpha \rightarrow (a_1 - a_2)/a_3$ . *S. Kuroda.*

**Lewis, D. J.:** Cubic homogeneous polynomials over  $p$ -adic number fields. Ann. of Math., II. Ser. 56, 473—478 (1952).

Der Körper  $K$  sei vollständig in bezug auf eine diskrete nichtarchimedische Bewertung mit endlichem Restklassenkörper. Dann hat jede Gleichung  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , wo  $f$  ein homogenes Polynom dritten Grades mit Koeffizienten aus  $K$  ist, eine nichttriviale Lösung in  $K$ , wenn  $n > 9$  ist. Wenn  $f$  ein Polynom  $r$ -ten Grades ist, so wird seit längerer Zeit vermutet, daß  $n > r^2$  zur Lösbarkeit ausreicht. Der Fall  $r = 2$  wurde von Hasse erledigt. Im vorliegenden Falle  $r = 3$  wurde die Lösbarkeit schon von Demjanov (dies. Zbl. 37, 310) bewiesen, allerdings unter der Einschränkung, daß die Charakteristik des Restklassenkörpers der Bewertung  $\neq 3$  ist. Der Beweis des Verf. — der von dem Beweis von Demjanov unabhängig gefunden wurde und von diesem abweicht — setzt diese Einschränkung nicht voraus.

*K. Prachar.*

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

**Cohn, Harvey:** Note on fields of small discriminant. Proc. Amer. math. Soc. 3, 713—714 (1952).

Es sei  $d_n$  der minimale Diskriminantenbetrag im Bereich der total-reellen algebraischen Zahlkörper vom Grade  $n$ . In seinen Vorlesungen Geometry of numbers (New York University, mimeographed lecture notes, 1946, IX, 14) hat Siegel die Vermutung ausgesprochen, daß für Grade  $n = (l-1)/2$ , wo  $l > 3$  Primzahl ist,  $d_n = l^{(l-3)/2}$  der Diskriminantenbetrag des größten reellen Teilkörpers des  $n$ -ten Einheitswurzelkörpers ist. Verf. zeigt, daß diese für  $l = 6, 7$  richtige Vermutung nicht zutrifft, wenn die Primzahl  $l > 5$  und  $(l+1)/2$  Primzahl ist ( $l = 13, 37, \dots$ ).

*H. Hasse.*

**Jehne, Wolfram:** Idelklassenfaktorensysteme und verallgemeinerte Theorie der verschränkten Produkte. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 70—98 (1952).

Let  $\Omega$  be an algebraic number field and  $K$  its Galois extension. A system  $\hat{A}^* = \{A_p^*\}$  of local algebras  $A_p^*$  over  $\Omega_p$  is called an imbedding algebra-idele for a central simple algebra  $A$

over  $K$ , when  $A_p = A \times_{\Omega} \Omega_p$  can, for each  $p$ , be imbedded in  $A_p^*$  so that  $A_p$  is the commutator of  $K_p$  in  $A_p^*$ . In such  $A$  we obtain Teichmüller's (this Zbl. 23, 198) semi-factor-set  $\Theta$  (on the Galois group of  $K/\Omega$ ) (with Teichmüller's 3-cocycle as its (semi-) coboundary). Then there are, for each  $p$ , a splitting semi-factor-set  $\Theta^{(p)}$  in  $A^*$  and a 2-cochain  $a^{(p)}$  in  $K_p$  such that  $\Theta = \Theta^{(p)} a^{(p)}$ . Then  $\{a^{(p)}\}$  gives rise to an idèle-class factor-set, in  $K/\Omega$ , whose class is determined uniquely by the (locally explained) class of  $\tilde{A}^*$ . Among the idèle-class 2-cohomology classes for  $K/\Omega$  obtained in this manner, there is a canonical one, derived from  $A^*$  with  $\Sigma(A_p^*/p) = 1/(K:\Omega)$ , which is a generator of the group of such [as a matter of fact, of all (cf. Hochschild-Nakayama, this Zbl. 47, 38) idèle-class 2-cohomology classes and which is indeed (inverse to, in some formulation) the one derived by Weil (this Zbl. 44, 29) and the rev. (this Zbl. 46, 38) by different methods. This canonical 2-cohomology class is used then, partly paralleling with Nakayama, l. c., to derive the Artin-Chevalley reciprocity. It is observed that the present construction uses, arithmetically, only Hasse's sum formula (while the reviewer's used the cyclotomic, cyclic case of the reciprocity too). Its another advantage is that it gives at the same time the relationship to the Teichmüller-MacLane group (this Zbl. 32, 108) and class [cf. Hochschild-Nakayama, l. c. and Nakayama, Ann. of Math. II. Ser. 57, 1-14 (1953); the latter is particularly closely related to the present paper] (although the cohomology theory seems to be more effective in certain other respects; cf. Tate, this Zbl. 47, 37). Finally Hasse's (this Zbl. 33, 158) Widerspiegelungsproblem is settled by the use of the canonical class. *T. Nakayama.*

**Carlitz, L.: A theorem of Dickson on irreducible polynomials.** Proc. Amer. math. Soc. 3, 693-700 (1952).

Im Schluß an ältere spezielle Untersuchungen von Dickson betrachtet Verf. allgemein über einem endlichen Körper  $\Omega$  mit  $q$  Elementen die Anzahlen der normierten Primpolynome  $P(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$  vom Grade  $m$  mit bestimmten Vorschriften über die Koeffizienten  $c_1, c_m$ . Aus dem von Davenport-Hasse (dies. Zbl. 10, 338) entwickelten Zusammenhang mit  $L$ -Funktionen über  $\Omega(x)$  folgert er zunächst für die Anzahl der  $P$  vom Grade  $m$  mit fest vorgeschriebenen  $c_1, c_m$  (wobei  $c_m \neq 0$ ) die asymptotische Formel

$$\pi_m(c_1, c_m) = \frac{1}{m} q^{m-2} + O(\sqrt{q}^m).$$

Sei ferner (unter der Voraussetzung  $2 \nmid q$ ) der quadratische Charakter  $\psi(c_m) = \eta$  vorgeschrieben, und es seien zur Abrundung alle Primpolynompotenzen  $P^r$  ( $r \geq 1$ ) jeweils mit dem Gewicht  $1/r$  in die Zählung einbezogen, wobei  $m, c_1, c_m$  für  $P^r$  zu verstehen sind. Für die so definierte Anzahl beweist Verf. die exakte Formel

$$\pi_m^*(c_1, \eta) = \frac{1}{2m} (q^{m-1} - \varepsilon + R),$$

wo  $\varepsilon = 0$  oder 1, je nachdem  $c_1 \neq 0$  oder  $= 0$ , und das Restglied

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{1}{q} - \varepsilon \right) \eta \sqrt{q}^{*m} & \text{für gerades } m \\ \psi(c_1) \eta \sqrt{q}^{*m-1} & \text{für ungerades } m \end{array} \right\} \text{ mit } q^* = \psi(-1)q$$

ist. Schließlich leitet Verf. noch eine entsprechende exakte Formel für die Anzahl der Primpolynompotenzen vom Grade  $m$  mit vorgeschriebenem  $c_1$  her. *H. Hasse.*

**Nagell, Trygve: Un théorème arithmétique sur les coniques.** Ark. Mat. 2, 247-250 (1952).

Let  $\Omega$  be a given field, and let  $f_n(x, y, z)$  denote a ternary form in  $x, y, z$  of degree  $n$  with coefficients in  $\Omega$  and irreducible in  $\Omega$ . In an earlier paper (this Zbl. 27, 12) the author proved the following theorem for  $n = 3$ : If  $f_n(x, y, z) = 0$  is solvable only by  $x = y = z = 0$  in  $\Omega$ , it cannot be solved in a field obtained by adjoining to  $\Omega$  an algebraic number whose degree, relative to  $\Omega$ , is prime to  $n$ , [ $f_3(x, y, z) = 0$  being a cubic curve of genus 1]. Here it is shown that this theorem holds good also for  $n = 2$ , and that it cannot be extended to algebraic curves of degree  $\geq 4$ . *W. Ljunggren.*

**Nagell, Trygve: Remarques sur les corps résolvents des coniques cubiques et quartiques.** Ark. Mat. 2, 379-384 (1952).

In this paper the author completes some details in the proofs for the theorems



mentioned in the preceeding review. Further results are: 1° If  $f_4(x, y, z) = 0$  has a rational system in  $\Omega$ , consisting of an odd number of points, it has a rational triplet in  $\Omega$ . 2° The singular points on  $f_n(x, y, z) = 0$  form a rational system in  $\Omega$  of at most  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  points.

W. Ljunggren.

**Nagell, Trygve:** Problems in the theory of exceptional points on plane cubics of genus one. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 71–76 (1952).

Let  $\Omega$  be an algebraic field,  $C$  a plane cubic of genus 1 with coefficients in  $\Omega$ , and  $G$  the Abelian group of all points on  $C$  with coordinates in  $\Omega$ . The author reports on possible types of finite subgroups of  $G$ , and he discusses the cases of subgroups of order 9, both cyclic and non-cyclic.

K. Mahler.

**Iseki, Kanesiroo:** Über die negativen Fundamentaldiskriminanten mit der Klassenzahl zwei. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 3, 23–29 (1952).

Es sei  $-\Delta = b^2 - 4ac$  die Fundamentaldiskriminante der positiv-definiten quadratischen Formen  $ax^2 + bxy + cy^2$ . Dickson zeigte [Bull. Amer. math. Soc. 17, 534–557 (1911)], daß es genau 9 Werte von  $\Delta < 15 \times 10^5$  [diese Ungleichung ist ersetzt worden von D. H. Lehmer durch  $\Delta < 5 \times 10^9$ ; Bull. Amer. math. Soc. 39, 360 (1933)] mit der Klassenzahl  $h(-\Delta) = 1$  gibt, nämlich  $\Delta = 3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163$ . Verf. zeigt, der Dicksonschen Methode nachfolgend, daß es genau 18 Werte von  $\Delta < 6000$  mit  $h(-\Delta) = 2$  gibt, nämlich  $\Delta = 15, 20, 24, 35, 40, 51, 52, 88, 91, 115, 123, 148, 187, 232, 235, 267, 403, 427$ . S. Kuroda.

## Zahlentheorie:

● **Gel'fond, A. O.:** Die Lösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. (Populäre Vorlesungen über Mathematik, Heft 8.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 63 S. R. 0,85 [Russisch].

This is an introduction to diophantine equations for the higher classes in schools. Topics discussed include the equation  $ax + by + c = 0$  and Pell's equation (both using continued fractions, which are developed ab initio) and the general integer solution of such equations as  $x^2 + 2y^2 = z^2$ ,  $x^2 - Ay^2 = C$ . The penultimate section proves Liouville's theorem on the rational approximation to an algebraic irrational and discusses the relevance of the Thue-Siegel theorem to diophantine equations. The booklet concludes with proofs of the impossibility of  $x^4 + y^4 = z^2$  and  $x^4 + 2y^4 = z^2$  by infinite descent. The exposition is detailed and, as one would expect, competent; but there seem to be no points of especial interest to the expert.

J. W. S. Cassels.

**Leonardi, Raffaele:** Sulla formazione dei sistemi di numeri equitotali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 345–350 (1952).

Bezeichnet  $[j\lambda_j]$  die Zahl  $aj + b\lambda_j + c$  [ $j, \lambda_j$  sind positive ganze Zahlen des Intervalls  $(1, m)$ ,  $m$  ganz, die  $\lambda_j$  sind eine Permutation aus  $1, \dots, m$ ;  $a, b, c$  beliebig rational], so können die  $[j\lambda_j]$  in einer quadratischen Matrix von  $m^2$  Elementen angeordnet werden. Für „figurierte Permutationen“ (permutazioni figurate)  $[1\lambda_1], [2\lambda_2], \dots, [m\lambda_m]$  gelten dann folgende vom

Verf. ohne Beweis gegebenen übrigens leicht zu beweisenden Sätze: (1)  $\sum_{j=1}^m [j\lambda_j]$  ist unabhängig von der Wahl der Permutation der  $\lambda_j$ . (2) Ist  $j' = m + 1 - j$ ,  $\lambda'_j = m + 1 - \lambda_j$ , so ist auch

$\sum_{j=1}^m [j\lambda_j]^2 = \sum_{j=1}^m [j'\lambda'_j]^2$ , so daß die  $[j\lambda_j]$  einerseits, die  $[j'\lambda'_j]$  andererseits eine Lösung des

Tarry-Escott-Problems (im folgenden kurz T.-E.-Problems) des Grades 2 sind. (3) Wird nach Erweiterung der Matrix auf eine  $2m, 2m$ -Matrix die figurierte Permutation  $[j, \lambda_j]$  durch die Elemente  $[M - j, \lambda_j]$ ,  $[j, M - \lambda_j]$ ,  $[M - j, M - \lambda_j]$  ( $M = 2m + 1$ ) ergänzt, so bilden diese  $4m$  Elemente eine Lösung des T.-E.-Problems des Grades 3. — Der weitere Teil der Arbeit ist sehr schwer verständlich. Es handelt sich um folgendes: Sei ein System  $[j\lambda_j]$  und ein anderes  $[j\mu_j]$  Lösung eines T.-E.-Problems des Grades  $k$ . Wird  $b = 1$  gesetzt — was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist — da Multiplikation mit einem rationalen Faktor auf beiden Seiten einer T.-E.-Gleichung diese aufrechterhält, so ist folgende Darstellung möglich:  $[j\lambda_j] = y_i + \lambda_{j_i}$ ,  $[j\mu_j] = y_j + \mu_j$ . Dann ist mit  $u_i = y_i + \lambda_i$ ,  $v_i = y_i + \mu_i$ ,  $u_{i+m} = v_i + m$ ,  $v_{i+m} = u_i + m$

( $i = 1, \dots, m$ )  $u_1, \dots, u_{2m} = v_1, \dots, x_{2m}$ . Verf. zeigt, wie man auf diese Art zu Lösungen des T.-E.-Problems von beliebig hohem Grad fortschreiten kann. *L. Holzer.*

**Obláth, Richard:** Über einige unmögliche diophantische Gleichungen. Mat. Tidsskr. A 1952, 53—62 (1952).

Using the method of infinite descent and the conception of divisibility the author proves that the diophantine equations  $x^3 - 1 = Dy^2$  ( $D = 2$  or  $3$ ), are impossible in rational integers  $x, y$  ( $y \neq 0$ ). *W. Ljunggren.*

**Buquet, A.:** Sur un critère d'indépendance de deux solutions données de l'équation diophantienne en nombres rationnels  $x^3 + dx + e = z^2$ . I. Mathesis 61, 183—193 (1952).

After a short introduction to the elements of the theory of rational points on the cubic curve  $x^3 + dx + e = z^2$ , the author gives an elementary solution of the problem mentioned in the title. *W. Ljunggren.*

**Faircloth, O. B. and H. S. Vandiver:** On certain diophantine equations in rings and fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 52—57 (1952).

Vorgelegt ist eine algebraische Gleichung (A)  $f(x_1, \dots, x_s) = 0$  über einem kommutativen Ring  $R$  mit Einselement. Es werden unter sehr verschiedenen speziellen Annahmen Bemerkungen über die Lösungen gemacht, größtenteils ohne Beweis. Insbesondere ist  $x^n X^n + y^m Y^n - z^m Z^n$  [ $(m, n) = 1$ ] nach Bouniakowsky [Bull. Acad. Sci. St. Petersburg, 6, 200—202 (1848)] durch  $x = a^\alpha$ ,  $y = b^\alpha$ ,  $z = c^\alpha$ ,  $X = b^\beta c^\beta$ ,  $Y = a^\beta c^\beta$ ,  $Z = a^\beta b^\beta$  identisch befriedigt, wenn  $a, b \in R$ ,  $c = a + b$  und  $m\alpha - n\beta = 1$ . Nach Ward (dies. Zbl. 42, 39) hat  $F(x_1, \dots, x_s) = y^k$  eine identische Lösung, wenn die linke Seite homogen vom Grade  $n$  und  $(n, k) = 1$  ist, die sogar alle Lösungen umfaßt, wenn  $R$  ein Körper ist. In  $x_1^{m_1} + c_2 x_2^{m_2} + \dots + c_s x_s^{m_s} = 0$  sollen alle Koeffizienten und Exponenten  $\neq 0$  sein, ferner werde  $(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$  angenommen. Eine identische Lösung ist  $x_1 = y_1^{\lambda}$ ,  $x_i = y_1^{\mu_{m_2} \dots m_s / m_i} y_i$  ( $i = 2, \dots, s$ ), wenn  $y_1 = -c_2 y_2^{m_2} - \dots - c_s y_s^{m_s}$  und  $\lambda m_1 - \mu_{m_2} \dots m_s = 1$ . Wieder entstehen hieraus alle Lösungen, wenn  $R$  der endliche Körper  $F(p^n)$  von der Ordnung  $p^n$  ist und  $\lambda, \mu$  zu  $p^n - 1$  prim gewählt werden. [Vgl. Faircloth, Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 619—622 (1951).] Im folgenden werde nur noch der Fall  $R = F(p^n)$  betrachtet. Es ist bemerkenswert, daß man gewisse Funktionen aller Lösungen von (A) berechnen kann, auch wenn man letztere nicht kennt. So z. B. wenn in  $N(m_1, \dots, m_s) = \sum x_1^{m_1} \dots x_s^{m_s} \cdot (1 - f(x_1, \dots, x_s)^{p^n - 1})$  über alle Systeme  $x_1, \dots, x_s$  ( $x_i \in R$ ) summiert wird, so hat man  $N(m_1, \dots, m_s) = \sum x_1^{m_1} \dots x_s^{m_s}$ , wobei man nur noch über die Lösungen  $x_1, \dots, x_s$  von (A) zu summieren hat. Verff. beschäftigen sich dann noch mit der schon viel untersuchten Gleichung  $c_1 x_1^{m_1} + \dots + c_s x_s^{m_s} = c$  in  $F(p^n)$  und teilen eine Reihe an einer anderen Stelle ausführlich zu beweisender Formeln mit, die sich auf die Anzahl und sonstige Funktionen der Lösungen beziehen. Für diese werde auf die Arbeit hingewiesen. *L. Rédei.*

**Dénes, Peter:** Über die diophantische Gleichung  $x^{np} + y^{np} = p^m \cdot x^{np}$ . Czechoslov. math. J. 1 (76), 179—185 (1952).

Es bedeute  $\zeta$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel,  $p$  eine irreguläre Primzahl. Folgende zwei Voraussetzungen werden gemacht: der zweite Faktor der Klassenzahl von  $k(\zeta)$  sei zu  $p$  prim; keine der Bernoullischen Zahlen  $B_{rp}$  ( $r = 1, \dots, \frac{p-3}{2}$ ) ist durch  $p^3$  teilbar. Unter Benutzung zweier Hilfssätze von H. S. Vandiver [Trans. Amer. math. Soc. 31, 613—642 (1929)] werden folgende zwei neuen Sätze bewiesen: 1) In  $k(\zeta + \zeta^{-1})$  ist die Gleichung  $\xi^p + \eta^p = E((1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1}))^s \psi^p$  in ganzen zu  $p$  teilerfremden Zahlen  $\xi, \eta, \psi$  und einer Einheit  $E$  unlösbar, falls  $s \geq (3p-1)/2$  ist. 2) Sind  $n > 0$ ,  $m \neq 3$  natürliche Zahlen, so ist die Gleichung  $x^{np} + y^{np} = p^m z^{np}$  mit  $x y z \neq 0$  in rationalen Zahlen  $x, y, z$  unlösbar. *M. Eichler.*

**Skolem, Th.:** The general congruence of 4th degree modulo  $p, p$  prime. Norske mat. Tidsskr. 34, 73—80 (1952).

Suppose  $f(x)$  is a polynomial of fourth degree with rational integral coefficients and highest coefficient unity,  $g(x)$  is its cubic resolvent, and  $p$  is a prime number greater than 4 not dividing the discriminant of  $f(x)$  or the constant term of  $g(x)$ . By considering the five possible cases, the author shows that if we know the number of roots of the congruence  $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$  and how many of them are quadratic residues modulo  $p$ , then we can predict the degrees of the factors which occur when  $f(x)$  is expressed as a product of irreducible polynomials modulo  $p$ . *P. T. Bateman.*



**Carlitz, L.: Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions.** Duke math. J. 19, 329—337 (1952).

In einer früheren Arbeit [(I), dies. Zbl. 38, 179] hatte Verf. für die Vorzahlen in der Potenzreihe der Jacobischen Funktion (J. F.)  $\sin \alpha(x, x^2)$  bei rationalem, mod.  $p$  ganzartigem  $x^2$  gewisse Kongruenzen nach Potenzen des ungeraden Primzahlmoduls  $p$  hergeleitet. Auf den hyperelliptischen Fall der etwa die Beziehung  $g'^2(x) = 1 + A_1 g(x) + \dots + A_6 g^6(x)$  mit mod.  $p$  ganzartigen  $A_j (j = 1, \dots, 6)$  erfüllenden Funktion  $g(x)$  läßt sich das Ergebnis zwar nicht unmittelbar, wohl aber bei einer gewissen Abwandlung des Verfahrens übertragen. Es umfaßt dann allgemeiner die Klasse  $\mathfrak{K}$  der Funktionen  $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m/m!$ , deren Umkehrung die Gestalt

$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} e_m x^m/m$  hat, wo die  $c_m, e_m$  ganzartig mod.  $p$  sind und  $c_1 = e_1 = 1$  ist.  $\mathfrak{K}$  ist

dieselbe Klasse, auf die Verf. [(II), Duke math. J. 8, 689—700 (1941)] den v. Staudt-Clausen'schen Satz verallgemeinern konnte. Der Befund ist freilich schwächer als bei (I), lautet nämlich

$$\sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} c_p^{r-i} c_{m+i(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^s}, \quad s = [\tfrac{1}{2}(r+1)] \quad \{s \text{ das größte Ganze } \leq (r+1)/2\}.$$

— Die Vorzahlen  $c_m^{(k)}$  in der Reihe  $g^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} c_m^{(k)} \frac{x^m}{m!}$  mit  $c_m^{(1)} = c_m$  genügen, wenn  $m \geq r \geq 1$ ,

$$k p + t > 1, \quad \text{der Kongruenz} \quad \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} c_p^{r-i} c_{m+i(p-1)}^{(k p + t)} \equiv 0 \pmod{p^s}, \quad \text{wo } s = k \text{ für}$$

$r < k, s = [(r+k+1)/2]$  für  $r \geq k$ . — Für die Vorzahlen  $\beta_m$  der Entwicklung  $x/g(x) =$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x^m/m! \quad \text{mit } \beta_0 = 1 \quad \text{findet Verf., den Zusammenhang } \beta_m = \sum_{h \leq m} e_{h+1} c_m^{(h)} / (h+1)$$

ausnutzend ( $m \geq 1$ ), die Kongruenz  $\beta^m (\beta^{p-1} - c_p)^r \equiv 0 \pmod{p^s}, s = [(r-1)/2], m \geq r \geq 1$ , in der nach Entwicklung der linken Seite  $\beta^k$  durch  $\beta_k$  zu ersetzen ist. — Eine weitere Kongruenz

$$\text{gibt er für die Vorzahlen } \beta_m^{(\lambda)} \text{ von } \left(\frac{x}{g(x)}\right)^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(\lambda)} \frac{x^m}{m!} \text{ mit } \beta_0^{(\lambda)} = 1, \beta_m^{(1)} = \beta_m. \text{ — Am Schlusse}$$

wirft er die Frage auf, ob der Vervielfachungssatz der J. F. in der schwachen Form, in der er ihn a. a. O. (I) verwandte, wenigstens im hyperelliptischen Falle gilt. Wenn dem so wäre, so ließe sich eine bestimmte, den Vorzahlen der Entwicklung einer J. F. zukommende Eigenschaft auf die  $\beta_m$  übertragen.

L. Koschmieder.

**Perron, Oskar: Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste.** Math. Z. 56, 122—130 (1952).

Es sei  $p$  eine ungerade Primzahl und  $a$  durchlaufe  $(p+1)/2$  quadratische Reste und  $b$   $(p-1)/2$  Nichtreste nach  $p$ . Die Zahl 0 wird dabei und im folgenden stets zu den Resten  $a$  mitzuzurechnet. Ferner sei  $g$  eine beliebig bestimmte zu  $p$  prime Zahl. Verf. beweist auf elementare Weise folgenden Satz: Ist  $p = 4k-1$ , so gibt es unter den  $2k$  Zahlen  $a+g$  und auch unter den  $2k-1$  Zahlen  $b+g$  genau  $k$  Reste. Ist  $p = 4k+1$ , so gibt es unter den  $2k+1$  Zahlen  $a+g$  genau  $k+1$  bzw.  $k$  Reste und unter den  $2k$  Zahlen  $b+g$  genau  $k$  bzw.  $k+1$  Reste, je nachdem  $g$  selbst Rest oder Nichtrest ist. Aus diesem Satz folgen ohne weiteres folgende Resultate. Unter der „Länge“ eines Paares von Zahlen  $m, n$  verstehe man die kleinste positive Zahl  $(\leq (p-1)/2)$ , die zu einer der Zahlen  $m-n$  oder  $n-m$  kongruent nach  $p$  ist. Dann gibt es im Fall  $p = 4k-1$  genau  $k$  Restepaare und  $k-1$  Nichtrestepaare von jeder vorgegebenen Länge  $g$  und im Fall  $p = 4k+1$  genau  $k+1$  bzw.  $k$  Restepaare und  $k$  bzw.  $k-1$  Nichtrestepaare von der Länge  $g$ , je nachdem  $g$  selbst Rest oder Nichtrest ist. Unter einem „Block“ der Reste verstehe man eine Reihe von aufeinanderfolgenden Resten aus den zyklisch geordneten Zahlen  $0, 1, \dots, p-1$ ; der Block ist also durch zwei Nichtreste begrenzt; entsprechend für einen Block der Nichtreste. Das vollständige Restsystem nach  $p = 4k \pm 1$  besteht dann aus je  $k$  Blöcken der Reste und der Nichtreste.

S. Kuroda.

**Uhler, Horace S.: A brief history of the investigations on Mersenne numbers and the latest immense primes.** Scripta math. 18, 122—131 (1952).

Verf. gibt einen geschichtlichen Überblick über die Untersuchungen der Mersenneschen Zahlen  $M_p = 2^p - 1$ ,  $p$  prim. Die Untersuchung der  $M_p$  auf ihren Primzahlcharakter für  $p \leq 257$ , für die schon Mersenne eine, allerdings 5 Fehler enthaltende Aufstellung gegeben hatte, war 1947 abgeschlossen:  $M_p$  ist prim für  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$  und sonst zusammengesetzt. Inzwischen wurden im „SWAC Mersenneprojekt“ die  $M_p$  für  $p < 2309$  untersucht. Man fand als nächste Mersennesche Primzahlen:  $2^{521} - 1$  und  $2^{607} - 1$  (30. I. 1952) sowie  $2^{1279} - 1$  (25. VI. 1952). Folgendes Kriterium wurde der Berechnung zugrunde

gelegt: Die Zahl  $M_p$  ist dann und nur dann Primzahl, wenn sie das  $(p-1)$ -ste Glied der Folge  $S_1 = 4$ ,  $S_n = S_{n-1}^2 - 2$  für  $n > 1$ , teilt. Außerdem werden noch folgende Primzahlen mitgeteilt:  $(2^{148} + 1)/17$  (A. Ferrier);  $k(2^{127} - 1) + 1$  für  $k = 114, 124, 388, 408, 498, 696, 738, 744, 780, 934, 978$  (Miller und Wheeler, EDSAC);  $180(2^{127} - 1)^2 + 1$  (M. W. team).

B. Schoeneberg.

**Selberg, Atle: On elementary methods in primenumber-theory and their limitations.** 11. Skand. Mat. Kongr., Trondheim 1949, 13—22 (1952).

In diesem Vortrag gibt Verf. einen sehr instruktiven Überblick über die Siebmethode von V. Brun und die Verschärfung und Verallgemeinerung dieser Methode durch den Verf. (vgl. dies. Zbl. 41, 19; Beispiele zu dieser Methode bei I. V. Čutanovskij, dies. Zbl. 30, 344 und E. K. Fogels, dies. Zbl. 41, 176—177). — Verf. weist auf die Grenzen der Methode hin und auf die Möglichkeit, durch „lokale Siebmethode“ und durch Kombination mit anderen (z. B. analytischen) Methoden weiter zu kommen. So wurde Verf. durch eine lokale Siebmethode zu seiner berühmten asymptotischen Gleichung geführt, welche ihm durch Anwendung tauberscher Argumente den elementaren Beweis des Primzahlsatzes ermöglichte.

E. Hlawka.

**Shapiro, George: On the Dirichlet series associated with Ramanujan's  $\tau$ -function.** Amer. J. Math. 74, 401—409 (1952).

Let  $\tau(n)$  denote the Ramanujan function and let

$$\varphi(s) = \prod_p (1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}; \Re s > \frac{13}{2}, \varphi_n(s) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau(p_k) p_k^{-s} + p_k^{11-2s})^{-1}$$

where  $p_k$  denotes the  $k^{\text{th}}$  prime. The author proves that if  $\Re s > 123/20$  then the sequences  $\{\varphi_n(s)\}$  and  $\{\log \varphi_n(s)\}$  converge in relative measure to  $\varphi(s)$  and  $\log \varphi(s)$ , respectively. If the hypothesis  $\tau(p) = O(p^{11, 2+\epsilon})$  ( $\epsilon > 0$ ) is supposed to be true then the convergence takes place for every  $s$  with  $\Re s > 6$ . In the case of the Riemann  $\zeta$ -function the corresponding results have been proved by H. Bohr [Acta math. 40, 67—100 (1916)]. The second half of the paper is devoted to the study of the asymptotic distribution functions of  $\varphi(s)$  and  $\log \varphi(s)$ . The results are similar to those of B. Jessen and A. Wintner concerning the distribution functions of  $\zeta(s)$  and  $\log \zeta(s)$  (this Zbl. 14, 154): The distribution functions are absolutely continuous and their densities  $D_{1,\sigma}(x)$   $D_{2,\sigma}(x)$  ( $\sigma > 123/20$ ) possess continuous partial derivatives of all orders. Moreover, for every  $\lambda > 0$   $D_{1,\sigma}(x) = O(e^{-\lambda|x|^3})$  and  $D_{2,\sigma}(x) = O(e^{-\lambda \log^2|x|})$  as  $x \rightarrow \infty$ .

I. S. Gál.

**Ankeny, N. C.: A generalization of a theorem of Suetuna on Dirichlet series.** Proc. Japan Acad. 28, 389—295 (1952).

Es seien  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  eigentliche Dirichletsche Charaktere, darunter sei höchstens ein Hauptcharakter enthalten, und  $L(s; \chi_i)$  bezeichne die  $\chi_i$  zugeordnete Dirichletsche  $L$ -Reihe. Wenn alsdann alle Koeffizienten der Dirichletschen Reihe

$$Z(s) = \prod_{i=1}^n L(s; \chi_i)$$

nicht negativ sind, so beweist Verf., daß  $Z(s)$  die Dedekindsche Zetafunktion eines abelschen Zahlkörpers ist. Der wichtige Hilfssatz (Theorem 2) gilt leider im allgemeinen nicht. Aber der oben angeführte Satz ist richtig, wie nachher K. Iwasaki einfach und elegant bewiesen hat [Proc. Japan Acad. 28, 555—557 (1952)].

Z. Suetuna.

• **Vinogradov, M. I.: Ausgewählte Abhandlungen.** Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1952. 436 S. R. 21,70 [Russisch].

In diesem Werk sind 26 Abhandlungen von Vinogradov von der Akad. der Wissensch. unter der Redaktion von Ju. V. Linnik herausgegeben worden. Zunächst finden wir die ersten Arbeiten Vinogradovs aus dem Jahre 1917 über Gitterpunktanzahlen, insbesondere über die Summe  $h(-1) + h(-2) + \dots + h(-n)$ , wo  $h(\cdot D)$  die Klassenzahl binärer quadratischer Formen der Diskriminante  $-D$  bedeutet. Durch eine spätere Arbeit (dies. Zbl. 39, 38), die auch hier aufgenommen ist, sind diese Ergebnisse natürlich überholt, sie sind jedoch methodisch von größtem Interesse. Dann folgen verschiedene Untersuchungen über die Verteilung der



Potenzreste, insbesondere die folgenden bekannten Sätze des Verf.: „Die kleinste Primitivwurzel mod  $p$  ist für genügend großes  $p < 2^{2k} \sqrt{p} \log p$  ( $k$  = Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $p - 1$ ); die kleinste Zahl  $a$ , für die  $x^n = a \pmod{p}$  nicht lösbar ist, ist kleiner als  $p^{1/2k} \log^2 p$ ,  $k = e^{(n-1)/n}$ .“ In der Arbeit „Eine asymptotische Beziehung aus der Theorie der quadratischen Formen“ wird folgendes gezeigt:

$$\theta(a+b) + \theta(a+2b) + \dots + \theta(a+Zb) = \frac{4\pi}{21\zeta(3)} \sqrt{|b|} Z^{3/2} \prod_q \left(1 + \left(\frac{a}{q}\right) \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{q^3}\right) + O(2^{2k} |b|^{3/2} Z \log(|b|Z)),$$

wobei  $\theta(D) = 0$  für  $D = m^2$ ,  $\theta(D) = h(D)$  bzw.  $\pi^{-1} h(D) \log \varepsilon$  für  $D < 0$  bzw.  $D > 0$  ( $\varepsilon$  = Grundeinheit von  $K(\sqrt{D})$ );  $q$  durchläuft die verschiedenen ungeraden Primfaktoren von  $b$  und  $k$  ist ihre Anzahl. Eine weitere Reihe von Abhandlungen ist den Fragen der Gleichverteilung gewidmet [siehe dazu Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin 1936 (dies. Zbl. 12, 396), v. d. Corput (dies. Zbl. 14, 252)]. Dann folgen die ersten Arbeiten zum Waringschen Problem, in denen die in der Hardy-Littlewoodschen Methode verwendeten erzeugenden Potenzreihen durch trigonometrische Summen ersetzt werden. Die nächsten Arbeiten bringen die bedeutendsten Erfolge der Vinogradovschen Methoden: „Die Minimalanzahl der  $n$ -ten Potenzen, durch die jede genügend große natürliche Zahl darstellbar ist, ist höchstens von der Größenordnung  $n \log n$ . Jede genügend große ungerade Zahl ist Summe von drei Primzahlen.“ (dies. Zbl. 11, 8; 12, 196; 16, 291.) Auch des Verf. berühmtes Buch „Die Methode der trigonometrischen Summen in der Zahlentheorie“ [Trudy mat. Inst. Steklov Nr. 23 (1947), dies. Zbl. 41, 370] ist vollständig abgedruckt. Weiters enthält das Werk noch zahlreiche andere von den neueren Arbeiten Vinogradovs (dies. Zbl. 32, 206; 33, 164–165; 36, 305; 39, 38; 42, 42). — Die Auswahl der Arbeiten ist sehr geschickt getroffen und das Buch gibt einen sehr schönen und klaren Überblick über das Schaffen des russischen Mathematikers. Sein Wert ist um so größer, als viele der älteren Arbeiten schwer zugänglich sind.

K. Prachar.

Černý, Karel: On the minimum of binary biquadratic forms. Czechoslov. math. J. 2 (77), 1–55 und engl. Zusammenfassg. 55–56 (1952) [Russisch].

The author determines the critical determinant and critical lattices of the region  $|f(x, y)| \leq 1$ , where  $f(x, y)$  is the general homogeneous binary quartic form. The work was done in ignorance of that of C. S. Davis (this Zbl. 42, 45). His parameter  $M$  and Davis's parameter  $m$  are related by  $M = 6 \frac{1-m}{1+3m}$ . J. W. S. Cassels.

Inkeri, K.: Über einige Verschärfungen eines Minkowskischen Satzes. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 136, 16 S. (1952).

Let  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  be an indefinite form of determinant  $R^2 = b^2 - 4ac$ . Put

$$\mu(f) = \max \{|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, \min \{|f(1, 1)|, |f(1, -1)|\}\}.$$

Write  $M(f) = \max_{x_0, y_0} \min_{x=x_0, y=y_0(1)} |f(x, y)|$ . Then there is shown to exist a reduced

form  $g$  equivalent to  $f$  with  $\mu(f) \geq \mu(g) \geq 4M(f)$ . — The inequality  $\mu(f) \geq 4M(f)$  is due to Barnes (this Zbl. 37, 171) and the author shows that his theorem contains results of Davenport, Heinehold and himself as special cases. He shows that  $5^{-1/2} R \leq \mu(q) \leq R$  and so his theorem contains Minkowski's estimate  $M(f) \leq R/4$ . Of independent interest are a proof that  $f$  always represents a number  $s$  with  $5^{-1/2} R \leq |s| \leq R$  and the remark that the usual criterion for the reduction of an indefinite form is equivalent to  $ac \leq 0$ ,  $b \geq |a + c|$ . J. W. S. Cassels.

Scherk, Peter: Convex bodies off center. Arch. der Math. 3, 303 (1952).

Let  $0 < t < 1$ ,  $n \geq 2$ , and let  $F(\mathfrak{x})$  be the distance function of a symmetric convex body  $K$  in  $R_n$ ; suppose that  $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  is the only vector with integral coordinates satisfying  $F(\mathfrak{x}) \leq 2t J^{-1/n}$  where  $J$  is the volume of  $K$ . Then to every vector  $\mathfrak{a}$  there is an integral vector  $\mathfrak{g}$  satisfying  $F(\mathfrak{a} - \mathfrak{g}) < [1 + (n-1)t^n] t^{1-n} J^{-1/n}$ . This further improves results by K. Mahler (this Zbl. 19, 51) and by Störmer and Walter (this Zbl. 40, 164).

K. Mahler.

Davenport, H.: Simultaneous Diophantine approximation. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 406–416 (1952).

Proof of the theorem: „Let  $c > 46^{-1/4}$ . Then, for every pair of real irrational numbers  $\alpha, \beta$ , there exist infinitely many solutions  $p, q, r > 0$  of  $r(p - \alpha r)^2 < c$ ,  $r(q - \beta r)^2 < c$  in integers.“ This result slightly improves one by Mullender (this

Zbl. 37, 171). The theorem is proved by showing that the lattice determinant of the star domain  $(\xi s - \eta c)^2 |\eta| \leq 1$ ,  $(\xi c + \eta s)^2 |\eta| \leq 1$  in the  $(\xi, \eta)$ -plane is not less than  $\sqrt{2}$  if  $c = \cos \theta$  and  $s = \sin \theta$ , and  $\theta$  is an arbitrary angle.

K. Mahler.

Kuipers, L. and B. Meulenbeld: On real functions of  $n$  variables. Indagationes math. 14, 490—497 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 490—497 (1952).

Let a function  $f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$  with first partial derivatives be defined in a sequence  $F$  of  $n$ -dimensional Intervals  $Q: 0 \leq S_1 \leq t_1 \leq T_1, \dots, 0 \leq S_n \leq t_n \leq T_n$  where  $T_\mu - S_\mu \rightarrow \infty$  for all  $\mu$ . If, uniformly in  $t_1, \dots, t_{n-1}$ ,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial t_n} = c \neq 0$  ( $c$  a constant), then  $f(t)$  is shown to be  $C$ -uniformly distributed (mod 1) (see L. Kuipers and B. Meulenbeld, this Zbl. 36, 312). On the other hand, the function does not have this property if, uniformly in the same variables,  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} t_k \frac{\partial f}{\partial t_k} = A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n; A_1, A_2, \dots, A_n$  constants), and if further

$$C_1 + \sum_{k=2}^n C_k \prod_{l=1}^{k-1} \sqrt{1 + 4\pi^2 A_l^2} < 1, \text{ where } C_k = \min_k \sup_{Q \in F} \left( \frac{2S_k}{T_k - S_k}, 2\pi |A_k| \right).$$

K. Mahler.

Tsuji, Masatsugu: On the uniform distribution of numbers mod. 1. J. math. Soc. Japan 4, 313—322 (1952).

Let  $\{\lambda_n\}$  be a real sequence satisfying  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ . Let  $I$  be any subinterval of  $[0, 1]$ , say of length  $|I|$ , and let  $\varphi(x)$  be 1 or 0 according as to whether  $x \in I$  or  $x \notin I$ . The real sequence  $\{x_n\}$  is said to be  $\{\lambda_n\}$ -uniformly distributed (mod 1) if for all  $I$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 \varphi(\bar{x}_1) + \dots + \lambda_n \varphi(\bar{x}_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = |I|,$$

where  $\bar{x} = x - [x]$ . The author proves several theorems analogous to those of Weyl, van der Corput, and Fejér for the case of ordinary uniform distribution (mod 1). By way of example,  $a n^\sigma (\log n)^{\sigma_1}$  is  $\{1/n\}$ -uniformly distributed if  $a > 0$  and either  $\sigma > 0$  or  $\sigma = 0$  and  $\sigma_1 > 0$ .

K. Mahler.

● Gelfond, A. O.: Transzendente und algebraische Zahlen. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 224 S. R. 7,20 [Russisch].

This book will be welcomed not only by the Russian student who finds in it an easy introduction to the theory of transcendental numbers, but also by the foreign mathematician. Most of the material in this book has already appeared elsewhere; however, this does not decrease the convenience of having it now available in a very readable form. — The first chapter of the book deals with the Thue-Siegel theorem on the approximation of algebraic numbers by numbers of a fixed algebraic field, and with the  $p$ -adic analogue. The author slightly generalizes the theorem and obtains the same improved exponent as was found independently by Dyson. An application to the class number of imaginary quadratic fields, due to Linnik and the author, concludes the chapter. — Chapter 2 deals with the theorem of Hermite-Lindemann on the transcendency of the exponential function, and with Siegel's work on the transcendency of the solutions of linear differential equations, in particular the Bessel functions. The proof is based on that in Siegel's book (Transcendental numbers, Princeton 1949, this Zbl. 39, 44). — The third chapter is the most interesting one. It begins with a theorem on integral functions assuming, in a certain set of points, only integral values of not too large heights in a fixed algebraic field. If such a function does not increase too rapidly, it must satisfy a functional equation of the type

$$\sum_{h=0}^m A_h f(z + a_h) = 0. \text{ — The next subjects considered are the Gelfond-Schneider theorem}$$

on the transcendency of  $\alpha^\beta$ , and one of Schneider's theorems on elliptic functions. After this, a measure of irrationality  $\log \alpha / \log \beta$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are algebraic  $p$ -adic numbers, is determined and applied to solve the Diophantine equation  $\alpha^x + \beta^y = \gamma^z$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  algebraic numbers) effectively in positive integers. The book concludes with further results on the transcendency of powers and on measures of transcendency.

K. Mahler.

Skolem, Th.: Some theorems on irrationality and linear independence. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 77—98 (1952).



Beweis mehrerer Sätze über Irrationalität, lineare Unabhängigkeit und Transzendenz gewisser Reihen mit rationalen Reihengliedern. Als Beispiele geben wir drei dieser Sätze an. Satz 6: Sind  $x_1, x_2, \dots, x_r$  verschiedene, positive, reelle Zahlen, von denen 1 linear unabhängig ist, so sind mit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[nx]}{n!}$  die Zahlen  $1, f(x_1), \dots, f(x_r)$  linear unabhängig. — Satz 9: Sei für alle ganzen Zahlen  $n \geq 0$  auch  $g(n)$  eine ganze Zahl,  $g(n+1) \geq g(n) > 0$  und  $\limsup \frac{1}{n} \log \frac{\log g(n)}{\log h} < \log k$  mit festen ganzen Zahlen  $h, k > 1$ , dann ist die Zahl  $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{h^{k^n}}$  transzendent. — Anmerkung des Ref.: Satz 9 folgt auch fast unmittelbar aus einem Satz von Th. Schneider (dies. Zbl. 14, 205 und 38, 188). — Satz 10: Seien  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n h^{-\binom{n+1}{2}} k^{-n}$ ,  $h$  und  $k$  positive ganze Zahlen,  $h > 1$ . Seien ferner  $k_1, \dots, k_r$  von 0 verschiedene rationale Zahlen und keiner der Quotienten  $k_i k_j^{-1}$ ,  $i \neq j$  eine Potenz von  $h$ . Dann sind die Zahlen  $f(0), f^{(s)}(k_i)$  mit  $i = 1, \dots, r$  und  $s = 0, 1, 2, \dots$  linear unabhängig.  
F. Kasch.

## Analysis.

### Mengenlehre:

**Volkman, Bodo:** Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. 190, 199—230 (1952).

Einer unendlichen Menge  $\mathfrak{M}$  natürlicher Zahlen werde durch die Festsetzung  $(1) \varrho = \Gamma(\mathfrak{M}) = \sum_{n \in \mathfrak{M}} 2^{-n}$  eineindeutig eine reelle Zahl zugeordnet, wobei also  $0 < \varrho \leq 1$ . Verf. behandelt einige Probleme, die aus den folgenden beiden Fragestellungen entspringen: 1. Gegeben eine Menge  $M$  von reellen Zahlen  $\varrho$  ( $0 < \varrho \leq 1$ ) mit einer bestimmten Eigenschaft. Welches sind die zahlen-theoretischen Eigenschaften der Mengen  $\mathfrak{M}$  mit  $\Gamma(\mathfrak{M}) \in M$ ? 2. Gegeben eine Klasse  $N$  von Mengen natürlicher Zahlen, die durch eine bestimmte Eigenschaft charakterisiert sind. Welches sind die arithmetischen oder mengentheoretischen Eigenschaften der Menge  ${}_r N$  der nach (1) zugehörigen reellen Zahlen? —  $\mathfrak{M}$  heiße rational, wenn  $\Gamma(\mathfrak{M})$  rational ist, pseudorational, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  rationale oder leere Mengen  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  und  $\mathfrak{R}^\varepsilon$  mit  $\mathfrak{R}_\varepsilon \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}^\varepsilon$  und  $D^*(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$  gibt, wo  $D^*(\mathfrak{B}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{b \in \mathfrak{B} \\ b \leq x}} 1$  [vgl. R. C. Buck, Amer. J. Math. 68, 560—580 (1946)].  $D^*$

existiert, wie bewiesen wird, für rationale und pseudorationale Mengen stets. Verf. beweist u. a. ad 1. die Abgeschlossenheit der rationalen Mengen und die der pseudorationalen Mengen bezüglich der Bildung von Komplement, Durchschnitt und Vereinigung: Die Klasse der rationalen einschließlich der höchstens endlichen Mengen ist eine Boolesche Algebra. Die Klasse der pseudorationalen einschließlich der endlichen Mengen ist eine Boolesche Algebra. Ferner: bezeichnet  $\bar{\mathfrak{M}}$  die zu  $\mathfrak{M}$  komplementäre Menge, so gilt: Sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{B}$  pseudorational und  $D^*((\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\bar{\mathfrak{M}} \wedge \bar{\mathfrak{B}})) < 1$ , so ist die durch  $\Gamma(\mathfrak{C}) \equiv \Gamma(\mathfrak{M}) + \Gamma(\mathfrak{B})$  definierte Menge pseudorational. Ad 2. verwendet Verf. den Hausdorffschen Maßbegriff (die betrachteten Mengen sind durchweg vom Lebesgueschen Maß Null) [F. Hausdorff, Math. Ann. 79, 157—179 (1918)]. Hier beweist er u. a.:  $[\mathfrak{M}]$  bezeichne die Klasse der unendlichen Untermengen einer festen Menge  $\mathfrak{M}$ ,  $K_i$  ( $i \geq 2$ ) die Klasse derjenigen Mengen  $\mathfrak{M}$ , welche nicht  $i$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen enthalten. Dann gilt für die Hausdorffschen Dimensionen  $\dim {}_r[\mathfrak{M}] = D^*(\mathfrak{M}) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{M} \\ n \leq x}} 1$ ,  $\dim {}_r K_i = \frac{\log \gamma_i}{\log 2}$ , wo  $\gamma_i$  die (einzige) positive Wurzel der Gleichung

$\xi^i - \sum_{j=0}^{i-1} \xi^j = 0$  bezeichnet.

H.-E. Richert.

**Block, H. D. and Buchanan Cargal:** Arbitrary mappings. Proc. Amer. math. Soc. 3, 937—941 (1952).

Generalization of some results of Blumberg [Trans. Amer. math. Soc. 24, 113—128 (1922), Duke math. J. 11, 671—685 (1944)]. Let  $X$  be a given set and  $\mathfrak{N}$  a nonvoid system of nonvoid sets  $\subseteq X$ . Only such  $\mathfrak{N}$  are considered that there is a countable subcollection of  $N^k \in \mathfrak{N}$  ( $k < \omega_0$ ) boasting of the property that for each

$x \in N \in \mathfrak{N}$  there is a  $k < \omega_0$  such that  $x \in N^k \subseteq N$ . For any  $x \in X$ ,  $N(x)$  denotes any  $N \in \mathfrak{N}$  satisfying  $x \in N(x)$ . A set  $S \subseteq X$  is called nowhere dense, if for each  $N \in \mathfrak{N}$  there is a  $N_1 \subseteq N$  disjoint of  $S$ . A set which is union of  $\leq \aleph_0$  nowhere dense sets is called exhaustible. Analogously to  $X, \mathfrak{N}, x$  respectively let us consider also  $Y, \mathfrak{M}, y$ . Moreover let  $f$  be a given mapping of  $X$  into  $Y$  so that  $0 \subset f(x) \subseteq Y(x \in X)$ . If  $V \subseteq Y$ , let  $f^{-1}V$  be the set of all the  $x \in X$  such that  $f(x) \cap V \neq 0$ .  $x$  is a point of exhaustible (resp. inexhaustible)  $f$ -approach, if there are (resp. there are not)  $y \in f(x)$ ,  $M(y)$ ,  $N(x)$  such that  $f^{-1}(M(y)) \cap N(x)$  is exhaustible.  $x$  is called a point of concentrated inexhaustible  $f$ -approach, if for each  $y \in f(x)$  and each  $M(y)$  there is a  $N(x)$  such that for every  $N_\alpha \subseteq N(x)$ , the set  $f^{-1}(M(y)) \cap N_\alpha$  is inexhaustible. The points of exhaustible (resp. concentrated inexhaustible)  $f$ -approach constitute an exhaustible set (resp. the complement of an exhaustible set). By further specifications:  $f$  single valued,  $X$  Hausdorff space etc. the authors get 4 more corollaries.

*G. Kurepa.*

**Kurepa, Djuro:** Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo. Bull. Soc. math. France **80**, 225—232 (1952).

Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 140) hat bewiesen: in einer geordneten (= teilweise geordneten) Menge  $E$  gibt es Ultraketten (maximale Ketten, maximale total, einfach geordnete Teilmengen). Birkhoff [Lattice Theory, New York 1948 (dies. Zbl. **33**, 101); p. 42] bewies die Gleichwertigkeit dieses Satzes mit dem Auswahlaxiom. Wallace [Bull. Amer. math. Soc. **50**, 578 (1944)] bemerkte, daß man hierbei von den Ordnungsaxiomen keines benötigt, mit anderen Worten: daß der Existenzsatz von Hausdorff für eine beliebig geregelte (mit einer beliebigen binären Relation  $\rho$  versehene) Menge  $E$  richtig ist, sofern man nur den Begriff der Kette ( $\rho$ -simple set) sinngemäß verallgemeinert, was allerdings auf mehrere Weisen möglich ist; siehe hierzu Gottschalk (dies. Zbl. **47**, 285) und J. Schmidt (Ber. Math. Tag. Berlin 1953, im Druck). Natürlich ist der Existenzsatz von Wallace auch noch im Spezialfall, daß alle Elemente der geregelten Mengen  $E$  selbst Mengen sind, daß also  $E$  ein Mengensystem ist, mit dem Auswahlaxiom äquivalent; ja dies ist noch der Fall, wenn wir für die regelnde Relation  $\rho$  gewisse mengentheoretisch bedeutsame Relationen wählen. Wählt man beispielsweise die mengentheoretische Vergleichbarkeit, so erhält man den Existenzsatz von Hausdorff für den Fall von Mengensystemen, wählt man die Relation der Elementfremdheit, so erhält man den gleichfalls mit dem Auswahlaxiom äquivalenten Existenzsatz von Vaught [Bull. Amer. math. Soc. **58**, 66 (1952)]. Verf. beweist nun, daß auch die Negation der Relation der Elementfremdheit (hierorts als Verzahnung bezeichnet) dieselben Dienste leistet, sowie die relation d'empîement samt ihrer Negation: Mengen  $A$  und  $B$  heißen man empîants, wenn die Differenzmengen  $A - B$  und  $B - A$  beide nichtleer sind. Offen hingegen bleibt die Frage, ob dies auch für die Unvergleichbarkeit gilt. Verf. zeigt lediglich, daß aus der Existenz maximaler antichaines (maximaler Systeme paarweise unvergleichbarer Mengen, maximaler total ungeordneter Systeme) und aus dem Prinzip der totalen Ordnung das Auswahlaxiom folgt. [Das Prinzip der totalen Ordnung, das die Möglichkeit, eine Menge total zu ordnen, sichert, ist nach Mostowski (dies. Zbl. **22**, 120) mit dem Auswahlaxiom nicht äquivalent.] Die Note schließt mit einer Reihe ungelöster Fragen.

*J. Schmidt.*

**Denjoy, Arnaud:** Addition conventionnelle et figurée des permutations. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 770—773 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** Les suites finies d'entiers positifs génératrices de permutations. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 906—908 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** La définition d'un nombre ordinal non préconçu. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1001—1004 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** La figuration arithmétique des permutations éliées. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1102—1105 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** Les suites canoniques des nombres de seconde espèce de la classe II. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2033—2037 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** Les suites canoniques. I. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2129—2131 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** Les suites canoniques. II. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2405—2407 (1952).

**Denjoy, Arnaud:** Les nodaes des suites régulières. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 501—502 (1952).



In den ersten sieben der vorstehenden acht Mitteilungen gibt Verf. eine Inhaltsbeschreibung von Band II seines Buches „L'énumération transfinie“, Paris 1952, während die letzte Mitteilung eine Berichtigung bringt. Der inzwischen in zwei Heften erschienene Band II wird im Zbl. besprochen werden, so daß ein näheres Eingehen auf die obengenannten Noten hier unterbleiben kann. — Im ersten Heft des Bandes II beschäftigt sich Verf. mit der Realisierung von Zahlen  $\alpha$  der zweiten Zahlenklasse durch arithmetische Definition einer Wohlordnung der Menge der natürlichen Zahlen zum Typus  $\alpha$ ; dabei heischt insbesondere der Fall Interesse, daß eine direkte Definition von  $\alpha$  durch „ordinale“ Mittel nicht möglich erscheint. — Das zweite Heft von Band II ist dem Problem der Definition von ausgezeichneten Fundamentalfolgen für die Limeszahlen der zweiten Zahlenklasse gewidmet.

W. Neumer.

**Takeuti, Gaisi: A metamathematical theorem on the theory of ordinal numbers.**

J. math. Soc. Japan 4, 146—165 (1952).

Verf. beweist, daß die Theorie der Ordnungszahlen  $T_1$  widerspruchsfrei ist, vorausgesetzt, daß die  $T_2$  der Ordnungszahlen  $< \omega^\omega$  es ist. Dabei werden von Verf. sowohl  $T_1$  als auch  $T_2$  als deduktive Systeme im Gentzschenschen *LK*-Kalkül (dies. Zbl. 10, 145; 146) mit gewissen Axiomensystemen aufgefaßt. Das Axiomensystem von  $T_1$  enthält die speziellen Zeichen 0,  $\omega$ ,  $\ast'$  (Nachfolger von  $\ast$ ), = und  $<$ , und das von  $T_2$  überdies + und Min ( $\ast$ )  $\mathfrak{A}(\ast)$  [die kleinste Zahl  $\ast$ , die der Formel  $\mathfrak{A}(\ast)$  genügt]. Außer den Axiomen der transfiniten Induktion und der vollständigen Induktion (für die Zahlen  $< \omega$ ) wird  $T_1$  noch besonders durch das folgende Axiom charakterisiert: Wenn eine Formel  $\mathfrak{A}(x, s)$  eine eindeutige Funktion  $x = f(s)$  definiert, so gibt es ein  $x = x(u)$  für beliebiges  $u$ , so daß  $f(s) < x$  ist für alle  $s < u$ , und es gibt ein  $v = v(u)$  für beliebiges  $u$ , so daß für mindestens ein  $x(< v)$   $x \neq f(y)$  mit jedem  $y < u$  gilt. Statt des letzten Axioms enthält  $T_2$  das Axiom: Für jedes  $x$  gibt es ein  $y$ , das größer als  $x$  ist, und es gilt  $u + v < y$  für alle  $u, v < y$ . Darum machen die Ordnungszahlen  $< \omega^\omega$  das kleinste System von  $T_2$  aus. Verf. nennt die Theorien  $T_1$  und  $T_2$  schwächere Theorien, weil in  $T_1$  und  $T_2$  die Zuordnung der Ordnungszahlen immer durch logische Formeln definiert wird, also die Ordnungszahlen in  $T_1$  und  $T_2$  nur schwächere Beziehungen auf Kardinalzahlen haben als die Theorie der Ordnungszahlen in der Zermelo-Fraenkel-Gödelschen axiomatischen Mengenlehre. Das bestimmt den Sinn und die Tragweite des Axiomensystems des Verfassers.

S. Kuroda.

**Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:**

• **Randolph, John F.: Calculus.** New York: The Macmillan Company 1952. X, 483 p.

Si tratta di un'opera a fine didattico, nella quale lo sviluppo della teoria è efficacemente illustrato da esempi, problemi e figure. Il contenuto del volume è il seguente: Funzioni, limiti, derivate. Integrale definito. Applicazioni delle derivate. Funzioni trascendenti. Integrazione indefinita. Geometria analitica dello spazio. Derivate parziali. Integrali multipli. Ulteriori applicazioni. Approssimazione. Serie.

S. Cinquini.

• **Rogosinski, Werner W.: Volume and integral.** Edinburgh and London: Oliver and Boyd, Ltd.; New York: Interscience Publishers, Inc. 1952. IX, 160 p. with 11 fig. 10/6s net.

Kapitelüberschriften sind: 1. Punktmengen, 2. Inhalt, 3. Maß, 4. Riemann-Integral, 5. Lebesgue-Integral, 6. Differentiation und Integration. Das Büchlein, im Taschenformat der University-Mathematical-Texts, bietet in klassischer und zur Einführung vorzüglich geeigneter Form die Grundtatsachen des Lebesgueschen Maßes und Integrals im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, wobei in — auch sonst hervortretender — Betonung des geometrischen Standpunktes das Integral einer nicht-negativen Funktion als Maß der Ordinatenmenge eingeführt wird. Kap. 5 schließt mit dem Fubinischem Satz und den Beziehungen zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral. Kap. 6 beschränkt sich auf Funktionen einer Veränderlichen, erklärt in einem Intervall, und bringt neben den Fundamentalsätzen noch die partielle Integration und die Substitutionsregel. Hinsichtlich einer Weiterführung (Funktionenräume  $L^p$ , Länge, Oberfläche, Stieltjes-, Perron-Denjoy-Integral, Differentiationstheorie im  $n$ -dimensionalen Raum) wird auf Literatur verwiesen. G. Aumann.

**Aumann, Georg:** Zur Spiegelungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes. Arch. der Math. 3, 360 (1952).

Sehr einfache Zurückführung der Spiegelungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes auf die Translationsinvarianz, die auf der Bemerkung beruht, daß man die Spiegelungsinvarianz nur für Rechtecke nachzuweisen braucht und daß das Spiegelbild eines Rechtecks aus ihm auch durch eine Translation gewonnen werden kann.

A. Császár.

**Davies, R. O.:** Subsets of finite measure in analytic sets. Indagationes math. 14, 488—489 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 488—489 (1952).

In connection with a previous paper of A. S. Besicovitch (this Zbl. 46, 282) the author proves that every analytical set  $E$  (of a Euclidean space) of infinite  $A^s$ -measure contains closed subsets of arbitrary large finite measure. L. Cesari.

**Aumann, Georg:** Integralerweiterungen mittels Normen. Arch. der Math. 3, 441—450 (1952).

Es sei  $A$  eine gegebene Menge,  $\mathfrak{b}$  ein Mengenkörper von Teilmengen von  $A$ ,  $A \in \mathfrak{b}$ , und  $m(B)$  eine für  $B \in \mathfrak{b}$  erklärte nicht negative additive Mengenfunktion,  $0 < m(A) < +\infty$ . Man bezeichne mit  $\mathfrak{T}$  die Menge aller (reellen)  $\mathfrak{b}$ -Treppenfunktionen, und es sei  $T(t) = \sum_{i=1}^n c_i m(B_i)$ ,

wenn  $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$ ,  $B_i \cap B_j = 0$  für  $i \neq j$  und  $t(x) = c_i$  für  $x \in B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist. Be-

zeichnet man mit  $\mathfrak{G}$  die Menge aller auf  $A$  erklärter reeller (endlichen oder unendlichen) Funktionen, so kann man für reelles  $\alpha$  und  $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{G}$  die Funktionen  $\alpha \cdot f$  und  $f_1 + f_2$  durch die Vereinbarungen  $0 \cdot (\pm \infty) = 0$ ,  $+\infty - (+\infty) = 0$  eindeutig definieren. — Es sei in  $\mathfrak{G}$  eine Norm  $N$  mit folgenden Eigenschaften gegeben: a)  $0 \leq N(f) = N(|f|) \leq +\infty$ ; b) für  $|f_1| \leq |f_2|$  gilt  $N(f_1) \leq N(f_2)$ ; c) für endliches reelles  $\alpha$  gilt  $N(\alpha f) = |\alpha| N(f)$ ; d)  $N(f_1 + f_2) \leq N(f_1) + N(f_2)$ . Die Operation  $T$  sei gleichmäßig stetig bezüglich  $N$ , d. h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gebe es ein  $\delta > 0$  mit  $|T(t_1) - T(t_2)| < \varepsilon$  für  $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}$ ,  $N(t_1 - t_2) < \delta$ . — Es läßt sich dann eine Operation  $T^*$  auf der abgeschlossenen Hülle  $\mathfrak{T}^*$  von  $\mathfrak{T}$  (d. h.  $\mathfrak{T}^*$  besteht aus den Funktionen  $f \in \mathfrak{G}$ , für welche es eine Funktionenfolge  $\{t_n\} \subset \mathfrak{T}$  mit  $N(t_n - f) \rightarrow 0$  gibt) eindeutig erklären in der Weise, daß  $T^*$  auf  $\mathfrak{T}^*$  gleichmäßig stetig ist und auf  $\mathfrak{T}$  mit  $T$  zusammenfällt. — Versteht man unter  $[f]$  die Klasse aller Funktionen  $f' \in \mathfrak{G}$  mit  $N(f - f') = 0$ , so läßt sich in der Menge  $\tilde{\mathfrak{G}}$  dieser Äquivalenzklassen eine Norm  $\tilde{N}$  durch  $\tilde{N}([f]) = N(f)$ , die Operationen  $\alpha \cdot [f]$  und  $[f_1] + [f_2]$  durch  $[\alpha \cdot f]$  bzw.  $[f_1 + f_2]$  definieren; mit  $f$  gehören alle Funktionen von  $[f]$  zu  $\mathfrak{T}^*$ , die Menge der durch zu  $\mathfrak{T}^*$  gehörende Funktionen erzeugten Äquivalenzklassen sei  $\tilde{\mathfrak{T}}$ .  $\tilde{\mathfrak{T}}$  ist ein linearer Vektorraum, und die Operation  $\tilde{T}$  läßt sich auf  $\tilde{\mathfrak{T}}$  durch  $\tilde{T}([f]) = T^*(f)$  erklären.  $\tilde{\mathfrak{T}}$  ist ein metrischer Raum mit der Entfernung  $|\tilde{T}([f_1]) - \tilde{T}([f_2])| = \tilde{N}([f_1] - [f_2])$ .  $\tilde{\mathfrak{T}}$  ist in  $\tilde{\mathfrak{G}}$  abgeschlossen, und auf  $\tilde{\mathfrak{T}}$  ist  $\tilde{T}$  gleichmäßig stetig. —  $T$  besitzt auf  $\mathfrak{T}$  folgende Eigenschaften:  $\alpha$ ) aus  $t \in \mathfrak{T}$ ,  $\alpha$  reell folgt  $\alpha t \in \mathfrak{T}$ ,  $T(\alpha t) = \alpha T(t)$ ;  $\beta$ ) aus  $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}$  folgt  $t_1 + t_2 \in \mathfrak{T}$ ,  $T(t_1 + t_2) = T(t_1) + T(t_2)$ ;  $\gamma$ ) aus  $t \in \mathfrak{T}$  folgt  $|t| \in \mathfrak{T}$ ,  $T(|t|) \geq 0$ . Analoge Eigenschaften besitzen  $T^*$  auf  $\mathfrak{T}^*$  und  $\tilde{T}$  auf  $\tilde{\mathfrak{T}}$ . — Wendet man als Norm eine der folgenden Normen an:  $N_E(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$ ,  $N_R(f) = \inf_{\substack{t \in \mathfrak{T} \\ t \geq |f|}} T(t)$ ,

$N_L(f) = \inf_{\substack{0 \leq t_v \in \mathfrak{T} \\ \sum_{v=1}^n t_v \geq |f|}} \sum_{v=1}^n T(t_v)$ , so gelangt man bzw. zum sogenannten vollständigen Elementar-

integral, zum Riemannschen oder zum Lebesgueschen Integral.

A. Császár.

**Caccioppoli, Renato:** Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat., VIII. Ser. 12, 3—12, 137—146 (1952).

**Caccioppoli, Renato:** Misura e integrazione sulle varietà parametriche. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 219—227, 365—373 (1952).

In diesen vier Noten skizziert Verf. eine Maß- und Integraltheorie für „ $k$ -dimensionale Flächen“ im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E_n$ . Unser Referat kann nur einige Grundgedanken, etwa am Beispiel  $n = 3$ ,  $k = 2$ , andeuten. Betr. 1. und 2. Note. Es sei  $D$  eine (in  $E_3$ ) offene Menge mit beschränkter Begrenzung  $B(D)$ , wobei  $B(D)$  vom (3-dimensionalen Lebesgueschen) Maß  $m$  Null sein soll. Im folgenden werden nun nur solche  $D$  (mit den vorstehenden



Eigenschaften) in Betracht gezogen, die sich durch (offene) Polyeder  $P_n$  beliebig genau approximieren lassen im Sinne der Nikodymschen Metrik; genauer: Es sei  $I$  eine Borelsche Menge (im  $E_3$ ), ferner  $p$  eine (beliebige, aber) festgehaltene orientierte Ebene,  $B^*(P_n)$  die orientierte Begrenzung von  $P_n$  und  $\varphi(I, P_n, p)$  das (orientierte) Maß der Projektion des Durchschnittes  $I \cap B^*(P_n)$  auf  $p$ ; die Totalvariation dieser  $\sigma$ -additiven Funktion von  $I$  sei  $V(I, P_n, p)$ . Es sollen nun die  $V(I, P_n, p)$  gleichmäßig beschränkt sein ebenso wie die  $B(P_n)$  und  $D = (m) \lim P_n$ , d. h.  $\lim m(D \cap P_n) = 0$  mit  $D \cap P_n = (D - D \cap P_n) \cup (P_n - D \cap P_n)$ . Bei der hiermit erklärten Konvergenz der  $P_n$  gegen  $D$  konvergiert  $\varphi(R, P_n, p)$  für jedes achsenparallele Parallelepipед  $R$  mit Ausnahme von abzählbar vielen, gegen einen von der speziellen approximierenden Folge  $\{P_n\}$  unabhängigen Grenzwert. Auf Grund dieser Feststellung erklärt Verf. durch besagten Grenzwert eine in  $I$   $\sigma$ -additive, in  $D$  additive Funktion  $\varphi(I, D, p)$ , die als Erweiterung von  $\varphi(I, P_n, p)$  aufzufassen ist; in Zeichen  $\varphi(I, D, p) = \lim^* \varphi(I, P_n, p)$ . Im System dieser  $D$  ist nun  $\varphi(I, D, p)$  stetig in dem Sinne, daß  $\varphi(I, D, p) = \lim^* \varphi(I, D_n, p)$ , falls die  $B(D_n)$  und  $V(I, D_n, p)$  gleichmäßig beschränkt sind und falls  $D = (m) \lim D_n$ . Es sei nun  $F$  die orientierte Begrenzung von  $D$ . Wählt man der Reihe nach für  $p$  die 3 Koordinatenebenen  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , so erhält man 3 Funktionen  $\varphi_i(I, D) = \varphi(I, D, p_i)$  und als 2-dimensionales Maß von  $S = IF$  das (Burkill-)Integral  $s(S) = \int_I \left( \sum_i (d\varphi_i)^2 \right)^{1/2} = \lim \sum_k \left( \sum_i (\varphi_i(I_k))^2 \right)^{1/2}$ , wobei  $I = I_1 + \dots + I_k$  und wobei der maximale Durchmesser der  $I_1, \dots, I_k$  gegen Null geht. Als Normale von  $F$  in  $P$  wird weiter der (fast überall existierende) Vektor  $(d\varphi_1/ds, \dots, d\varphi_3/ds)$  erklärt. Mit diesen Ansätzen ist der Weg für den weiteren Aufbau der Theorie geebnet. Am Schluß werden auch die Sätze von Gauß-Green und von Stokes besprochen. — In der 3. und 4. Note behandelt Verf. den Fall der durch Parameterdarstellung gegebenen Mannigfaltigkeiten, und zwar unter Bezugnahme auf seine früheren einschlägigen Arbeiten; dabei weist Verf. auch auf Unterschiede seiner Theorie gegenüber den von anderen Autoren entwickelten hin.

Otto Haupt.

Reifenberg, E. R.: Parametric surfaces. IV. The generalized Plateau problem. J. London math. Soc. 27, 448—456 (1952).

Part II and III see this Zbl. 46, 283 and 47, 60. Let  $A^2$  be the 2-dimensional Hausdorff measure over the Euclidean space  $E_3$ ; let  $F(P)$  be a positive bounded lower semicontinuous function defined in  $E_3$ ; let  $\Gamma$  be any continuous parametric contour. Object of this paper is to prove the theorem that the integral  $I = \int_S F(P) dA^2$  attains its minimum in the class of all continuous parametric surfaces  $S$  subtending  $\Gamma$ . The author's procedure is based on a smoothing process which takes the place of a previous simpler one of A. S. Besicovitch concerning the analogous problem for the area ( $F = 1$ ), and on a Lemma stating the lower semicontinuity of the integral  $J = \int_S F(P) dL^*$ , where  $L^*$  is the Lebesgue area considered as an outer Carathéodory

measure. The fact that such a lemma concerning  $J$  can be used in a proof for the existence of the minimum of  $I$  is due to the known fact that for smooth surfaces  $I = J$ . — The reviewer has consistently used the standard property of lower semicontinuity of Lebesgue area in surface area theory and in Calculus of Variations; nevertheless he could not follow the proof of the lemma, which draws heavily upon properties of the 2-dimensional Hausdorff measure and practically on the whole series of results of E. R. Reifenberg and A. S. Besicovitch [E. R. Reifenberg, this Zbl. 44, 280; 46, 283; 47, 60; A. S. Besicovitch, this Zbl. 38, 264; 37, 42; 40, 349]. The reviewer cannot conceal the impression that a clearer proof of the Lemma could be given by using only Lebesgue area. With regard to the theorem itself it might be said that all proofs known to the reviewer for the Plateau and analogous problems suppose that  $\Gamma$  is a simple curve in  $E_3$ , while E. R. Reifenberg and A. S. Besicovitch appear to disregard this hypothesis.

L. Cesari.

Plessis, Nicolaas du: A theorem about fractional integrals. Proc. Amer. math. Soc. 3, 892—898 (1952).

Soient:  $f \in L^q(0, 1)$ ;  $F$  l'intégrale d'ordre  $\alpha/q'$  de  $f$  [ $0 < \alpha < 1$ ,  $q' = q/(q-1)$ ];  $E$  l'ensemble des points où  $F$  est infini;  $C_\beta(E)$  la capacité d'ordre  $\beta$  de  $E$  (i. e. au sens des potentiels en  $r^{\beta-1}$ ). L'A. montre que  $C_\alpha(E) = 0$  si  $1 \leq q \leq 2$ ,  $C_\beta(E) = 0$  pour tout  $\beta < \alpha$  si  $2 < q < \infty$ . En un certain sens ces résultats sont les meilleurs possibles; je signale qu'on peut les étendre à l'espace, en remplaçant les intégrales d'ordre fractionnaire par des potentiels; le cas  $q = 2$  est d'ailleurs connu:  $F$  est alors un potentiel d'ordre  $\alpha$  d'énergie finie (voir J. Deny, ce Zbl. 34, 362).

J. Deny.

Seki, Setsuya: On the change of variables in the multiple integrals. J. math. Soc. Japan 4, 218—230 (1952).

Es wird gezeigt: Wenn die Abbildung  $f(x)$  ein beschränktes Gebiet  $D$  des

$n$ -dimensionalen Raumes homöomorph auf ein Gebiet  $f(D)$  abbildet, wenn sie jede Teilmenge von  $D$ , deren Maß Null ist, wieder auf eine Menge vom Maß Null abbildet und wenn die die Abbildung vermittelnden Funktionen fast überall total differenzierbar (nach Stolz, s. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 644) sind, wenn schließlich  $g(y)$  über  $f(D)$  integrierbar im Lebesgueschen Sinne ist, so gilt  $\int_{f(D)} g(y) dy = \int_D g(f(x)) |J| dx$ , worin  $J$  die Jacobische Funktional-

determinante bedeutet. Der Beweis ist von dem von Rademacher [Math. Ann. **79**, 340—359 (1919), **81**, 52—63 (1920)] und Tsuji (dies. Zbl. **40**, 174) verschieden. Verf. betrachtet auch noch Abbildungen, die nicht homöomorph, sondern nur stetig und in  $D - E$  im Kleinen homöomorph sind, wo  $E$  das Maß Null hat. Ist dann  $f(D, m)$  die Teilmenge von  $f(D)$ , in der der Abbildungsgrad  $m$  ist, so gilt: Wenn eines der Integrale  $\int_D g(f(x)) J dx$  und  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} m \int_{f(D, m)} g(y) dy$  endlich ist, so ist es auch das andere, und beide sind einander gleich. *G. Lochs.*

**Helsel, R. G. and N. Levine:** Absolutely continuous product transformations of the plane. Duke math. J. **19**, 595—603 (1952).

Let  $T: p = p(w)$ ,  $w \in A$ , denote any continuous mapping from an open bounded connected set  $G$  of the  $w$ -plane into the  $p$ -plane. The authors take into considerations both concepts of absolute continuity, namely the concept of absolute continuity in the sense of Banach (ACB) [Fundamenta Math. **7**, 225—236 (1925)] and the more recent and general concept of absolute continuity (AC) which T. Radó and the reviewer have introduced in different but equivalent forms (T. Radó, Length and area, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **30**, New York 1948; this Zbl. **33**, 170; L. Cesari, this Zbl. **26**, 308; **27**, 389). More precisely one of Radó's forms is used. For both ACB and AC transformations a concept of derivative  $D(w)$  (absolute generalized Jacobian) can be introduced. Let  $T = T_2 T_1$  denotes the product of two mappings  $T_1: p = p(w)$ ,  $w \in A$ ,  $T_2: q = q(p)$ ,  $p \in B$ ,  $T_1(A) \subset B$ . The authors prove first by examples that if both  $T_1$  and  $T_2$  are ACB [AC] then it may happen that  $T$  is not ACB [AC]. If both  $T_1$  and  $T_2$  are ACB then a necessary and sufficient condition in order that also  $T$  is ACB is that the function  $D(w) = D_2[p(w)] D_1(w)$  is summable in  $A$ , where  $D_1$  and  $D_2$  denote the derivatives of the mappings  $T_1$  and  $T_2$ . If the condition above is satisfied then  $D(w)$  is the derivative of  $T$  a. e. in  $A$ . These results are extended to AC mappings provided  $T_2$  is topological. *L. Cesari.*

**Sambo, Alberto:** Sulla derivazione sotto il segno di integrale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **2**, 252—255 (1952).

L'A. dà una dimostrazione di un teorema di Volpato (questo Zbl. **46**, 59) sulla derivazione dell'integrale  $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ , secondo il quale teorema la formula di

derivazione consueta vale quasi-ovunque, se  $\alpha(y)$  e  $\beta(y)$  sono assolutamente continue e monotone in senso stretto e se  $f(x, y)$ , misurabile rispetto alla  $x$  e continua rispetto alla  $y$  nell'insieme  $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , soddisfa a limitazioni del tipo  $|f(x, y)| < M(x)$  e  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < M(x) |y_1 - y_2|$ , con  $M(x)$  sommabile.

*G. Scorza Dragoni.*

**Jessen, Børge:** On strong differentiation. Mat. Tidsskr. B **1952**, 90—91 (1952).

Verf. verbessert eine früher (dies. Zbl. **39**, 287) von ihm angegebene Konstruktion. *Otto Haupt.*

**Picone, Mauro:** Su un criterio del Dini di convergenza uniforme. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **7**, 106—108 (1952).

Konvergieren die über  $a \leq x \leq b$  definierten stetigen Funktionen  $f_n(x)$  gegen  $f(x)$ , dann bemerkt Verf. die folgende Bedingung für die Gleichmäßigkeit der Konvergenz als notwendig und hinreichend: Sei  $p_n(x) = |f(x) - f_n(x)| + 1/n$ , dann existiert zu jeder Unterfolge  $\{p_{n_k}(x)\}$  eine monoton fallende Teilfolge. Dieses Kri-



terium läßt sich auf Funktionenfolgen übertragen, die über einer abgeschlossenen, kompakten Teilmenge eines Hausdorffschen Raumes definiert sind und deren Wertevorräte in einem beliebigen metrischen Raum liegen. *H. Beckert.*

**Danskin, J. M.:** Dresher's inequality. Amer. math. Monthly **59**, 687—688 (1952).

Die fragliche Ungleichung lautet

$$\left( \frac{\int (f+g)^p}{\int (f+g)^r} \right)^{1/(p-r)} \leq \left( \frac{\int f^p}{\int f^r} \right)^{1/(p-r)} + \left( \frac{\int g^p}{\int g^r} \right)^{1/(p-r)} \quad (p \geq 1 \geq r \geq 0, f, g > 0),$$

Sie wird aus der Minkowskischen Ungleichung und aus der sog. zweigliedrigen Raisonschen Ungleichung

$$\frac{(a_1 + a_2)^{s+1}}{(b_1 + b_2)^s} \leq \frac{a_1^{s+1}}{b_1^s} + \frac{a_2^{s+1}}{b_2^s} \quad [a_1, a_2 \geq 0; b_1, b_2, s > 0],$$

die eine unmittelbare Konsequenz der Hölderschen Ungleichung ist, abgeleitet. (S. Hardy-Littlewood-Pólya: Inequalities, Cambridge 1934. S. 157, 146, 61 bzw. 24; dies. Zbl. **10**, 107). — Es wird auch bemerkt, daß dies eine Ungleichung von E. F. Beckenbach (dies. Zbl. **35**, 157) verallgemeinert. *J. Aczél.*

**Bang, Thøger:** Sur les points singuliers (dans un sens généralisé) des fonctions indéfiniment dérivables. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 259—263 (1952).

Soit  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) une fonction indéfiniment dérivable,  $C$  l'ensemble de ses points singuliers au sens de Cauchy,  $P$  l'ensemble de ses points singuliers au sens de Pringsheim (cf. Zahorski, ce Zbl. **33**, 255). Le complémentaire de  $C$  est dense sur la droite réelle et  $P$  est un  $G_\delta$ . Inversement Zahorski a démontré que si l'on a un ensemble  $C$  dont le complémentaire est dense et un ensemble  $P$  qui est un  $G_\delta$ ,  $C$  et  $P$  étant sans points communs, alors il existe une fonction indéfiniment dérivable dont les points singuliers respectifs sont précisément  $C$  et  $P$  et qui est régulière hors de  $C \cup P$ . La construction de Zahorski est difficile et utilise des méthodes complexes (th. de Runge). L'A. esquisse très succinctement une démonstration réelle qui devrait être plus simple que celle de Zahorski. La construction de l'A. s'applique aussi à un problème plus général. *J. Horváth.*

### Allgemeine Reihenlehre:

**Krishnamoorthy, A. S.:** On the ratios of one term to the partial sums in a divergent series of positive terms. Math. Student **19**, 102—104 (1952).

Es bedeute  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ,  $d_n > 0$ , eine divergente Reihe mit den Teilsummen  $D_n = \sum_{v=1}^n d_v$ , und es sei  $\alpha_n = \frac{d_n}{D_n}$ . Anknüpfend an F. W. Bradley und A. Edrei (dies. Zbl. **32**, 273) zeigt Verf.: Zu vorgegebenen  $\alpha_n$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ,  $0 < \alpha_n < 1$ , existiert genau eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  mit vorgegebenem Anfangsglied  $d_1$ , für die  $\alpha_n = d_n/D_n$  ( $n \geq 2$ ) gilt. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/D_{n+k}$  existiert dabei für beliebiges ganzes  $k$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$  existiert, und es ist gegebenfalls  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/D_{n+k} = \alpha(1 - \alpha)^k$ . *F. Lösch.*

**Rajagopal, C. T.:** Sui criteri del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **7**, 382—387 (1952).

Das umfassendste Ergebnis der Arbeit lautet: Sei  $0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \dots$ ,  $D_n \rightarrow \infty$ ,  $D_{n+1} - D_n = O(1)$ ;  $u_n > 0$ ,  $f(x)$  definiert für  $x > 0$  und mit stetiger Ableitung  $f'(x)$  versehen,  $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$ . Es bestehe die Ungleichung

$(\log u_{n+1} - \log u_n) / (D_{n+1} - D_n) \leq f(D_{n+1}) [\geq f(D_{n+1})]$ . Dann ist  $\int \exp\left(\int^x f(t) dt\right) dx < \infty$  [ $= \infty$ ] hinreichend für die Konvergenz [Divergenz] von  $\sum u_n (D_{n+1} - D_n)$ . Dieser Satz findet sich im wesentlichen schon bei Verf. (dies. Zbl. 25, 313). Er enthält, abgesehen von den vielen Kriterien, die Verf. selbst entwickelt hat, das Kummer'sche Kriterium sowie die Ergebnisse von Martin (dies. Zbl. 27, 52) und Bonferroni (dies. Zbl. 38, 210), wie Verf. auseinandersetzt.

L. Schmetterer.

Srivastava, R. S. L.: On a class of method of summability. *Ganita* 3, 71—77 (1952).

Für ein konvergenztreues Verfahren  $V = (v_{nk})$  sei  $\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}$  als Multiplikator bezeichnet. Dann definiert die Summe einer regulären Matrix mit endlich vielen konvergenztreuen Matrizen  $B_k$  mit Multiplikator  $\varrho_k = 0$  eine reguläre Matrix. Das gilt auch für unendlich viele  $B_k$ , falls  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$  ist ( $M_k = \overline{\lim}_n Z_n^{(k)}$ , wo  $Z_n^{(k)}$  die  $n$ -te Zeilennorm für  $B_k$  ist). Dies liefert einen neuen Beweis für die Permanenz des  $(R, \log n, 1)$ -Verfahrens. Sodann wird die Äquivalenz der Verfahren  $(R, \log n, 1)$  und  $(R, 1)$  [durch die Transformation  $t_n = (\log n)^{-1} \cdot (s_1 + s_2/2 + \dots + s_n/n)$  definiert] für Folgen  $\{s_n\}$  mit  $s_n = o(\log n)$  bewiesen; letztere Bedingung ist überflüssig [vgl. z. B. G. H. Hardy, *Divergent Series* (Oxford 1949, dies. Zbl. 32, 58), p. 87]. Die im letzten Teil der Arbeit genannten Resultate sind fehlerhaft; so wird z. B. angegeben, daß eine reguläre Matrix, die Indexverschiebung in beiden Richtungen erlaubt, die Folge  $\{(-1)^n\}$  gegen 0 limitiert, was z. B. für die Einheitsmatrix falsch ist.

D. Gaier.

Agnew, Ralph Palmer: Rogosinski-Bernstein trigonometric summability methods and modified arithmetic means. *Ann. of Math.*, II. Ser. 56, 537—559 (1952).

This paper contains an all but exhaustive discussion of the methods  $(B^h)$  (cf. G. M. Petersen, this Zbl. 47, 299). It is shown that  $(B^h) = (C_1)$  for  $h = 0$  and  $h > \frac{1}{2}$ , but that  $(B^h) \supset (C_1)$  for  $0 < h \leq \frac{1}{2}$ . Again two such methods, with  $0 < h \leq \frac{1}{2}$ , are not comparable with each other. The methods  $(B^h)$  are closely related to the methods  $(M^h)$  and  $(M_*^h)$ , the defining transformations of which are  $g_n = (1-h) \frac{n}{n+1} \sigma_{n-1} + h \sigma_n$ ,  $g_n^* = (1-h) \sigma_{n-1} + h \sigma_n$ , respectively; the  $\sigma_n$  are the arithmetical means of the partial sums. The methods  $(M^h)$ ,  $(M_*^h)$ , and  $(B^h)$  are equivalent for  $\frac{1}{2} \leq h \leq 1$ .

W. W. Rogosinski.

Ščeglov, M. P.: Über die Teilfolgen der Česaroschen Mittel. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 87, 517—520 (1952) [Russisch].

Sei  $\sigma_n = \sum_{v=0}^n \frac{n+1-v}{n+1} a_v$  ( $C_1$ -Transformation);  $n_m \uparrow \infty$ ,  $d = \varliminf \sigma_n$ ,  $d' = \varliminf \sigma_{n_m}$ ,  $D' = \overline{\lim} \sigma_{n_m}$ ,  $D = \overline{\lim} \sigma_n$ . Verf. untersucht Beziehungen zwischen  $d$ ,  $d'$ ,  $D'$ ,  $D$  (T 1—T 5). Z. B. T 3: Aus  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  und  $n_{m+1}/n_m \rightarrow 1$  folgt  $d = d'$ ,  $D' = D$ . T 5: Bei  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $1 < \overline{\lim} n_{m+1}/n_m < \infty$  können  $d$  usw. jedoch in „weiten Grenzen“ frei gewählt werden. — Ähnliche Fragen beim Abelverfahren wurden vom Verf. [*Mat. Sbornik*, n. Ser. 14, 109—130 (1944)] behandelt. Vgl. auch nachsteh. Referat. und dies. Zbl. 42, 68.

K. Zeller.

Ščeglov, M. P.: Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy-Landau-Vijayaraghavan. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 87, 697—700 (1952) [Russisch].

$\sigma_n$  sei die  $C_1$ -Transformierte von  $s_n = \sum_{v=0}^n a_v$ . Es gilt

$$d = \varliminf \sigma_n \leq d' = \varliminf \sigma_n \leq D' = \overline{\lim} \sigma_n \leq D = \overline{\lim} s_n.$$



Verf. macht bei dieser Ungleichung Fallunterscheidungen ( $<$  oder  $=$ , endlicher oder unendlicher Wert) und untersucht, welche Fälle auftreten und inwieweit die Häufungsgrenzen vorgeschrieben werden können, wenn die  $a_n$  noch Einschränkungen wie  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $a_n < O\left(\frac{1}{n \lg \lg n}\right)$  unterworfen werden. Unter letzterer Bedingung z. B. hat man entweder  $-\infty < d = d' \leq D' = D < +\infty$  oder  $-\infty < d < d' < D' = D = +\infty$ , worin ein Umkehrsatz von Vijayaraghavan, J. London math. Soc. 2, 215—222 (1927) enthalten ist. Vgl. auch vorsteh. Referat.

K. Zeller.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bari, N. K.: Über primitive Funktionen und fast überall konvergente trigonometrische Reihen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 687—702 (1952) [Russisch].

Anknüpfend an Ergebnisse und Methoden von Luzin [Mat. Sbornik 28, 266—294 (1912)] und Meňšov (dies. Zbl. 28, 51) beweist Verf. den folgenden Satz: Zu jeder Funktion  $f(x)$ , die in  $[-\pi, \pi]$  meßbar und fast überall endlich ist, gibt es ein  $F(x)$  mit den Eigenschaften:  $F(x)$  ist stetig,  $F'(x) = f(x)$  gilt fast überall, die gliedweise differenzierte Fourierreihe von  $F(x)$  konvergiert fast überall gegen  $f(x)$ .

K. Zeller.

Arrault, Jean: Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique. Bull. Soc. math. France 80, 253—317 (1952).

An extensive study of absolute convergence of a trigonometrical series  $\sum_0^\infty \varrho_n \sin(n\alpha + \varphi_n)$ ,  $\varrho_n \geq 0$ . The classical results are: If the series converges absolutely in a set of positive measure, or in a set of the second category, or in a basis for the continuum, then it converges absolutely everywhere; and  $\sum \varrho_n < \infty$ . Also the set of absolute convergence is symmetrical with respect to any of its points (for the history and further details of this problem see A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warsaw—Lwów 1925, Chapter VI; this Zbl. 11, 17). The author sets out to characterize a set  $E$  in which some trigonometrical series converges absolutely without doing so everywhere. Such a set is said to be of type  $N$ . In the first part of the paper it is shown that such an  $E$  is a union of closed sets, that it is symmetrical with respect to the midpoint of any two of its points, and that it is an additive group. It is the group property in particular which permits a deeper study of such  $N$ -sets. The classical results are obtained again. Other consequences are: the union of an  $N$ -set and any enumerable set is again an  $N$ -set; one may even add certain classes of perfect sets. The vector space over the rational numbers generated by an  $N$ -set is itself of type  $N$ . Many other results of similar kind are obtained, and some interesting special series are discussed for the sake of illustration. In the second part of the paper sets are discussed where some sine series  $\sum_0^\infty \sin k_n x$  ( $k_n$  integral,  $k_n \uparrow \infty$ ) converges absolutely [sets of type  $N_0$ ]. A set of type  $N_0$  is, clearly, an  $N$ -set, but the converse is usually not true. Thus the above vector space generated by an  $N_0$ -set is of type  $N$  but not of type  $N_0$ . On the other hand, the union of an  $N_0$ -set and any enumerable set remains an  $N_0$ -set. The final part of the paper deals with further aspects of absolute convergence and, in particular, with the structure of perfect sets of type  $N$ . — Unfortunately, the reading of this important paper is very difficult. The definitions and notations used are often vague and not consistently employed. Moreover, there are numerable misprints of the most confusing kind.

W. W. Rogosinski.

Szegő, G.: On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 228—238 (1952).

Let  $f(\vartheta)$  be a non-negative function,  $L$ -integrable over  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ , and let  $K_n = \sum_{\nu, \mu=0}^n c_{\nu-\mu} x_\mu \bar{x}_\nu$  where  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta$ . It was formerly proved by the author [Math. Ann. 16, 490—503 (1915)] that  $\frac{n+1}{\sqrt{D_n(f)}} \rightarrow G(f)$  as  $n \rightarrow \infty$ , where  $D_n(f)$  is the determinant of  $K_n$  and  $G(f)$  denotes the geometrical mean of  $f$ .

It is now shown that even  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n(f)}{G(f)^{n+1}}$  exists provided that  $f'$  exists and satisfies a certain Lipschitz condition. An explicit formula for this limit is also given.

W. W. Rogosinski.

**Fejér, Leopold:** Eigenschaften von einigen elementaren trigonometrischen Polynomen, die mit der Flächenmessung auf der Kugel zusammenhängen. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Ries, 62—72 (1952).

A historical discussion of certain elementary trigonometrical identities which are equivalent to geometrical formulae of Archimedes and Snellius. In connection with this certain non-negative sine polynomials are discussed, and a new and interesting proof is given that

$$\sin \vartheta + \frac{\sin 2 \vartheta}{2} + \cdots + \frac{\sin n \vartheta}{n} > 0 \quad \text{for } 0 < \vartheta < \pi.$$

W. W. Rogosinski.

**Tomić, M.:** Einige Sätze über die Positivität der trigonometrischen Polynome. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 145—156 (1952).

Verf. gibt zunächst einen neuen Beweis der Fejérschen Ungleichung  $\sum_{v=1}^n v^{-1} \sin v \theta > 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  und  $0 < \theta < \pi$ . Er unterscheidet sich von Fejérs eigenem Beweise dadurch, daß Verf. den Rest der unendlichen Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} v^{-1} \sin v \theta$  abschätzt. Dieser Gedanke erlaubt es

dem Verf. auch, das positive Zeichen einiger anderer Sinus- und Cosinuspolynome festzustellen, sogar solcher, deren Vorzeichen schwächer als  $1/n$  gegen 0 streben — einen Befund, der sich nicht aus Fejérs Umformung trigonometrischer Polynome ablesen läßt. — Es werde  $\Delta c_v = c_v - c_{v+1}$ ,  $\Delta^2 c_v = c_v - 2c_{v+1} + c_{v+2}$  gesetzt,  $v = 0, 1, 2, \dots$ . Aus den Annahmen  $\Delta c_1 \geq \Delta c_2 \geq \dots \geq \Delta c_{n-1} \geq \Delta c_n \geq 0$  mit  $c_{n+1} = 0$  bei festem  $n$  folgerte Fejér (dies. Zbl. 15, 109), daß  $S_n(\theta) = \sum_{v=1}^n c_v \sin v \theta \geq 0$

für  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Verf. beweist den hiervon in Voraussetzungen und Behauptungen verschiedenen Satz 2: Es sei  $c_v \geq 0$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , und (1)  $\Delta c_1 \geq \Delta c_2 \geq \dots \geq \Delta c_{n-1} \geq 0$ ; ferner sei

$$p c_{2p} \leq \sum_{v=1}^{p-1} v \Delta^2 c_{2v-1} + p(c_{2p-1} - c_{2p}) \quad \text{für } p = 1, 2, \dots, [n/2].$$

Dann ist  $S_n(\theta) \geq 0$  für  $0 \leq \theta \leq \pi$ , und es sind dort auch die Abschnitte  $S_q(\theta) \geq 0$ ,  $q = 1, \dots, n$ . Beim Beweise des Satzes 2 wird die unter den Annahmen (1) aus einer Fejérschen Identität herleitbare Ungleichung (2)  $S_n(\theta) \geq \Delta^2 c_1 \sin \theta + \frac{1}{2} c_n \sin n \theta$  und folgender Hilfssatz benutzt: Für ein be-

stimmtes  $n$  sei  $k = [n/2]$ , und es gelte  $\sum_{h=1}^{2k} (-1)^{h-1} h c_h \geq 0$ , ferner (1); dann ist  $(n+1) c_n \leq$

$2(c_1 - 2c_2 + 3c_3) \leq 6\Delta^2 c_1$ . — (2) läßt sich auch aus dem ebenfalls von Fejér stammenden Satz 3 herleiten: Ist  $a_v > 0$ ,  $\Delta a_v \geq 0$ ,  $\Delta^2 a_v \geq 0$  für  $v = 0, 1, 2, \dots$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ , so ist

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos v \theta \geq \frac{1}{2} \Delta^2 a_0 \quad \text{für } 0 < \theta < 2\pi.$$

Die Schwierigkeit der Beweise besteht darin, die  $S_n(\theta)$  nahe  $\theta = \pi$  als positiv zu erkennen, in kleinerem Bereiche bleibt  $S_n(\theta)$  unter schwächeren Annahmen positiv; Satz 4: Es gilt  $S_n(\theta) > 0$  in  $(0, \pi/2)$ , wenn außer (1) und  $c_n > 0$  noch  $c_{n+1} < c_1/2$  gilt. Verf. beweist dies durch ein geometrisches Verfahren, das er schon früher auf ähnliche Fragen anwandte (dies. Zbl. 33, 244; 34, 334; 41, 200).

L. Koschmieder.

**Zarantonello, Eduardo H.:** On trigonometric interpolation. Proc. Amer. math. Soc. 3, 770—782 (1952).

It is well known that for every trigonometric polynomial  $P(t)$  of degree  $n$  and  $2n+1$  equidistant (mod  $2\pi$ ) points  $t_k$ :

$$(1) \quad \left\{ \int_0^{2\pi} |P(t)|^2 dt \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} |P(t_k)|^2 \Delta t_k \right\}^{1/2}, \quad \Delta t_k = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

J. Marcinkiewicz (this Zbl. 16, 19) extended this relation to exponents other than 2, the above identity being then replaced by two inequalities. In the present paper, (1) is extended to  $r$ th derivatives and  $r$ th divided differences  $P^{[r]}$  with the constant increment  $\Delta t_k = 2\pi/(2n+1)$ ,



and the following inequalities are obtained:

$$(a) \quad \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} |P^{[r]}(t_k)|^p \Delta t_k \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |P^{(r)}(t)|^p dt \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^{2n+1} |P^{[r]}(t_k)| \log^+ |P^{[r]}(t_k)| \Delta t_k \leq \int_0^{2\pi} |P^{(r)}(t)| \log^+ |P^{(r)}(t)| dt,$$

$$(c) \quad \left\{ \int_0^{2\pi} |P^{(r)}(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq B_{p,r} \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} |P^{[r]}(t_k)|^p \Delta t_k \right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty),$$

$$(d) \quad \int_0^{2\pi} |P^{(r)}(t)| dt \leq B_{1,r} \sum_{k=1}^{2n+1} |P^{[r]}(t_k)| \log^+ |P^{[r]}(t_k)| \Delta t_k + D_r,$$

$$(e) \quad \text{if } |P^{[r]}(t_k)| \leq 1, \text{ then } \int_0^{2\pi} \exp[\lambda |P^{[r]}(t)|^{1/\lambda}] dt \leq \mu_{\lambda,r} \quad (0 \leq \lambda < \Delta_r),$$

where the constants are all finite and depend on their subindices only. In fact, (a) and (b) are valid for all periodic functions  $f(t)$  of period  $2\pi$  with absolutely continuous derivatives up to the  $(r-1)$ st order, and are contained in the more general inequality

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \varphi(|f^{[r]}(t_k)|) \Delta t_k \leq \int_0^{2\pi} \varphi(|f^{(r)}(t)|) dt$$

where  $\varphi(x)$  is any non-negative, nondecreasing convex function. — These results allow interesting applications to the problem of approximation by trigonometric interpolation. Let  $f(t)$  be a function as above and let  $P(t)$  be a trigonometric polynomial of degree  $n$  coinciding with  $f(t)$  in more than  $2n$  equidistant points (mod  $2\pi$ ). Then the following inequalities hold:

$$(\alpha) \quad |f(t) - P(t)| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{r-1/p} M_{r,p} \left\{ \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|^p dt \right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty),$$

$$(\beta) \quad \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t) - P(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \frac{1}{n^r} N_{r,p} \left\{ \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|^p dt \right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty),$$

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - P(t)| dt \leq \frac{1}{n^r} \left\{ N_{r,1} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)| \log^+ |f^{(r)}(t)| dt + Q_r \right\},$$

the constants being all finite and depending on their subindices only.

B. Sz.-Nagy.

Karamata, J.: Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math 4, 69—88 (1952).

Gegeben sei eine trigonometrische Reihe der Form (1)  $G_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(n) e^{v\theta i}$ , deren reelle Vorzahlen  $C_\nu(n)$  von einem — ganzen oder nicht ganzen — Parameter  $n$  abhängen. Man nehme an, daß die  $C_\nu(n)$  eine asymptotische Entwicklung (a. E.) zulassen, die nach den Kehrwerten  $[q_\mu(n)]^{-1} = q_\mu^{-1}(n)$  der Glieder  $q_\mu(n)$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) einer alle Schranken immer rascher überflügelnden Folge fortschreiten. Wann läßt sich dann  $G_n(\theta)$  selbst in eine solche

Reihe entwickeln? Diese Frage beantwortet Verf. wie folgt: Ist (2)  $C_\nu(n) = \sum_{\mu=0}^k \gamma_\mu(\nu) q_\mu^{-1}(n) +$

$o[q_k^{-1}(n)]$ ,  $n \rightarrow \infty$ , so gilt tatsächlich (3)  $G_n(\theta) = \sum_{\mu=0}^k \Gamma_\mu(\theta) q_\mu^{-1}(n) + o[q_k^{-1}(n)]$ ,  $n \rightarrow \infty$ , mit

(4)  $\Gamma_\mu(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\mu(\nu) e^{v\theta i}$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, k$ , wenn die Reihen (1) und (4) konvergieren und

$C_\nu(n) = A_\nu B_\nu(n)$  ist ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ), wo die  $A_\nu$  eine voll einsinnige und die  $B_\nu(n)$  eine Folge bilden, deren  $K$ -te Differenz mit  $1/\nu$  abnehmend gegen 0 strebt; außerdem soll  $B_\nu(n) =$

$\sum_{\mu=0}^k p_\mu(\nu) q_\mu^{-1}(n) + o[q_k^{-1}(n)]$ ,  $n \rightarrow \infty$ , gelten mit Vorzahlen  $p_\mu(\nu)$ , die Polynome niederen als

$K$ -ten Grades von  $\nu$  sind. — Wenn (1) und (4) nicht konvergieren, die übrigen Annahmen aber weiter bestehen, so sind, wie Verf. beweist, (1) und (4) doch  $A$ -summierbar, und das Gesagte bleibt gültig, wenn man (1) und (4) durch ihre Abelschen Summen ersetzt, d. h. durch  $G_n(\theta) =$

$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(n) r^\nu e^{v\theta i}$ ,  $\Gamma_\mu(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\mu(\nu) r^\nu e^{v\theta i}$  ( $\mu = 0, 1, \dots, k$ ). Gerade diese Ausdeh-

nung der ursprünglichen Aussage ermöglicht die Anwendungen, z. B. auf die a. E. der Legendreschen Funktionen  $P_n, \mathfrak{Q}_n$ . Verf. gewinnt erstens, von Heines Sinusreihe für  $P_n(\cos \theta)$  ausgehend, das klassische Ergebnis wieder,

$$P_n(\cos \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu 2^\mu a_\mu \frac{\operatorname{Im} [f^{(\mu)}(e^{2\theta i}) e^{(n+2\mu+1)\theta i}]}{a_n(2n+1)(2n+3) \cdots (2n+2\mu+1)} + o(n^{-k-1/2})$$

mit  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig für  $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ ; dabei ist  $f(z) = (1-z)^{-1/2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$ .

— Zweitens findet er eine neue a. E. der  $P_n$  nach den negativen Potenzen von  $n + \lambda$ , wo  $\lambda$  beliebig reell. Wenn man  $P_n(\cos \theta) = 4\pi^{-1} \operatorname{Im} [e^{(n+1)\theta i} S_n(2\theta)]$  setzt, so wird  $S_n(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu a_\mu \frac{f_\mu(e^{\theta i})}{(n+\lambda)^{\mu+1/2}} + o(n^{-k-1/2})$ ,  $n \rightarrow \infty$ ; dabei ist  $f_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} Q_{\mu-\nu}(1-\lambda) \psi_\nu(z)$ ,

$\psi_\mu(z) = \left(z \frac{d}{dz}\right)^\mu [(1-z)^{-1/2}]$ ,  $\mu = 0, 1, 2, \dots$ , und die  $Q_\mu$  sind die von dem Ausdruck  $e^{xy} \sqrt{\frac{x}{e^x-1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} Q_\mu(y) x^\mu$  erzeugten Polynome  $\mu$ -ten Grades in  $y$ . Der Sonderwert  $\lambda = 1$  liefert

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu a_\mu \frac{\operatorname{Im} [e^{(n+1)\theta i} f_\mu(e^{2\theta i})]}{(n+1)^{\mu+1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{gleichmäßig für}$$

$0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ ; hier vereinfacht sich  $f_\mu(z)$  zu  $\sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} c_{\mu-\nu} \psi_\nu(z)$ , und die Zahlen  $c_\mu$  erzeugt

der Ansatz  $\sqrt{\frac{z}{e^z-1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{\mu!} z^\mu$ . — Die entsprechenden a. E. der  $\mathfrak{Q}_n$  ergeben sich aus

den vorstehenden der  $P_n$ , indem man in diesen das Zeichen  $\operatorname{Im}$  durch  $\operatorname{Re}$  und in der ersten den Beiwert  $4/\pi$  vor  $\sum$  durch 2, in der zweiten  $2/\pi$  durch  $\sqrt{\pi}$  ersetzt. — Leider reicht der verfügbare Raum nicht aus, die Schlußkette wiederzugeben, durch die Verf. zu seiner Hauptaussage über (1), ..., (4) vordringt. Ihre Glieder sind selbst höchst bemerkenswerte Sätze; einer davon sei wenigstens angeführt, der in sehr allgemeiner Weise von doppeltem Grenzübergang handelt: Wenn es zwei Folgen  $U'_\nu(n), U''_\nu(n)$  der Art gibt, daß  $U'_\nu(n) \leq u_\nu(n) \leq U''_\nu(n)$  für jedes  $n$  und  $\nu$ , und daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} U'_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} U'_\nu(n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} U''_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} U''_\nu(n)$  ist, so gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_\nu(n)$ , und die letzte Reihe konvergiert gleichfalls.

L. Koschmieder.

**Campbell, Robert:** Sommes de Féjer et moyennes de Césaro pour les développements d'une fonction en série de polynomes orthogonaux usuels. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 773—776 (1952).

Sia  $\{P_n(x)\}$  una successione di polinomi ortogonali e normali nell'intervallo  $(a, b)$  tali che tre  $P_n(x)$  successivi siano legati dalla relazione

$$P_n(x) = (A_n x + B_n) \cdot P_{n-1}(x) - C_n \cdot P_{n-2}(x) \quad [A_n > 0, C_n = A_n/A_{n-1}].$$

Sia (\*)  $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cdot P_r(x)$  la serie di Fourier di una funzione  $f(x)$  secondo i  $\{P_n(x)\}$ . —

L'A. considera classi di polinomi  $P_n(x)$  per i quali si abbia inoltre  $P_n(x) = f_n(x) \cdot P_{n-1}(x) - g_n(x) \cdot P_{n-1}(x)$  [ $f_n(x)$  e  $g_n(x)$  non precisate]. Dimostra allora che è possibile ottenere formule esplicite per le somme di Féjer della serie di Fourier (\*) per la classe di polinomi  $\{P_n(x)\}$  per i quali [posto  $U_r(x) = (2f_{r+1}(x) - A_{r+1} \cdot x - B_{r+1})/A_{r+1}$ ,  $V_r(x) = 2g_{r+1}(x)/A_{r+1}$ ,  $U_r(x)$  e  $V_r(x)$  sono indipendenti da  $r$  ed osserva che questa classe di polinomi comprende i polinomi di Legendre e di Hermite. L'A. dimostra infine che si possono avere formule esplicite per le medie, analoghe a quelle di Féjer,

$$M_n = \left( \sum_{r=0}^n \alpha_r \cdot S_r \right) / \left( \sum_{r=0}^n \alpha_r \right) \quad \left[ S_n = \sum_{r=0}^n a_r \cdot P_r(x) \right]$$

se  $U_r(x) = \alpha_r \cdot U(x)$ ,  $V_r(x) = \alpha_r \cdot V(x)$  ed osserva che questa classe di polinomi comprende i polinomi di Tchebychef e Gegenbauer.

J. Cecconi.



**Campbell, Robert:** Séries de polynomes orthogonaux se prêtant au calcul explicite des sommes de Féjer. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1092—1094 (1952).

In questa nota l'A. continua la precedente ricerca. Egli determina le classi di polinomi  $\{P_n(x)\}$  per i quali si possono ottenere in forma esplicita le somme di Féjer, o di tipo di Féjer, considerate nella nota precedente. *J. Ceccconi.*

**Kalinovskaja, S. S.:** Über die Konvergenz der Abweichungen von Polynomen der Annäherung im Potenzmittel gegen die besten Annäherungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 437—440 (1952) [Russisch].

Es sei  $E$  eine beschränkte meßbare Menge in  $R_n$  mit positivem Maß  $\mu E$ . Es seien  $v_i(x)$  ( $i = 0, \dots, p$ ) auf  $E$  gegebene, gleichmäßig stetige und beschränkte Funktionen, die voneinander metrisch linearunabhängig sind, d. h. für die jedes Polynom  $\Phi(x) = \sum_{i=0}^p c_i v_i(x)$ , dessen Koeffizienten  $c_i$  nicht alle verschwinden, auf einer Menge positiven Maßes nicht verschwindet. Es seien endlich  $\Phi_m(x)$  ( $m > 1$ ) und  $\Phi_0(x)$  diejenigen unter den Polynomen  $\Phi(x)$  mit  $c_0 = 1$ , für die die Potenzmittelwerte  $\delta_m(\Phi) = \left[ (\mu E)^{-1} \int_E |\Phi(x)|^m d\mu \right]^{1/m}$  bzw.  $\delta_0(\Phi) = \sup_{x \in E} |\Phi(x)|$  minimal sind ( $\Phi_m$  ist eindeutig bestimmt,  $\Phi_0$  aber im allgemeinen nicht). Nach Pólya, Jackson und Remez (vgl. E. Ja. Remez, dies. Zbl. **31**, 17—18) hat man  $\alpha_m = \frac{1}{2} [\delta_0(\Phi_m) - \delta_0(\Phi_0)] / \delta_0(\Phi_0) \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Es werden hier Abschätzungen für die Schnelligkeit dieser Konvergenz gewonnen, wenn die Stetigkeitsmoduln der Funktionen  $v_i(x)$  und der „Konzentrationsmodul“  $\psi(h)$  der Menge  $E$  gewissen Ungleichungen genügen. Dabei ist  $\psi(h) = \inf_{x \in E, h_0 > r \geq h} \frac{\mu[E \cap S(x, r)]}{\mu[S(x, r)]}$ , wo  $S(x, r)$  die Kugel mit dem Mittelpunkt  $x$  und dem Radius  $r$  bedeutet, und wo  $h_0$  eine beliebig gegebene, aber feste Zahl ist. *B. Sz.-Nagy.*

**Butzer, P. L.:** Dominated convergence of Kantorovitch polynomials in the space  $L^p$ . Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. **46**, 23—27 (1952).

Let  $f(x) \in L$  in  $\langle 0, 1 \rangle$ , and let

$$P_n^f(x) = \sum_{v=0}^n (n+1) \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \int_{v/(n+1)}^{(v+1)/(n+1)} f(t) dt$$

[Compare L. V. Kantorovitch, C. R. Acad. Sci. URSS. A **1930**, 563—568, 595—600 (1930)]. It is proved that, if  $f \in L^p$ ,  $p > 1$ , then  $P_n^f(x) \rightarrow f(x)$  p. p., and there exists a  $\theta(x, f) \in L^p$  such that  $|P_n^f(x)| \leq 3 \theta(x, f)$  p. p. for all  $n$ . A corollary is that  $P_n^f \rightarrow f$  (in the norm of  $L^p$ ). This corollary holds, in fact, also when  $p = 1$  (E. Levi, this Zbl. **39**, 292 and **42**, 298). *W. W. Rogosinski.*

**Atkinson, F. V.:** Über die Nullstellen gewisser extremaler Polynome. Arch. der Math. **3**, 83—86 (1952).

It is shown that the properties of the orthogonal polynomials may be generalized as follows. Let  $q_n(x)$  be the monic polynomial with real coefficients of degree  $n$  such that  $\int_a^b |q_n|^k \varrho dx$  is a minimum,  $\varrho(x)$  being a given function. It is easily seen

that if  $t(x)$  is an arbitrary polynomial of degree  $(n-1)$  then  $\int_a^b |q_n|^{k-2} q_n t \varrho dx = 0$ ,

the generalized orthogonality relation. The following theorems are proved very simply. (1) If  $0 < m \leq n$ , and  $c$  is real  $q_n + c q_m$  has at least  $m$  changes of sign in  $(a, b)$ , (2) for real  $x$  and positive  $n$   $q'_n q_{n-1} - q_n q'_{n-1} > 0$  (3) for fixed  $x > b$ ,  $q_n(x)/q_n(b)$  is a monotonically increasing function of  $n$ , (4) the zeros of  $q_n$  and  $q_{n-1}$  occur alternately. The possibility of an extension of the theory to sequences of functions other than polynomials (based on Tschebysheff systems) is indicated.

*W. W. Sawyer.*

**Achiezer, N. I.:** Über eine Familie ganzer Funktionen endlicher Ordnung und ein Čebyševsches Problem. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 459–468 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet die Funktion  $w = G(z, a, k)$ , die durch Elimination von  $u$  aus

$$z = \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \quad w = \cos \left\{ \frac{\pi u}{K} + K' \left[ \frac{H'(a+u)}{H(a+u)} - \frac{H'(a-u)}{H(a-u)} \right] \right\}$$

entsteht.  $H$  ist die Jacobische Thetafunktion,  $2K$  und  $2iK'$  die Perioden, der Modul  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ) sowie  $a$  ( $0 < a < K$ ) gelten als Parameter. Die Funktion  $G(z, a, k)$  ist in  $z$  ganz transzendent von Grade  $p = (K' \operatorname{dn} a) / (\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)$  und besitzt folgende Minimaleigenschaft: Es sei  $M$  eine reelle Konstante,  $a$  und  $k$  fest, und für  $-1 < x_1 < x_2 < +1$  nehme die Funktion  $\varphi(x) = MG(x, a, k)$  die Werte  $w_1, w_2$  an. Dann gilt für jede (reelle) ganze transzendente Funktion  $\psi(x)$  eines Grades  $\leq p$  mit  $\psi(x_1) = w_1, \psi(x_2) = w_2$  die Ungleichung  $\sup_{|x| > 1} |\psi(x)| \geq |M|$ , und das Gleich-

heitszeichen gilt nur für  $\psi(x) = \varphi(x)$ . — Mit Hilfe dieser Eigenschaft kann man folgendes Problem aus dem Tschebyscheffschen Ideenkreis lösen: Unter allen transzendenten Funktionen  $f(x)$  eines Grades  $\leq p$  mit  $f(0) = A, f'(0) = B$  ( $A$  und  $B$  reell) soll diejenige bestimmt werden, die für  $|x| > 1$  (im Reellen) am wenigsten von Null abweicht. Die Lösung läßt sich mit trigonometrischen und elliptischen Funktionen in geschlossener Form anschreiben. W. Hahn.

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

• **Snow, Chester:** Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. (Nat. Bureau of Standards, Appl. Mathematics Series, no. 19.) Washington: Government Printing Office 1952. XI, 427 p. \$ 3,25.

Dies Buch enthält einen Abriß der Theorie und eine Zusammenstellung von Formeln über die gewöhnliche hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung der zugeordneten Legendreschen Funktionen. Die linearen und quadratischen Transformationen und die analytische Fortsetzung der hypergeometrischen Funktion in bezug auf das Argument  $z$  nach allen Richtungen der  $z$ -Ebene und für unbeschränkte Werte der drei Parameter sind ausführlich dargestellt. Auch diejenigen Transformationen und Eigenschaften der zugeordneten Legendreschen Funktionen von solchen allgemeinen Argumenten und Parametern, wie sie häufig in der Physik vorkommen, werden dem Leser zugänglich gemacht, ohne das eigentliche Gebiet der Lehrbücher zu betreten, die sich der Theorie dieser Funktionen widmen. — Die vielleicht natürlichste formelle Erweiterung ist die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion mit mehr als drei Parametern, wobei diese Funktion als die Lösung einer Differentialgleichung erscheint, wie gewöhnlich mit drei singulären Punkten, aber von höherem als zweitem Grade. Für diejenigen Leser, denen das Studium der Lösungen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung dringend erscheinen sollte, wird die Heun'sche Funktion mit sechs Parametern betrachtet, die sich ergibt als Lösung der Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse zweiter Ordnung mit vier singulären Punkten. Diese Funktion ist die analytische Fortsetzung einer Potenzreihe, deren Koeffizienten nicht explizite angeschrieben werden können, da sie selbst Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung sind. Diese Verallgemeinerung ist die schwierigere von beiden, aber es bestehen Verfahren wie im gewöhnlichen Fall der hypergeometrischen Funktion, um alle erwünschten analytischen Fortsetzungen zu erhalten. Statt sechs sind 24 Transformationen der unabhängigen Veränderlichen von der Gestalt der Transformation mittels Kreisverwandtschaft vorhanden, die drei der vier singulären Punkte miteinander vertauschen, so daß eine reichere Mannigfaltigkeit von Verwandtschaften entsteht, die in einem besonderen Abschnitt gegeben und an einer späteren Stelle bei der Konstruktion solcher Funktionen benutzt werden, die als Lösungen der Differentialgleichung von Lamé-Wangerin erscheinen. Bei geeigneter Wahl der Bernoullischen Parameter gehen die Reihen von Heun in Polynome über, die eine Lösung dieser Gleichung darstellen. Die Polynome von Lamé-Hermite sind in ähnlicher Weise als Sonderfälle in dieser Funktion enthalten. — Die für die Anwendungen nötige Theorie ist nach drei Richtungen geordnet. Der erste Gesichtspunkt ist die Analogie zwischen dem logarithmischen Potential der einfachen Belegung und dem zweidimensionalen Potential, das im Buch als „reduziertes“ Potential bezeichnet wird. Dies entsteht, wenn die Randwerte auf Rotationsflächen gegeben sind, wenn auch diese Werte und das resultierende Potential auf den Fall der axialen Symmetrie nicht beschränkt sind. — Der zweite Gesichtspunkt (vom ersten wenig verschieden) ist die Bedeutung der Legendreschen Funktion  $Q_{m-1/2}$  mit dem Argument  $\{1 + [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]/2q_1\}$  analog zu  $\log [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}$  mit  $q^2 = x^2 + y^2$ ,



$\phi_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ . Diese Funktion erscheint als symmetrischer Kern in den Integralgleichungen der Potentialtheorie. Ihre Entwicklung nach Orthogonalfunktionen oder ihre Integraldarstellung in verschiedenen Systemen von separierbaren Koordinaten gipfelt in jedem Fall in neuen Additionstheoremen und liefert den Schlüssel zur formalen Lösung einer gewissen Klasse von Anwendungen. — Der dritte Gesichtspunkt ist die unendliche Vieldeutigkeit der „reduzierten“ Potentiale in bezug auf den Raum, die aus der Invarianz ihrer partiellen Differentialgleichung gegenüber einer reellen Transformation mittels Kreisverwandtschaft folgt, offenbar entsprechend einer Inversion in einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Symmetrieachse. — Zwei einfache Klassen von Randwertproblemen sind veranschaulicht, wobei  $(\alpha, \beta)$  als separierbare Koordinaten der Potentialgleichung erscheinen. In der einen Klasse ist das Potential, z. B.  $f(\alpha)$ , auf einer Rotationsfläche vorgeschrieben, deren Erzeugende zur Gattung der Meridiankurven  $\beta = \text{const.}$  gehört (Toroide, Ellipsoide, Kugeln). Die Lösung ist abhängig von der Entwicklung von  $f(\alpha)$  nach orthogonalen Funktionen, die ihrerseits Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit  $\alpha$  als unabhängiger Veränderlicher darstellen. Die elementaren Fälle, die auch die Riemannschen Ringkoordinaten mit einbeziehen, bilden Beispiele der Sturm-Liouvilleschen Theorie. — Das in der anderen Klasse in einem besonderen Abschnitt betrachtete Problem wird gelöst, indem eine Darstellung einer willkürlichen Funktion in der Form eines Doppelintegrals erhalten wird, wobei die Entwicklungsfunktionen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von etwas allgemeinerer Gestalt befriedigen. Der einfachste Fall erweist sich als auf die Mellinsche Form des Fourierschen Integrals zurückführbar. Die besonderen, hier angewandten Fälle sind Integraldarstellungen einer gegebenen Funktion nach Zylinderfunktionen und einer Abart der zugeordneten Legendreschen Funktionen  $T_\nu^\mu$ ,  $P_\nu^\mu$  und  $Q_\nu^\mu$ , wobei die komplexe Integration mit Rücksicht auf entweder den oberen oder unteren Index ( $\mu$  bzw.  $\nu$ ) ausgeführt werden mag. — Es ist schwer zu sagen, was in einem Buch über spezielle Funktionen, die so häufig und von so vielen Fachleuten bearbeitet wurden, wirklich neu ist, aber der Abschnitt über Integrale, deren Integranden hypergeometrische Funktionen sind, sowie der über Integrale mit Zylinderfunktionen machen den Anspruch auf Originalität. Letztere sind auf die Theorie der Wellengleichungen angewandt. Einige Seiten sind den parabolischen Koordinaten gewidmet, gerade ausreichend, um eine Formel für  $Q_{m-1/2}$  in Integralform zu erhalten. Eine Anwendung auf Ringkoordinaten mit Beispielen vom Typus dieser Koordinaten muß ebenfalls als neu angesehen werden. Auch im letzten Abschnitt über die konfluente hypergeometrische Funktion sind Originalbeiträge zu verzeichnen. — Alle, die sich für die Theorie und Anwendung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung und der Integralgleichungen der Potentialtheorie interessieren, dürften das vorliegende Werk mit Vorteil benutzen.

R. Gran Olsson.

Thosar, Y. V.: On recurrence relations involving Legendre's associated functions of one kind only. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 36, 128—129 (1952).

Hinweis darauf, daß die 18 Rekursionsformeln für die  $P_n^m(z)$  bzw.  $Q_n^m(z)$ , ( $n, m, z$  beliebige komplexe Zahlen), die sich bei Ganesh Prasad (A treatise on spherical harmonics, Bd. II, Leipzig 1932, S. 83—86; dies. Zbl. 7, 19) finden, aus vier Formeln ableitbar sind.

O. Volk.

Siegel, K. M., J. W. Crispin, R. E. Kleinman and H. E. Hunter: The zeros of  $P_{n_i}(x_0)$  of non integral degree. J. Math. Physics 31, 170—179 (1952).

Es sei  $x_0 = \cos \theta_0$  eine reelle Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$ , und es seien  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) die Werte von  $\nu > -\frac{1}{2}$ , für die die erste Ableitung der Legendreschen Funktion, nämlich  $P'_\nu(x_0)$  verschwindet. Es werden gut brauchbare Methoden zur raschen numerischen Berechnung der  $\nu_i$  entwickelt und am Beispiel  $\theta_0 = 165^\circ$  erläutert. Zugleich wird das in technischen Anwendungen benötigte Integral

$\int_{x_0}^1 \{P'_{\nu_i}(x)\}^2 (1-x^2) dx$  berechnet. Die Methode stützt sich auf eine Formel von S. A. Schelkunoff [Proc. I. R. E. 29, 514 (1941)] für den Ausdruck  $[P'_{n+z}(x) - P'_n(x)]/z$ , worin  $n+z = \nu$ ,  $0 \leq z < 1$  zu setzen ist. Der Ausgangspunkt der Arbeit ist eine Kritik der Tafeln von P. A. Carrus und C. G. Treuenfels [dies. Zbl. 42, 135].

W. Magnus.

Giuliano, Landolino: Su alcune relazioni integrali fra funzioni di Bessel di prima e di seconda specie. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 17—30 (1952).

Verf. bestimmt (teilweise bekannte) Integrale von der Form  $\int_a^b \frac{u_\lambda v_\mu}{t} dt$  und

damit gebildete Relationen, insbesondere auch, wenn eine Integrationsgrenze  $\infty$  wird;  $u_\lambda, v_\mu$ , bedeuten Besselsche oder Neumannsche Funktionen. *O. Volk.*

**Markovitz, Hershel:** A property of Bessel functions and its application to the theory of two rheometers. *J. appl. Phys.* 23, 1070—1077 (1952).

Die Ausdrücke  $J_n(\sigma) Y_n(\xi) - J_n(\xi) Y_n(\sigma)$  und  $J'_n(\sigma) Y_n(\xi) - J_n(\xi) Y'_n(\sigma)$ , wo  $J_n, Y_n$  Besselsche bzw. Neumannsche Funktionen mit nicht negativem ganzem  $n$  sind, werden unter Anwendung der Taylorsche Entwicklung für  $J_n(\sigma), Y_n(\sigma)$  nach Potenzen von  $\sigma - \xi$ , in Doppelreihen nach Potenzen von  $\xi$  und  $(\sigma - \xi)/\sigma$  entwickelt. Für  $n = 0$  und 1 erfolgt Summation der einen Reihe. Verf. scheint die Reihenentwicklungen von Buchholz u. a., die nach den Kugelfunktionen  $\Omega_\lambda^n$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  oder nach halbzahligen Besselschen Funktionen wachsender Ordnungszahl fortschreiten oder Neumannsche Reihen zweiter Art sind, nicht zu kennen. Vgl. H. Buchholz, dies. Zbl. 35, 166. *O. Volk.*

**Tanzi Cattabianchi, Luigi:** Una classe di equazioni alle derivate parziali generalizzanti l'equazione di Bessel, e risoluzione in un caso particolare notevole. *Rivista Mat. Univ. Parma* 3, 189—201 (1952).

In Verallgemeinerung einer bemerkenswerten Methode von Mambriani (dies. Zbl. 22, 223) zur Auflösung linearer Differentialgleichungen mittels der Operatorenmethode wird für die als weitere Verallgemeinerung der verallgemeinerten Besselschen Differentialgleichung  $x y'' + 2n y' - a^2 x y = 0$  bezeichnete partielle Differentialgleichung:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m) D^2 z + 2m n D z - a^2 (x_1 + x_2 + \dots + x_m) z = 0,$$

wo  $D = \partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2 + \dots + \partial/\partial x_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n =$  natürliche Zahl, die in die Differentialgleichung  $(D^2 - a^2)((x_1 + x_2 + \dots + x_m)(D^2 - a^2)^{1-n} z) = 0$  übergeführt wird, die Lösungsformel abgeleitet:  $z = (D^2 - a^2)^{n-1} (D^2 - a^2)^{-n} 0/(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , die in Anwendung eines Zerlegungssatzes von Manfredi (dies. Zbl. 36, 66) für den Operator  $(D^2 - a^2)^{n-1}$  auf die explizite Darstellung führt. [Bemerkung des Ref.: Die Substitution  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \xi_1$ ,  $x_1 - x_2 = \xi_2, \dots, x_1 - x_m = \xi_m$ , führt die Differentialgleichung über in die obige Besselsche Gleichung:  $m^2 \xi_1 \partial^2 z / \partial \xi_1^2 + 2n m^2 \partial z / \partial \xi_1 - a^2 \xi_1 z = 0$  mit der leicht angebbaren Lösung:

$$z = \Phi_1(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) \xi_1^{1-2n} e^{a/m \xi_1} {}_1F_1(1-n; 2-2n; -2a/m \xi_1) \\ + \Phi_2(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) \xi_1^{1-2n} e^{-a/m \xi_1} {}_1F_1(1-n; 2-2n; 2a/m \xi_1),$$

wo  ${}_1F_1$  die Kummersche confluyente hypergeometrische Funktion bedeutet; für  $n =$  natürliche Zahl ergeben sich die Polynome des Verf. Daraus erkennt man den symmetrischen Aufbau der Lösung, den Verf. in der von ihm gegebenen Lösungsform als verlorengegangen betrachtet (vgl. die Bemerkung auf S. 91 unten).] *O. Volk.*

**Agostinelli, Cataldo:** Nuove funzioni per la risoluzione dei problemi ai limiti relativi al campo ellittico senza fare uso delle trascendenti di Mathieu. *Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. fis. mat. natur.* 86, 180—194 (1952).

Die in elliptischen Koordinaten  $\xi, \eta$  geschriebene Wellengleichung

$$(1) \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \lambda^2 c^2 (\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} 2\xi - \cos 2\eta) u = 0$$

wird durch die Substitution  $\varrho = e^\xi$  übergeführt in

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4} \lambda^2 c^2 (1 + \varrho^{-4} - 2 \varrho^{-2} \cos 2\eta) u = 0;$$

ihre Separation führt auf vom Verf. eingeführte epizykloide Funktionen (dies. Zbl. 44, 75) spezieller Art von der Form:

$$u_{2m}(\xi, \eta; \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_{2m,s}(\xi, \lambda) \cos(2s\eta),$$

$$u_{2m+1}(\xi, \eta; \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_{2m+1,s}(\xi, \lambda) \cos(2s+1)\eta, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

wo  $F_{2m,0}(\xi, \lambda) = J_m(\frac{1}{2} \lambda c e^\xi) J_m(\frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi})$ ,

$$F_{2m,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s}(\frac{1}{2} \lambda c e^\xi) J_{m-s}(\frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi}) + J_{m-s}(\frac{1}{2} \lambda c e^\xi) J_{m+s}(\frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi}),$$

$$F_{2m+1,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s+1}(\frac{1}{2} \lambda c e^\xi) J_{m-s}(\frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi}) + J_{m-s}(\frac{1}{2} \lambda c e^\xi) J_{m+s+1}(\frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi}),$$

$s = 1, 2, 3, \dots$ , mit analogen Entwicklungen nach  $\sin(2s\eta)$  bzw.  $\sin(2s+1)\eta$ .



Sie werden als Funktionen des elliptischen Feldes bezeichnet und dazu verwendet, diejenige Lösung von (1) zu bestimmen, die für  $\xi = \xi_0$  identisch verschwindet.

O. Volk.

**Lauwerier, H. A.:** The calculation of the coefficients of certain asymptotic series by means of linear recurrent relations. Appl. Sci. Research, B 2, 77-84 (1952).

Für das Integral  $\varphi(\omega) = \int_L e^{-\omega f(u)} g(u) du$  mit  $f(u) = u^a \sum_{j=0}^{\infty} b_j u^j$ ,  $b_0 > 0$ ,  $a \geq 2$ , das durch die Substitution  $f(u) = v^a$  in das Integral  $\int_0^{\infty} e^{-\omega v^a} \left( g(u) \frac{du}{dv} \right) dv$  übergeführt wird, werden die für seine Auswertung für große  $\omega$  nützlichen Koeffizienten  $m_k$  mit

$$g(u) \frac{du}{dv} = \sum_0^{\infty} m_k v^k, \quad m_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(u) du}{(f(u))^{(k+1)/a}}$$

dargestellt durch:

$$m_k = \frac{1}{\Gamma((k+1)/a)} \int_0^{\infty} e^{-v s} s^{(k+1)/a} q_k(s) \frac{ds}{s},$$

wo die Polynome  $q_k(s)$  durch eine lineare Rekursionsformel leicht berechnet werden können; besondere Behandlung des Falles, daß  $f(u)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $A f' + B f + C u^{a+1} = 0$  ( $A, B, C$  Polynome in  $u$ ) ist. Anwendung auf die Besselfunktion  $J_\omega(\omega)$ , Gammafunktion  $\Gamma(\omega)$ , Hermite'sche Funktion  $\text{He}_\omega(2\sqrt{\omega})$  und Whittakersche Funktion  $\sqrt{2\omega} M_{\omega/2,0}(2\omega)$ .

O. Volk.

**Campbell, Robert:** Nouvelles équations intégrales pour les fonctions de Lamé. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2515-2517 (1952).

Bei Umdrehungsflächen 4. Ordnung können Integralgleichungen für die Potentialfunktionen und für die Wellenfunktionen abgeleitet werden. Das Verfahren ist auch auf allgemeinere Umdrehungsflächen anwendbar, insbesondere auf die Ovale von Descartes. Die Potentialfunktionen sind hier Lamésche Funktionen. Aus obigem Verfahren erhält man somit Integralgleichungen für die üblichen Laméschen Potentialfunktionen in der Jacobischen Form und auch für die allgemeineren Laméschen Funktionen mit den Perioden  $2K$  oder  $4K$ , für eine Ordnungszahl  $n$ , welche ganz oder gebrochen ist. Die Kerne der Integralgleichungen werden abgeleitet.

M. J. O. Strutt.

**Campbell, Robert:** Équations intégrales et fonctions de Lamé. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 8-10 (1952).

Als Fortsetzung der vorigen Arbeit (siehe vorsteh. Referat) werden die allgemeinsten Umdrehungsflächen gesucht, welche auf Potentialfunktionen mit linearen Integralgleichungen führen. Diese Flächen haben Meridiane, welche Bizirkularkurven 4. Ordnung sind, wobei ein reeller Brennpunkt auf der Umdrehungsachse liegt. Die Differentialgleichungen der betreffenden Potentialfunktionen sind vom Laméschen Typus und werden abgeleitet. Für ihre Lösungen ergibt sich nach dem früher angegebenen Verfahren eine lineare homogene Integralgleichung. Mit Hilfe der Lösungen dieser Gleichung werden die vollständigen Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung angegeben.

M. J. O. Strutt.

**Kumar, Ram:** A pair of functions which are Hankel transforms of each other. Ganita 3, 79-84 (1952).

Es wird gezeigt, daß eine von MacRobert angegebene Funktion und eine gewisse hypergeometrische Funktion Hankel-Transformierte voneinander sind.

G. Doetsch.

**Slater, L. J.:** An integral of hypergeometric type. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 578—582 (1952).

Es handelt sich darum, die allgemeinste Form der Integraltransformation zu geben, aus welcher alle früher bekannten Transformationen der hypergeometrischen Reihen abgeleitet werden können. Verf. geht von einer allgemeinen Transformationsformel aus, welche abgeleitet wird. Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann die gesuchte Integraltransformation aufgestellt werden.

*M. J. O. Strutt.*

**Slater, L. J.:** Integrals representing general hypergeometric transformations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 206—216 (1952).

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit dem Beweis einer von D. B. Sears abgeleiteten Transformation, welche  $M + N + 1$  allgemeine hypergeometrische Reihen der Ordnung  $M + N + 1$  verbindet. Bei diesem Beweis wird von einem Integral des Barnes'schen Typus ausgegangen. Durch Auswertung dieses Integrals für verschiedene Fälle erhält Verf. die zu beweisende Transformation. Aus diesem Ergebnis werden mehrere Integraltransmutationsformeln gefolgert, welche zur Darstellung allgemeiner hypergeometrischer Funktionen dienen. Im zweiten Teil der Arbeit beweist Verf. die Gültigkeit der zuerst genannten Transformationsformeln für Basisreihen. Die entsprechenden Integraltransformationen werden aufgestellt.

*M. J. O. Strutt.*

**Srivastava, H. M. and A. M. Chak:** Mitra-Srivastava's  $P_{n,k}(x)$  function and confluent hypergeometric function. Ganita 3, 19—22 (1952).

Für die von Mitra und Srivastava verallgemeinerte Batemansche  $k$ -Funktion

$$P_{n,k}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^k \theta \cos(x \tan \theta - n \theta) d\theta$$

werden eine Integralgleichung angegeben und Beziehungen zur Whittakerschen  $W_{k,n}$ -Funktion und deren Sonderfällen (Funktion von Pearson-Cunningham, Sonine'sche Polynome, unvollständige Gammafunktion) hergeleitet. Für  $k = 0$  gehen diese Relationen in die von Shastri (dies. Zbl. 20, 116) über. *E. Kreyszig.*

**Srivastava, H. M.:** On certain connections between the generalised  $k$ -function of Bateman and Legendre and parabolic cylinder functions. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 59—62 (1952).

Unter der verallgemeinerten  $k$ -Funktion, die von Mitra und dem Verf. ohne nähere Angaben der älteren Quelle in die Analysis eingeführt worden ist, wird die durch die Gleichung

$$P_{n,k}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^k \theta \cdot \cos(x \operatorname{tg} \theta - n \theta) \cdot d\theta, \quad \operatorname{Re}(k) > -1,$$

definierte Funktion verstanden. Für  $k = 0$  reduziert sie sich auf die  $k$ -Funktion Batemans. Die Funktion  $P_{n,k}$  steht in enger Verwandtschaft mit der Funktion  $M_{n,k+1/2}(2x)$ , die von Whittaker als eine der beiden Lösungen der konfluenten, hypergeometrischen Differentialgleichung benutzt worden ist. — In der vorliegenden Arbeit werden gewisse Eigenschaften der Funktion  $P_{n,k}(x)$  hergeleitet und über die Operatorenrechnung weitere Zusammenhänge zwischen dieser Funktion und der Weberschen Zylinderfunktion und den Legendre-Polynomen hergestellt.

*H. Buchholz.*

### **Funktionentheorie:**

• **Leja, Franciszek:** Analytische und harmonische Funktionen. Band I. (Monografie Matematyczne. Tom XXIX.) Warszawa-Wrocław: Polskie Towarzystwo Matematyczne 1952. 174 S. [Polnisch].

An introductory course for students of mathematics written in a clear and concise style. It contains the classical theorems of the theory of analytic functions.

*J. Gorski.*



**Glover, I. E.:** Analytic functions with an irregular linearly measurable set of singular points. *Canadian J. Math.* **4**, 424—435 (1952).

Plane sets  $E$  of finite Carathéodory linear measure have been studied by A. S. Besicovitch [*Math. Ann.* **98**, 422—464 (1927)]. These sets can be divided into two classes: the regular sets which are completely analogous to rectifiable curves and have a tangent line almost everywhere, and the irregular sets whose analytical and geometrical properties differ essentially from the rectifiable curves. — The main result of the author is the following: (I) Given any irregular bounded closed set  $E$  of finite positive linear Carathéodory measure in the complex  $z$ -plane, there is a complex-valued function  $f(z)$ , which is analytic and single-valued in the complementary set  $C(E)$  and has  $E$  as the set of its singular points. This result is obtained by defining  $f(z)$  as an integral  $(E) \int (P - z)^{-1} du$  on  $E$  with respect to the linear Carathéodory measure. Thus  $f(z)$  is given as a function of its singular set. By using Besicovitch's result (loc. cit.) that there is a countable family of disjoint Jordan curves covering almost all of  $E$ , the further result is obtained that the imaginary part of  $E$  is bounded in  $C(E)$ . — V. V. Golubev [*Bull. Univ. Moscow* **1916**, 1—157] proved that for any arbitrary perfect nowhere dense set  $E$  of positive measure there is a function  $f(z)$  as above. L. Cesari.

**Walsh, J. L.:** Degree of approximation to functions on a Jordan curve. *Trans. Amer. math. Soc.* **73**, 447—458 (1952).

Soit  $C$  une courbe de Jordan entourant l'origine (et toujours prise analytique dans la suite): on sait que toute fonction  $f(z)$  continue sur  $C$  peut y être approchée uniformément par des polynômes en  $z$  et  $1/z$ ,  $p_n(z) = \sum_{-n}^{+n} a_{nk} z^k$ . De plus, si l'on partage  $p_n(z)$  en un polynôme en  $z$ ,  $p_{1n}(z)$ , et un polynôme en  $1/z$  sans terme constant  $p_{2n}(z)$ , les suites  $\{p_{1n}(z)\}$  et  $\{p_{2n}(z)\}$  convergent respectivement dans l'intérieur et l'extérieur de  $C$  vers les fonctions analytiques  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  définies dans ces deux domaines par l'intégrale  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt$ . En rapprochant deux

de ses récents travaux [ce Zbl. **44**, 78; et *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **31**, 221—244 (1952)], l'A. établit:  $f^{(2)}(z)$  appartient à la classe de Lipschitz d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) resp. à la classe  $Z$  ( $\alpha = 1$ ) si et seulement si  $f(z)$  admet une approximation telle que  $|f(z) - p_n(z)| \leq A/n^{p+\alpha}$  [ $Z$  est la classe introduite par A. Zygmund (*Duke Math. J.* **12**, 47—76 (1945))]. Dans ces conditions les suites  $\{p_{1n}(z)\}$  et  $\{p_{2n}(z)\}$  convergent encore sur  $C$  et vérifient  $|f_j(z) - p_{jn}(z)| \leq A' \log n/n^{p+\alpha}$  ( $j = 1, 2$ ). Ces résultats sont étendus dans diverses directions, en particulier pour l'approximation par des fonctions rationnelles à pôles imposés d'une fonction  $f(z)$  continue sur une région  $C$  (fermée et bornée) à contours de Jordan analytiques,  $f(z)$  étant naturellement supposée analytique dans l'intérieur de  $C$ . G. Bourion.

• **Mandelbrojt, S.:** Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1952. XIV, 277 p.

Ce livre résume les recherches situées à-peu-près entre les années 1934 et 1948 de l'A. et de quelques autres mathématiciens. Les références les plus importantes sont: Bang: (1) Om quasi-analytiske Funktioner, Thèse, København, 1946; Brunk: (2) ce Zbl. **40**, 188; Cartan et Mandelbrojt: (3) ce Zbl. **23**, 56; W. H. J. Fuchs: (4) *Proc. Cambridge philos. Soc.* **42**, 91—105 (1947); (5) ce Zbl. **34**, 346; (6) *Bull. Amer. math. Soc.* **52**, 1057—1059 (1946); Mandelbrojt: (7) La régularisation des fonctions, *Actual. sci. industr.* **733**, Paris 1938; ce Zbl. **22**, 153; (8) Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions, *Rice Inst. Pamphlet* **29** (1942); (9) *Ann. sci. Ecole norm. sup.*, III. Sér. **63**, 351—378 (1946); (10) ce Zbl. **40**, 178; (11) ce Zbl. **31**, 52; (12) ce Zbl. **34**, 368; Mandelbrojt et Mac Lane: (13) ce Zbl. **32**, 67; Mandelbrojt et Wiener: (14) ce Zbl. **30**, 117. — Chap. I. expose la régularisation des suites (7), (8). Chap. II. contient la généralisation du problème de Watson (13). Dans le Chap. III. l'A. démontre son „inégalité fondamentale“ (9) et le théorème de consistance (2) sous une forme plus générale. Chap. IV. expose d'abord les démonstrations élémentaires du théorème de Denjoy-Carleman (1), (8) et donne ensuite des théorèmes de „quasi-analyticité généralisée“ (9), (10) et des théorèmes de composition (10). A part de l'inégalité fondamentale, des techniques de (4), (5) et (14) sont employées. Les théorèmes de composition ont été généralisés depuis par Mandelbrojt et Brunk (ce Zbl. **42**, 297) et Mandelbrojt [*J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **31**, 79—90 (1952)]. Le Chap. V. contient: l'approximation sur

$(-\infty, \infty)$  et  $(0, \infty)$  par des combinaisons linéaires de  $x^n/F(x)$  (12), l'unicité dans les problèmes de moments généralisés de Stieltjes et de Hamburger (6), (12) et un théorème sur les itérés des noyaux symétriques de Carleman (11). Dans le Chap. VI. se trouve la solution du problème d'équivalence de deux classes de fonctions indéfiniment dérivables (3) et des questions voisines. Les inégalités de Gorny-Cartan sont démontrées par une méthode due à Bang. Finalement le Chap. VII. applique l'inégalité fondamentale à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet. — Une partie des résultats a été publiée avant sans démonstrations. De plus un grand nombre des théorèmes qui ont déjà paru avant avec des démonstrations complètes, sont énoncés ici sous une forme plus générale, avec des démonstrations parfois largement simplifiées. J. Horváth.

**Ikenberry, E. and W. A. Rutledge:** Convergence of expansions in the Hermite polynomials  $H_n(hw)$ . J. Math. Physics 31, 180—183 (1952).

Hille (dies. Zbl. 22, 365) hat die genaue Breite des Horizontalstreifens angegeben, in dem eine Reihe, die nach Hermiteschen Polynomen  $H_n(z)$  fortschreitet, konvergiert; sie hängt natürlich von den Koeffizienten ab. Die Verf. gehen von der durch einen komplexen Parameter  $h$  erweiterten Reihe

$$g(w) = \exp(-kh^2w^2) \sum_{n=0}^{\infty} g_n H_n(hw) \quad (k \text{ eine Konstante})$$

aus. Nach Hille ist die Streifenbreite hier

$$\tau = -\frac{1}{2} \limsup [(2n)^{-1/2} \log(2^n \Gamma(n/2 + a) |g_n|)],$$

worin  $a$  eine feste Zahl ist.  $g_n$  hängt auch von  $h$  ab, und man kann nun durch passende Wahl von  $h$  zu erreichen suchen, daß  $\tau$  möglichst groß wird oder verschwindet (so daß keine Konvergenz stattfindet). Die Verf. führen die Rechnung für  $g(w) = \exp(-\alpha w^2)$  durch. Die Frage, ob die Rechnung auch in anderen, weniger einfachen Fällen explizit durchführbar ist, wird nicht erörtert. W. Hahn.

**Wigner, E. P.:** Simplified derivation of the properties of elementary transcendents. Amer. math. Monthly 59, 669—683 (1952).

$R$ -Funktionen nennt Verf. meromorphe Funktionen einer komplexen Veränderlichen  $z$ , deren Imaginärteile in der oberen  $z$ -Halbebene nicht negativ und in der unteren  $z$ -Halbebene nicht positiv sind. Die Arbeit bringt zunächst eine Zusammenstellung von Sätzen über diese in der Theorie der elektrischen Netzwerke auftretende Funktionsklasse aus einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 452) und einer Arbeit von K. Fränz [Elektr. Nachrichtentechnik 21, 8 (1944)]. Sodann werden die beiden grundlegenden Sätze bewiesen: 1. Jede Reihe  $R(z) =$

$$\alpha z + \beta + \sum_{\mu} \left( \frac{\gamma_{\mu}^2}{Z_{\mu} - z} - \frac{\gamma_{\mu}^2}{Z_{\mu}} \right) \text{ mit endlich oder unendlich vielen Gliedern, } \alpha \geq 0, \text{ reellen } \beta, \gamma_{\mu}$$

und reellen  $Z_{\mu}$ , die sich im Endlichen nicht häufen, stellt, falls die Reihe für wenigstens ein  $z \neq 0$  konvergiert, eine  $R$ -Funktion dar (die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig in jedem endlichen, abgeschlossenen Bereich, der keinen Pol  $Z_{\mu}$  enthält), und umgekehrt kann jede  $R$ -Funktion in eine solche Reihe entwickelt werden. 2. Das endliche oder unendliche Produkt

$$R(z) = c \frac{x_0 - z}{Z_0 - z} \prod_{\nu} \frac{1 - z/x_{\nu}}{1 - z/Z_{\nu}} \prod_{\nu} \frac{1 - z/x_{-\nu}}{1 - z/Z_{-\nu}}$$

mit  $c > 0$ ,  $Z_0 \leq 0 < Z_1$ , und reellen, sich im Endlichen nicht häufenden Zahlen  $x_{\nu}, Z_{\nu}$  mit  $\dots Z_{-2} < x_{-2} < Z_{-1} < x_{-1} < Z_0 < x_0 < Z_1 < x_1 < Z_2 < x_2 < \dots$  konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Bereich gegen eine  $R$ -Funktion, und umgekehrt läßt sich jede  $R$ -Funktion in ein solches Produkt entwickeln. — Es folgen einige Sätze über Beziehungen zwischen Differentialgleichungen und  $R$ -Funktionen, z. B. daß die Lösung  $R(\xi, z)$  der Riccatischen Differentialgleichung  $dR(\xi, z)/d\xi = R^2 + UR - V + z$ , wobei  $\xi$  eine reelle Veränderliche,  $U, V$  reelle stetige Funktionen von  $\xi$  im Intervall  $(0, \xi_0)$  sind, unter der Anfangsbedingung  $R(0, z) = R_0$  reell, für jeden Wert  $\xi$  aus  $(0, \xi_0)$  eine  $R$ -Funktion ist. Schließlich weist Verf. mit Hilfe der obigen Reihenentwicklung die Funktion  $\operatorname{tg} \pi z$  als die einfachste periodische  $R$ -Funktion der Periode 1 nach, die in  $-1/2 < z \leq 1/2$  nur eine Singularität besitzt und mit  $z \rightarrow i\infty$  gegen den Wert  $i$  konvergiert. Die obige Produktdarstellung liefert dann unmittelbar die Produktdarstellung für  $\operatorname{tg} \pi z$ . J. Heinhold.

**Carlson, Fritz:** Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. Ark. Mat. 2, 293—298 (1952).

Die Dirichletsche Reihe  $f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}$ ,  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$ ,  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 0$  konvergiere für ein endliches  $s$ . Verf. zeigt: Wenn für alle



natürlichen  $n$  und alle reellen  $t$  gilt  $\left| \sum_{\nu=1}^n (\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu}) a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} i t} \right| \leq \lambda_{n+1}$ , so ist für  $\sigma > 0$  die Funktion  $f(s)$  regulär und  $|f(s)| \leq 1$ . Wenn umgekehrt  $f(s)$  regulär und  $|f(s)| \leq 1$ , so ist  $\sum_{\lambda_{\nu} < x} (x - \lambda_{\nu}) a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} i t} \leq x$  für jedes positive  $x$  und jedes reelle  $t$ . — Verf. schließt noch einige Bemerkungen an, z. B. über die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  für Funktionen der oben charakterisierten Art. W. Maak.

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet series. III. On the singularities of Dirichlet series. (III.) Tôhoku math. J., II. Ser. **4**, 49—53 (1952).

Die Resultate des Verf. aus den beiden vorangehenden Noten (dies. Zbl. **45**, 37—38) werden in folgender Weise verallgemeinert: Für eine Dirichlet-Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \exp(-\lambda_{\nu} s)$  mit nicht verschwindenden  $a_{\nu}$  heißt eine Teilfolge der Exponenten  $\lambda_{\nu_k}$  eine normale Teilfolge von der Dichte 0 (normal subsequence of density 0), wenn einerseits  $\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda_{\nu_n} = 0$  gilt und andererseits für ein geeignetes positives  $d$  die Intervalle  $(\lambda_{\nu_n} - d, \lambda_{\nu_n} + d)$  keine von den Mittelpunkten verschiedenen  $\lambda_{\nu}$  enthalten. Dann bleiben die Sätze der beiden früheren Noten richtig, wenn die Voraussetzungen jener Sätze erfüllt sind, unter Außerachtlassung der Terme, deren Exponenten zu einer normalen Teilfolge der Dichte 0 gehören. A. Ostrowski.

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet series. VIII. On the singularities of Dirichlet series. (V.) Kôdai math. Sem. Reports **1952**, 9—12 (1952).

Ein neuer Beweis des bekannten Polyaschen Satzes über die Singularitäten auf der Konvergenzgeraden einer Dirichlet-Reihe mit  $\lim (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) > 0$ . A. Ostrowski.

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet series. VII. On the distribution of values of Dirichlet series on the vertical lines. Kôdai math. Sem. Reports **1952**, 5—8 (1952).

Hat eine Dirichlet-Reihe eine einfache endliche Konvergenzabszisse  $\sigma_s$ , so beweist Verf., daß für jedes  $\sigma > \sigma_s$  einer der drei Fälle zutreffen muß: 1. entweder ist die Reihe auf der Vertikalen  $\Re s = \sigma$  beschränkt und hat keinen Grenzwert im Unendlichen; zugleich nimmt die Funktion in jedem Vertikalstreifen, der die Gerade  $\Re s = \sigma$  enthält, jeden endlichen Wert, höchstens mit einer Ausnahme, unendlich oft an; 2. oder die Reihe ist auf der Vertikalen  $s = \sigma$  beschränkt und ist dort eine fastperiodische Funktion des Imaginärteils von  $s$ ; 3. oder endlich die Funktion ist auf der Vertikalen  $\Re s = \sigma$  nicht beschränkt, kann aber sicher nicht so ins Unendliche konvergieren, daß dabei das Argument einem festen Grenzwert zustrebt. A. Ostrowski.

**Turán, Paul:** On an application of the typical means in the theory of the zeta-function of Riemann. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 239—251 (1952).

Eine als Dirichletsche Reihe darstellbare  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s} = f(s)$  führt bekanntlich nach M. Riesz zu endlichen Näherungssummen

$$\sum_{\nu \leq n} \left(1 - \frac{\lambda_{\nu}}{n}\right) a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 f\left(s + \frac{2it}{\lambda_n}\right).$$

Um zu Größenschätzungen für den Betrag von  $f(s) = \ln(1/\zeta(s))$  zu gelangen, wird der Dreikreisesatz Hadamards beansprucht sowie folgende Betragsschätzung von Exponentialsummen: Für alle Primzahlen  $p_{\nu} < n$  gibt es ein  $\tau_n$  mit  $e^{2n^2} < \tau_n < 2e^{2n^2}$ , so daß  $\cos(\tau_n \ln p_{\nu}) \leq -\frac{1}{2}$  bleibt. Die Frage, wie klein  $|\zeta(s)|$  im kritischen Streifen werden kann, wird beantwortet für  $\text{Im}(s_{\nu}) = t_{\nu} \rightarrow \infty$  und  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \text{Re}(s_{\nu}) - 4\varepsilon$  durch  $|\zeta(s_{\nu})| \leq \exp[-(\ln t_{\nu})^{(1-\alpha-\varepsilon)/3}]$ . W. Maier.

**Boas jr., R. P.:** Inequalities between series and integrals involving entire functions. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **16**, 127—135 (1952).

Let  $\varphi(t)$  be a non-decreasing convex function of  $\log t$  with  $\varphi(0) = 0$ ; then  $\varphi(|g(z)|)$  is subharmonic if  $g(z)$  is analytic. This fact is used to prove what follows:

If  $f(z)$  is an entire function of exponential type  $c$  and  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(|f(s)|) ds \leq M$ , then

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{-r\delta} |f(\lambda_n)|) \leq \frac{2M}{\pi\delta}, \text{ if } \{\lambda_n\} \text{ is a real sequence such that } \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq 2\delta > 0.$$

A theorem for the half-plane is also given.

*Bo Kjellberg.*

**Macintyre, A. J.:** Asymptotic paths of integral functions with gap power series. *Proc. London math. Soc., III. Ser.* **2**, 286—296 (1952).

Es handelt sich um ganze Funktionen (1)  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\lambda_n}$  mit Lücken ( $\lambda_n$  ganz;  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ ). Kann man aus Eigenschaften der Folge  $\lambda_n$  auf die Nichtexistenz nach  $\infty$  führender stetiger Wege schließen, längs welcher  $F(z)$  einem Grenzwert zustrebt? Aus (2)  $\lambda_n/n \rightarrow \infty$  z. B. folgt die Nichtexistenz, falls (1) von endlicher Ordnung ist [G. Pólya, *Math. Z.* **29**, 549—640 (1929), S. 631, Satz IX]. Auf Nichtexistenz kann man nicht schließen, wenn (3)  $\lambda_n \sim n \log \log n$ ; dann gibt es nämlich eine ganze Funktion (1), welche längs der positiv reellen Achse gegen 0

strebt [a. a. O., S. 636—639]. Dies wird verallgemeinert, indem (3) durch  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$  ersetzt wird. Die zum Beweis konstruierte Funktion (1) ist überdies von endlicher Ordnung, wenn  $\lambda_n/n$  beschränkt ist. — Sei  $M(r)$  das Maximum,  $m(r)$  das Minimum von (1) auf  $|z| = r$ . Pólya [a. a. O., S. 640] warf die Frage auf: Kann aus (2) auf  $\lim_{r \rightarrow \infty} [\log m(r)]/[\log M(r)] = 1$

geschlossen werden, falls (1) von endlicher Ordnung ist? Verf. zeigt in dieser Richtung: Gilt (2) und ist (1) von endlicher Ordnung, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  beliebig große  $R > 0$  mit der Eigenschaft:  $\log |Fz| > (1 - \varepsilon) \log M(R)$  für alle  $z$ , die auf einer gewissen stetigen, einfach geschlossenen, den Ursprung umlaufenden und dem Ring  $R(1 - \varepsilon) < |z| < R$  angehörenden Kurve liegen. Speziell folgt daraus wieder die Nichtexistenz von Wegen der oben genannten Art. Der Beweis stützt sich auf eine Arbeit von F. Sunyer i Balaguer [Mem. Real Acad. Ci. Art. Barcelona, III. Ser. **29**, 475—516 (1948)].

*W. Meyer-König.*

**Hayman, W. K.:** The minimum modulus of large integral functions. *Proc. London math. Soc., III. Ser.* **2**, 469—512 (1952).

Es sei  $u(z)$  eine in der ganzen Ebene subharmonische Funktion,  $B(\varrho)$  ihre obere Grenze auf  $|z| = \varrho$ ,  $B_2''(\varrho) = B(\varrho)$ . Ist  $A$  genügend groß, so gilt für jedes  $u(z)$  die Ungleichung  $u(z) > -A B(\varrho) \ln(C \varrho^2 B(\varrho)/B_2(\varrho))$  auf einer  $\varrho$ -Intervallfolge mit positiver unterer Dichte. Dieses Resultat benützt Verf. weiter zu Untersuchungen über die Relation zwischen Minimalmodul  $m(\varrho)$  und Maximalmodul  $M(\varrho)$  einer ganzen Funktion  $f(z)$ , indem er  $u(z) = \ln |f(z)|$  setzt. Ist  $f(z)$  von genügend großer Ordnung  $k$ , so gilt für eine  $\varrho$ -Menge von positiver logarithmischer Dichte  $\ln m(\varrho) > -A \ln k \cdot \ln M(\varrho)$ . Für ein  $f(z)$  von unendlicher Ordnung wird die entsprechende Ungleichung  $\ln m(\varrho) > -A \ln M(\varrho) \ln \ln \ln M(\varrho)$ . Andererseits zeigt Verf. durch Gegenbeispiele, daß die Ungleichungen (bis auf eingehende Konstanten) die bestmöglichen sind. So konstruiert er für jedes genügend große  $k$  ein  $f(z)$  der Ordnung  $k$  mit  $\ln m(\varrho) < -A' \ln k \cdot \ln M(\varrho)$  für alle  $\varrho$ , ebenso Funktionen unendlicher Ordnung mit beliebig hoher Zuwachsstärke und  $\ln m(\varrho) < -A' \ln M(\varrho) \ln \ln \ln M(\varrho)$ . Die Beweise fußen auf einen Satz von F. Riesz (nicht M. Riess!) und sind durch meistens elementare, aber sehr mühsame Abschätzungen erbracht. *G. af Hällström.*

**Kjellberg, Bo:** On integral functions bounded on a given set. *Mat. Tidsskr. B* **1952**, 92—99 (1952).

Soit une fonction entière non constante vérifiant  $|f(z)| \leq 1$  sur un ensemble  $B$ . Pour obtenir une limitation inférieure de la croissance de  $M(r)$ , l'A. procède en deux temps. Tout d'abord, utilisant la définition géométrique d'Ahlfors et Shimizu pour la fonction caractéristique  $T(r)$ , ainsi qu'un théorème de Jörgensen (voir l'analyse suivante), il obtient en fonction de  $M(r)$  des renseignements sur



l'ensemble  $B_2$  où  $|f(z)| \leq 2$ . Il applique ensuite seulement les méthodes de majoration harmonique sur l'ensemble complémentaire de  $B_2$ , en faisant appel à l'inégalité de A. Pfluger (ce Zbl. 34, 53). Les résultats obtenus sont appliqués aux fonctions bornées sur certaines suites de points.

*G. Bourion.*

**Jørgensen, Vilhelm:** A remark on Bloch's theorem. Mat. Tidsskr. B 1952, 100—103 (1952).

Adaptant une méthode appliquée au théorème de Bloch par L. Ahlfors (ce Zbl. 18, 410) l'A. établit le résultat suivant, remarquable par la valeur numérique simple de la constante:  $f(z)$  étant méromorphe dans le cercle-unité  $C$ , soit  $G$  le domaine couvert sur la sphère de Riemann  $R$  liée au plan  $w$  par les images sur  $R$  des valeurs prises dans  $C$  par  $w = f(z)$ ;  $ds$  étant l'élément d'arc  $\frac{|dw|}{1+|w|^2}$  de  $r$ , soit

$\left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{z=0} = a$ : alors  $G$  contient une calotte de rayon sphérique (mesuré par l'angle au centre) égal à  $\text{Arc tg } a$ .

*G. Bourion.*

**Tsujii, Masatsugu:** An extension of Bloch's theorem and its applications to normal family. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 203—205 (1952).

En utilisant une extension à la sphère complexe du théorème de Bloch, l'A. démontre que: si  $D_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) sont  $q \geq 3$  domaines simplement connexes et disjoints de la sphère complexe et  $m_i$  sont  $q$  entiers positifs tels que  $\sum (1 - 1/m_i) > 2$ , toute fonction  $w = f(z)$  méromorphe dans  $|z| < R$  qui engendre une surface de Riemann  $\Sigma$  ne présentant sur  $D_i$  que des disques de multiplicité  $\geq m_i$ , satisfait à  $R |f'(0)| / (1 + |f(0)|^2) < K$ , où  $K$  est une constante ne dépendant que des  $D_i$  (cf. Dufresnoy, ce Zbl. 25, 322). L'A. en déduit un critère de famille normale. Il obtient des résultats analogues en remplaçant la condition imposée à  $\Sigma$  par la suivante:  $\Sigma$  est surface de recouvrement d'une surface de Riemann fermée donnée de genre  $\geq 2$ .

*J. Dufresnoy.*

**Bose, S. K.:** Maximum and minimum function of a meromorphic function. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 69—74 (1952).

Après avoir défini la fonction maximum  $S(r)$  et la fonction minimum  $s(r)$  d'une fonction méromorphe  $f(z)$ , l'A. établit quelques propriétés très simples en liaison avec ces définitions.

*J. Dufresnoy.*

**Milloux, Henri:** Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes et de leurs dérivées. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 39—41 (1952).

One of the meromorphic functions  $f(z)$ ,  $f'(z)$  is supposed to take on three particular values rarely two other values often. Then estimates for the magnitude of the modulus of the first of these functions can be given. As an application, the theorem (for  $f$ ,  $f'$  of finite order) concerning common Borel-Valiron directions is proved.

*Bo Kjellberg.*

**Sagawa, Akira:** Über die Ausnahmegebiete. Math. Japonicae 2, 146—148 (1952).

Modifizierter Beweis eines mit dem bekannten Collingwoodschen Satz zusammenhängenden Satzes des Ref. (dies. Zbl. 20, 139) über Ausnahmegebiete meromorpher Funktionen. — An Stelle einer vom Ref. verwendeten direkten Abschätzung wird hier der erste Ahlforssche Überdeckungssatz zu Hilfe genommen.

*A. Dinghas.*

**Kobori, Akira:** Une remarque sur les fonctions multivalentes. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 1—5 (1952).

Consider a family of functions

$$\zeta(z) = z^{-p} (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots), \quad a_0 \neq 0,$$

which are  $p$ -valent in the unit circle  $|z| < 1$ , where  $p$  denotes a positive integer.

Using the fact that  $\{z^p \zeta(z)\}^{\lambda/2p} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  ( $\lambda > 0$ ) satisfies  $\sum_{v=1}^{\infty} (2v - \lambda) |b_v|^2 \leq \lambda |b_0|^2$  [s. Verf., Japanese J. Math. 19, 301—319 (1947)] and its direct consequences,

the author proves that

$$|\zeta(z)| \leq (4k|z|)^p \cdot |a_0| \quad \text{for } |z| < 1,$$

and that

$$\left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu \right| \leq (1 + \sqrt{p/2}) (4k)^p \cdot |a_0|$$

for all  $n$ , where  $k = 1.03142 \dots$ . The latter inequality is an extension of a result of the reviewer (this Zbl. 10, 263). The author conjectures that the exact value of  $k$  is 1.

*K. Noshiro.*

**Sasaki, Yasuharu:** On some family of multivalent functions. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 3, 89–92 (1952).

Soit  $F(z) = z_p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$  une fonction holomorphe dans  $|z| < 1$  et qui transforme  $|z| < 1$  sur un domaine  $p$ -valent. Si ce domaine est convexe on dit que  $F \in \mathfrak{R}_p$ ; si ce domaine est étoilé,  $F \in \mathfrak{S}_p$ ; si les courbes correspondant à  $|z| = r$  ont partout une courbure positive et finie quelque soit  $r < 1$ ,  $F \in \mathfrak{D}_p$  (fonction quasi convexe). Pour que  $F \in \mathfrak{D}_p$  il faut et il suffit que  $1 + \Re(z F''/F') > 0$  pour  $|z| < 1$ . Si  $F \in \mathfrak{D}_p$ , alors  $\frac{1}{p} z F' \in \mathfrak{S}_p$  et réciproquement. Pour  $F \in \mathfrak{D}_p$ , l'A. donne des bornes inférieures et supérieures de  $|F(z)|$  et de  $|F'(z)|$  et des bornes supérieures des  $|a_{p+k}|$ . Il donne enfin l'expression des rayons de quasi convexité pour les fonctions de  $\mathfrak{S}_p$  et les fonctions bornées.

*J. Dufresnoy.*

**Royster, W. C.:** Convexity and starlikeness of analytic functions. Duke math. J. 19, 447–457 (1952).

Conditions that a function  $w = f(z)$ , regular on a smooth curve  $\gamma$  and with  $f'(z) \neq 0$  there, should map  $\gamma$  onto a convex (or starlike) curve  $\Gamma$  are easy to establish and essentially known (cf. G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze, Vol. I, Berlin 1925, p. 105). The author deals with the particular cases where  $\gamma$  is either a line, a circle, or a logarithmic spiral. In the case of a vertical line  $\gamma_v$ , for instance, the condition becomes  $\Re(f''(z)/f'(z)) \geq 0$  (or  $\Re(f'(z)/f(z)) \geq 0$ ). If  $f(z)$  is regular in  $|z| < 1$  and convex (or starlike) on all  $\gamma_v$  there, then these conditions allow to determine exact bounds for the coefficients of the power series of  $f(z)$ . — We mention two more results: (i) Let  $\gamma_\beta$  denote any line making an angle  $\beta$  with the positive real axis. If  $f(z)$ , regular in a domain  $R$ , is simultaneously convex on two families  $\gamma_\beta$  and  $\gamma_\delta$  there ( $0 < \beta < \delta < \pi$ ), then it is also convex on all  $\gamma_\vartheta$  where  $\beta \leq \vartheta \leq \delta$ . The same is true with respect to „starlikeness“ and in this case the result even holds for a wide class of non-analytical functions. (ii) If  $\gamma$  is a convex curve containing all the zeros of a polynomial  $P(z)$ , then  $P(z)$  is convex on  $\gamma$ .

*W. W. Rogosinski.*

**Broman, Arne:** Conformal mapping and convergence on the boundary. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 153–157 (1952).

Let (1)  $w = \sum_0^\infty a_n z^n$  be a function which maps the circle  $|z| < 1$  on the universal covering surface of a bounded domain, whose boundary consists of  $k$  continua  $C_1, C_2, \dots, C_k$  each consisting of more than one point. It is known that there exists  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ,  $|z_0| = 1$ , for all  $z_0$  contained in a set  $E$  of measure  $2\pi$ . Suppose that

the function (2)  $f_1(t) = \sum_0^\infty b_n t^n$  maps  $|t| < 1$  onto the interior domain of  $C_1$  and

(3)  $f_s(t) = \left( \sum_0^\infty a_n^{(s)} t^n \right)^{-1}$ ,  $s = 2, 3, \dots, k$ , maps  $|t| > 1$  onto the exterior domain of  $C_s$ . The author proves that if all the series (2), (3) converge for  $|t| = 1$ , then the series (1) converge at every point of the set  $E$ .

*J. Gorski.*

**Goodman, A. W.:** Inaccessible boundary points. Proc. Amer. math. Soc. 3, 742–750 (1952).

Let  $D$  be a domain formed by deleting from the entire  $w$ -plane an infinite number of semi-



infinite radial slits, symmetrically placed with respect to the real axis. Because of this symmetry it is sufficient to consider only the slits in the closed upper half-plane. Let  $S_n$  denote the slit with end point at  $w = \varrho_n e^{i\Phi_n}$  and suppose that  $\pi = \Phi_0 > \Phi_1 > \Phi_2 > \dots > \Phi_n > \dots > 0$ . Further suppose that there exists a constant  $m > 0$  such that  $m \leq \varrho_n < \infty$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  and that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = 0$ . [It is obvious that if  $\varrho_\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho_n < \infty$ , then all the points  $w > \varrho_\infty$  are inaccessible boundary points of  $D$ .] Then, such a domain  $D$  is said to be a region of type  $S$ . The author proves: For each region  $D$  of type  $S$  there are constants  $c > 0$ ,  $\theta_n$ ,

$$(1) \quad \pi > \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n > \dots > 0, \quad \theta_n \rightarrow \theta_\infty = 0$$

such that if

$$(2) \quad F(z) = \frac{cz}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2z \cos \theta_n + z^2)^{\gamma_n}},$$

where  $\gamma_n \pi = \Phi_{n-1} - \Phi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , then  $F(z)$  maps  $|z| < 1$  conformally onto  $D$ , with  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) > 0$ . Conversely each function defined by (2) and (1) with  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 1$ ,  $\gamma_n > 0$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , maps  $|z| < 1$  conformally onto a region of type  $S$  where the directions of the slits are determined by  $\Phi_n = \pi \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_j$ . Furthermore the author gives a necessary and sufficient condition that  $F(z)$  given by (2) maps  $|z| < 1$  conformally onto a region of type  $S$  with inaccessible boundary points. As its application, the author proves: If  $0 < A < 1$ , the function

$$F(z) = \frac{z}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 - z 2 \cos(\pi A^{n/2}/2) + z^2)^{A^n(1-A)}}$$

maps  $|z| < 1$  onto a region of type  $S$  for which all the points  $w > M$  are inaccessible boundary points, where  $M = 2/(1-A) A^{A/(1-A)}$ . K. Noshiro.

Hällström, Gunnar af: Eine Bemerkung über Einschnittgebiete. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 18, Nr. 6, 7 S. (1952).

Im Anschluß an seine frühere Untersuchung über die konforme Abbildung von Einschnittgebieten auf die Kreisscheibe  $|z| < 1$  (dies. Zbl. 46, 307) betrachtet Verf. auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  eine solche Menge  $(\lambda_n)$  von offenen Bogen, daß die Restmenge  $\kappa$  mit ihrem transfiniten Kern identisch und von positiver Kapazität ist, und beweist, daß es unendlich viele dichte Einschnittgebiete gibt, die sich konform auf  $|z| < 1$  mit der Ränderzuordnung  $l_n$  (Einschnitt)  $\leftrightarrow \lambda_n$  abbilden lassen. falls  $\kappa$  so in zwei Teile  $\kappa'$  und  $\kappa''$  zerfällt, daß  $\kappa'$  sowohl in der abgeschlossenen Hülle von  $(\lambda_n)$  wie auch von  $\kappa''$  liegt und das harmonische Maß von  $\kappa''$  in bezug auf die Komplementärmenge von  $\kappa$  positiv ist und in jedem Punkt von  $\kappa'$  verschwindet.

A. Pfluger.

Paatero, V.: Über die konforme Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 128, 14 S. (1952).

$\zeta(z)$  bilde den Einheitskreis  $|z| < 1$  auf ein endlich-vielblättriges Gebiet von beschränkter Randdrehung ab. Verf. zeigt zuerst die Darstellbarkeit von  $1 + z \zeta''(z)/\zeta'(z)$  in der Poisson-Stieltjeschen Integralform. Sodann beweist er umgekehrt, daß jede durch diese Integralformel gegebene Funktion sich als ein Funktional des gedachten Typus ansehen läßt. Eine Verallgemeinerung wird erwähnt für den Fall, daß das Bildgebiet unendlich viele Verzweigungspunkte enthält.

Y. Komatu.

Buckel, Walter: Ähnlichkeit im Großen bei konformen Abbildungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1951, 163—189 (1952).

Soit  $f(z)$  une fonction analytique régulière dans un domaine  $G$ . L'A. donne les conditions dans lesquels il existe dans  $G$  un sousensemble dense en soi  $T$  tel que pour toutes les couples de points  $z_1$  et  $z_2 \neq z_1$  de  $T$  le quotient  $|f(z_2) - f(z_1)| : |z_2 - z_1|$  soit égal à une constante  $\alpha = d(T)$ . En général il n'existe dans  $G$  aucun  $T$  (dense en soi). Pour que chaque point de  $G$  appartienne à un  $T$  il faut et il suffit que  $f(z)$

soit de la forme  $f(z) = (az + b)^{-(1-ti)/(1+ti)} + c$  où  $a, b, c$  sont des constantes complexes et  $t$  une constante réelle.

*F. Leja.*

**Myrberg, P. J.:** Über automorphe Funktionen und Riemannsche Flächen. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 24—34 (1952).

Bericht über die Untersuchungen des Verf. über automorphe Funktionen in Verbindung mit der neueren Entwicklung auf dem Gebiete der offenen Riemannschen Flächen. Vgl. dies. Zbl. 34, 52.

*A. Pfluger.*

**Tamura, Jirô:** A note on Riemann surfaces and analytic functions. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 125—128 (1952).

Von der Tatsache ausgehend, daß die universelle Überlagerungsfläche der Riemannschen Fläche  $R$  auf den Einheitskreis konform abbildbar ist, sucht Verf. die Lösung der Uniformisierungsaufgabe in bezug auf  $R$  mit Hilfe automorpher Formen.

*G. af Hällström.*

**Mori, Akira:** A remark on the prolongation of Riemann surfaces of finite genus. J. math. Soc. Japan 4, 27—30 (1952).

Nevanlinna vermutet in seiner Arbeit über Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung (dies. Zbl. 30, 153), daß die Fortsetzung einer Riemannschen Fläche  $F$  von endlichem Geschlecht  $p$  auf eine geschlossene Riemannsche Fläche  $F^*$  dann und nur dann eindeutig sei, wenn  $F$  der Klasse  $N_D$  angehöre ( $F$  hat einen hebbaren Rand nach Sario). Diese Vermutung wurde für  $p = 0$  von Ahlfors und Beurling (dies. Zbl. 41, 203) bewiesen. — Verf. beweist obige Vermutung für beliebiges Geschlecht unter Benutzung der zitierten Arbeit von Ahlfors-Beurling.

*H. P. Künzi.*

**Ahlfors, Lars V.:** On the characterization of hyperbolic Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 125, 5 S. (1952).

Verf. bemerkt, daß eine hyperbolische Riemannsche Fläche zweckmäßig als solche Fläche definiert werden könne, auf der eine nicht-konstante negative subharmonische Funktion existiert. Die Äquivalenz dieser Bedingung mit den ge-läufigen ist leicht zu zeigen.

*A. Pfluger.*

**Ahlfors, Lars V. and H. L. Royden:** A counterexample in the classification of open Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 120, 5 S. (1952).

Die Verff. konstruieren eine Riemannsche Fläche, die vom hyperbolischen Typus ist oder m. a. W. auf der eine Greensche Funktion existiert, auf der aber keine eindeutige harmonische Funktion mit positivem und endlichem Dirichletintegral existiert. Die Inklusion  $O_G \subset O_{HD}$  ist also echt.

*A. Pfluger.*

**Tôki, Yukinari:** On the classification of open Riemann surfaces. Osaka math. J. 4, 191—201 (1952).

Verf. gibt 1. eine hyperbolische Fläche an, auf der jede eindeutige und beschränkte harmonische Funktion eine Konstante ist und 2. eine Fläche, auf der es wohl nicht-konstante eindeutige und beschränkte harmonische Funktionen gibt, aber keine solche Funktion, die ein endliches Dirichletintegral besitzt. Es sind also die Inklusionen  $O_G \subset O_{HB} \subset O_{HD}$  alle echt.

*A. Pfluger.*

**Gachov, F. D.:** Spezielle Fälle des Riemannschen Randwertproblems für Systeme von  $n$  Funktionenpaaren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 147—156 (1952) [Russisch].

Fortführung einer Reihe von Arbeiten des Verf. aus den Jahren 1949/50 zur gleichen Frage (dies. Zbl. 36, 335; 41, 47, 48). Gesucht werden die Vektoren  $\varphi^+(z) = \{\varphi_1^+(z), \dots, \varphi_n^+(z)\}$ ,  $\varphi^-(z) = \{\varphi_1^-(z), \dots, \varphi_n^-(z)\}$ , die auf dem Rand  $L$  einer gegebenen zusammenhängenden Punktmenge  $D^+$  der komplexen Zahlenebene  $n$  linearen Beziehungen genügen sollen, die durch die Vektorgleichung ausgedrückt sind:  $\varphi^+(t) = C(t) \varphi^-(t) + b(t)$ . Dabei soll  $\varphi^+(z)$  auf  $D^+$  holomorph und  $\varphi^-(z)$  auf der Komplementärmenge  $D^-$ , die den unendlich fernen Punkt enthält, holomorph sein.  $C(t)$  bedeutet eine gegebene Matrix, deren Elemente Funktionen des Punktes auf  $L$  sind, und  $b(t)$  einen gegebenen entsprechenden Vektor.  $L$  besteht aus einer Anzahl geschlossener glatter Kurven. — In der Theorie dieser Aufgabe wird im allgemeinen vorausgesetzt, daß die Elemente von  $C(t)$  und  $b(t)$  der Hölderschen Bedingung genügen und die Determinante von



$C(t)$  zudem nirgends verschwindet. Hier dagegen werden die singulären Fälle betrachtet, daß  $\det C(t)$  auf  $L$  eine endliche Anzahl von Nullstellen  $t_1, \dots, t_m$  besitzt und daß die Elemente von  $C(t)$  an endlich vielen Stellen  $t'_1, \dots, t'_p$  von  $L$  unendlich von ganzzahliger Ordnung werden können (Pole). Untersucht wird, wie sich bei Zulassung dieser Singularitäten die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Randwertaufgabe und die Anzahl der Lösbarkeitsbedingungen verändert. Die Methode besteht in einer Zurückführung des singulären Falles auf den normalen, wobei die Fälle der homogenen und der inhomogenen Randbedingungen, ferner der Fall des alleinigen Vorhandenseins von Nullstellen von  $\det C(t)$  sowie derjenige des zusätzlichen Auftretens der Pole gesondert betrachtet und in gleicher Weise durchgeführt werden. Die Art der Zurückführung besteht darin, daß die Matrix  $C(t)$  in ein Produkt zweier Matrizen aufgespalten wird, von denen die eine  $C_1(t)$  dem normalen Fall entspricht, während die andere  $Q(t)$  [im Falle des alleinigen Auftretens von Nullstellen von  $\det C(t)$  aus Polynomen, sonst] aus rationalen Funktionen besteht, so daß die Nullstellen der  $\det Q(t)$  mit denjenigen der  $\det C(t)$  und die Pole ihrer Elemente mit denjenigen der Elemente von  $C(t)$  zusammenfallen. Dementsprechend ist  $Q(t)$  in die Gebiete  $D^+$  und  $D^-$  analytisch fortsetzbar zu  $Q(z)$ . Geht man mit dieser Darstellung der Matrix  $C(t)$  in die Randbedingung ein, so läßt sich die Randwertaufgabe auf Grund des Satzes von der analytischen Fortsetzbarkeit und des verallgemeinerten Liouvilleschen Satzes lösen durch Angabe expliziter Ausdrücke für  $\varphi^+(z)$  und  $\varphi^-(z)$  in Abhängigkeit von  $Q(z)$ , einer Matrix  $X_1(z)$ , die ein kanonisches Lösungssystem von  $n$  Lösungen der homogenen Randwertaufgabe  $\varphi_+^+(t) = C_1(t) \varphi^-(t)$ , also des Normalfalles, darstellt, und eines willkürlichen Vektors  $P(z)$  aus Polynomen, deren Koeffizienten nur der Endlichkeitsbedingung anzupassen sind, so daß die Anzahl der danach noch frei verfügbar bleibenden Koeffizienten die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Aufgabe ergibt. Aus dieser Form der Lösung lassen sich dann die geforderten Aussagen über die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen und die Anzahl der Lösbarkeitsbedingungen entnehmen, z. T. mit Hilfe der Ergebnisse der früheren Arbeiten des Verf. — Ergebnisse: Das Vorhandensein von Nullstellen der  $\det C(t)$  ändert die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen und (im inhomogenen Fall) der Lösbarkeitsbedingungen nicht. Die letzteren ändern im allgemeinen ihre Form. Insbesondere genügt zu ihrer Erfüllung die Forderung der Hölderschen Bedingung für die Koeffizienten nicht, sondern in den Nullstellen der Determinante müssen sie Ableitungen entsprechend hoher Ordnung besitzen. Gibt es auch Pole, so verringert sich im Falle homogener Randbedingungen die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen, jedoch um nicht mehr als die Ordnung der  $\det Q(t)$  im unendlich fernen Punkt. Auch im inhomogenen Fall besteht eine Tendenz zur Verringerung dieser Anzahl, hingegen eine Tendenz zur Vergrößerung der Anzahl der Lösbarkeitsbedingungen, jedoch lassen sich allgemeine quantitative Aussagen einfacher Art darüber nicht machen. — Eine Schwierigkeit dieser Methode besteht in der Wahl der Matrix  $Q(t)$  als linken oder als rechten abzuspaltenden Faktors. Es erweist sich, daß in allen Fällen das zwar prinzipiell einheitlich gemacht werden kann, daß aber in verschiedenen einzelnen Fällen zweckmäßig, d. h. zur Verkürzung der Rechnung, verschiedenartig vorzugehen ist.

*E. Svenson.*

**Caccioppoli, Renato: Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. I, II.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 197—204, 321—329 (1952).

Verf. nennt eine stetige Abbildung  $w = w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z = x + i y$ , eine pseudoanalytische Funktion vom Parameter  $\mu$ , wenn  $u$  und  $v$  vollständig in  $x$  bzw.  $y$  sind für fast alle  $y$  bzw.  $x$ , die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  lokal (d. h. in kleinen Gebieten) quadratisch integrierbar sind und mit  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ ,  $\Phi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|$ ,  $\varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$  die Bedingungen

$J \geq 0$ ,  $\varphi \geq \mu \Phi$  für eine positive Konstante  $\mu \leq 1$  fast überall erfüllt sind. Einige Resultate: 1. Wird der Kreisring  $r_1 < |w| < r_2$  höchstens  $p$ -fach überdeckt, so gilt für den Flächeninhalt  $\alpha(r_1, r_2)$  der Urbildmengen  $\alpha(r_1, r_2) \geq \frac{4\mu d^2}{\pi p} \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$ , wenn  $d$  den Durchmesser der Urbilder von  $|w| = r_1$  bezeichnet. [Bemerkung des Ref.: die exakte Schranke für  $\alpha(r_1, r_2)$  ist

$\frac{2\mu d^2}{\pi p} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ]. 2. Die weitere Ungleichung  $F(r) \geq \frac{2\mu}{\pi} \omega^2(r_0) \ln \frac{r_2}{r_1}$ , wo  $F(r) = \int_{|z| < r} J dx dy$

und  $\omega(r_0)$  die Schwankung von  $w(z)$  auf  $|z| = r_0$  ( $0 < r_0 < r$ ) bezeichnet, ist jedenfalls für schlichte  $w(z)$  richtig und dann mit der obigen identisch. Für beliebige (nicht schlichte)  $w(z)$  ist  $r^{-2\mu} F(r) \geq r_0^{-2\mu} F(r_0)$ ; es genügt also  $F(r)$  lokal gleichmäßig einer Hölderbedingung mit dem Exponenten  $\mu$ .

3. Für solche Bildgebiete, in denen für ein festes  $K$  die isoperimetrische Ungleichung  $A < K L$  gilt, ist ferner  $F(r) < \frac{2\pi K^2}{\mu} \left( \ln \frac{R}{r} \right)^{-2}$ ,  $R > r$ . — Des Verf. Trick besteht darin, die Abbildung

$u + i v$  durch stetig differenzierbare Abbildungen  $u_n + i v_n$  so zu approximieren, daß die  $u_n$  und  $v_n$  lokal gleichmäßig gegen  $u$  und  $v$  und die partiellen Ableitungen der  $u_n$  und  $v_n$  im quadrati-

schen Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen von  $u$  und  $v$  konvergieren. Für differenzierbare Abbildungen sind aber die angegebenen Resultate bekannt. Es ergeben sich für pseudoanalytische Funktionen im Sinne des Verf. analoge Konsequenzen in Richtung des Picardschen Ideenkreises, wie dies schon für glatte Abbildungen gezeigt wurde. — Weitere Resultate und Anwendungen wie z. B. die Gleichstetigkeit gewisser Funktionenklassen beruhen auf der Behauptung, daß eine pseudoanalytische Abbildung eine innere Abbildung im Sinne von Stoilow sei, deren Beweis aber nur angedeutet wurde. *A. Pfluger.*

**Rizza, Giovanni Battista:** Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 667—669 (1952).

In einer früheren Arbeit (Rend. Sem. mat. Univ. Roma 1952, 134—155) hat Verf. für die monogenen Funktionen in einer kommutativen komplexen Algebra  $A$  mit Einselement das Analogon zur Cauchyschen Integralformel aufgestellt unter der Bedingung, daß die Nullteiler jedes irreduziblen direkten Summanden  $A_s$  von  $A$  auf einer Hyperebene des komplexen Darstellungsraumes von  $A_s$  liegen. Hier wird auf Grund einer Bemerkung von Spampinato [Ricerche di Mat. 1, 3—19 (1952)] gezeigt, daß diese Bedingung für jedes  $A$  erfüllt ist. *E. Trost.*

**Thullen, Peter:** Probleme der Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 107—119 (1952) [Spanisch].

Verf. gibt eine Einführung in Fragestellungen der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, die in den letzten Jahrzehnten behandelt wurden. Am Beispiel eines eigentlichen, nicht vollkommenen Reinhardtschen Körpers wird die Existenz von Nichtregularitätsgebieten aufgewiesen; anschließend werden die bekannten Konvexitätseigenschaften von Regularitätsgebieten sowie die grundlegenden Sätze über die Existenz von Regularitätshüllen zu vorgegebenen Gebieten diskutiert. Die Hyperkugel bzw. der Einheitspolyzylinder werden als Beispiele für nicht-echte bzw. echte Regularitätshüllen angegeben. Weiter werden einige von P. Thullen und W. Rothstein herrührende Sätze über die Singularitäten analytischer Flächen besprochen. *R. Remmert.*

**Sommer, Friedrich:** Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Ann. 125, 172—182 (1952).

Die Fülle der Integralformeln, aufgestellt u. a. von St. Bergmann, S. Bochner, A. Weil und E. Martinelli, ist verwirrend. Viele von ihnen lassen sich nun, wie Verf. zeigt, aus einer von E. Martinelli (dies. Zbl. 22, 240) herrührenden Formel ableiten. In ihr wird über den vollen Rand eines Gebietes  $G^{2n}$  integriert. Verf. gewinnt aus ihr eine Serie neuer Integralformeln für analytische Polyeder, in denen jeweils über die  $(2n - k)$ -dimensionalen Seiten des Polyeders integriert wird. Darin ist für  $k = n$  die Formel von A. Weil (dies. Zbl. 11, 123) enthalten. Die an sich komplizierten Umformungen werden dadurch übersichtlich, daß gewisse alternierende Differentialformen als Determinanten geschrieben werden. *W. Rothstein.*

**Temljakov, A. A.:** Die analytische Fortsetzung von Funktionen von zwei Veränderlichen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 525—536 (1952) [Russisch].

Das Gebiet: (1)  $|x| + |y| < R$  heiße „Konvergenzhyperkonus“ der analytischen Funktion: (2)  $F(x, y) = \sum_n \sum_m a_{nm} x^n y^m$ , wenn die Reihe (2) in jedem

Punkte von (1) absolut konvergiert und es kein größeres Gebiet dieser Form mit derselben Eigenschaft gibt. Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß der Konvergenzhyperkonus Regularitätsgebiet von  $F$  ist. Die Rechnungen benutzen die

„determinierende“ Funktion: (3)  $f(u, v) = \sum_n \sum_m \frac{n! m!}{(n+m)!} a_{nm} u^n v^m$ , die mit  $F$  durch die Integraldarstellung:  $F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + y e^{it}, y + x e^{-it}) dt$  und



ihre Umkehrung:  $f(u, v) = \int_0^1 \frac{d}{du} (u F(u T, v(1-T))) dT$ ,  $v = u e^{it}$ , zusammen-

hängt. Z. B. gilt: Wenn die Reihe (3) im Bizylinder  $|x| < R$ ,  $|y| < R$  absolut konvergiert, so konvergiert (2) absolut im Hyperkonus (1) und umgekehrt. Verf. beweist u. a.: Der Konvergenzhyperkonus (1) ist Regularitätsgebiet von  $F$ , wenn für jedes  $t$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int \sum_{q-\varepsilon < k/n_p < q+\varepsilon} \frac{k! (n_p - k)!}{n_p!} a_{k, n_p - k} \exp \{-i(n_p - k)t\} = \frac{1}{R}$$

und  $\lim_{p \rightarrow \infty} n_p/p = \infty$  ist, wobei  $q$  eine beliebige rationale Zahl mit  $0 \leq q \leq 1$  und  $\varepsilon$  eine beliebige Zahl mit  $0 \leq q - \varepsilon < q + \varepsilon \leq 1$  ist. W. Thimm.

Thimm, Walter: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. I. Über die Änderung der Monodromiegruppe parameterabhängiger analytischer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 125, 145—164 (1952).

Thimm, Walter: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. Math. Ann. 125, 264—283 (1953).

Sei  $M$  eine irreduzible analytische  $2s$ -dimensionale Menge im  $C^n$ , ferner  $m_\kappa(P)$  ( $\kappa = 1, \dots, k$ ;  $k < s$ ) ein System unabhängiger meromorpher Funktionen auf  $M$ , die sämtlich einen festen Punkt  $P_0$  auf  $M$  als Unbestimmtheitspunkt besitzen. Verf. zeigt: Erfüllt die durch  $t_\kappa = m_\kappa(P)$  gegebene Abbildung  $T$  in den Raum  $C_t^k$  der komplexen Veränderlichen  $(t_1, \dots, t_k) = t$  eine gewisse Voraussetzung, so ist jede von den  $m_\kappa$  auf  $M$  abhängige meromorphe Funktion sogar algebraisch von ihnen abhängig. Die Voraussetzung über  $T$  besagt im wesentlichen, daß die „Fasern“  $F_T(t)$ , d. h. die Urbildmengen der Punkte  $t$  des  $C_t^k$  bei der Abbildung  $T$ , sämtlich in den Punkt  $P_0$  hinein fortsetzbar sein sollen, wenn  $t$  eine Umgebung eines festen Punktes  $t_0$  durchläuft. — Zur Vorbereitung des Beweises werden im Teil I zunächst stetige und reguläre Scharen analytischer Mengen untersucht. Es handelt sich vor allem um die Frage, wie sich die Monodromiegruppen gewisser mit den Scharen in Beziehung stehender algebroider Funktionen bei Parameterspezialisierungen verändern. Teil II enthält den Beweis des Hauptsatzes. Von besonderer Wichtigkeit sind Aussagen über das Verhalten der Abbildung  $T$ , wenn die Bildpunkte auf eine zweidimensionale analytische Ebene des  $C_t^k$  beschränkt werden. Ein Beispiel zeigt abschließend, daß die Voraussetzung über  $T$  im allgemeinen nicht entbehrlich ist. K. Stein.

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Cinquini, Silvio: Funzioni quasi-periodiche ed equazioni differenziali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 47—74 (1952).

Expository paper with many references to literature.

E. Følner.

Petersen, Richard: Laplacetransformation of almost periodic functions. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 158—165 (1952).

Es werden drei Sätze bewiesen. Satz I: Die Laplacesche Transformierte

$F(s) = \int_0^\infty e^{st} f(t) dt$  einer Bohrschen fastperiodischen (fp.) Funktion  $f(t)$ , deren

Fourierexponenten  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) nicht überall dicht liegen, ist über jedes Intervall der imaginären Achse, das keine von den Zahlen  $i\lambda_j$  enthält, in die linke Halbebene hinaus analytisch fortsetzbar. Ist  $\lambda_m$  ein isolierter Exponent, so hat  $F(s)$  in  $i\lambda_m$  einen einfachen Pol. Satz II: für  $s = x + it$ ,  $x \geq 0$  gilt

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^t f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right\} dt,$$

außer wenn  $x = 0$  und  $t$  zur abgeschlossenen Hülle der  $\lambda_j$ -Menge gehört. Satz III: Ist  $|\lambda_j| < K < \infty$ , so gibt es eine ganze Funktion  $g(z)$ , für welche  $g(it) = f(t)$  gilt. Die Sätze I und III gibt Verf. als bekannt an. Satz I wurde 1934 von Bochner und Bohnenblust bewiesen. Der Beweis des Verf. ist rechnerisch einfacher und macht weniger Gebrauch von den Eigenschaften der Fouriertransformierten, mehr aber von denen der fp. Funktionen.

St. Hartman.

**Genuys, François:** Sur les fonctions presque périodiques dans une bande. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1939—1941 (1952).

L'A. indique la démonstration d'un théorème qui affirme que si une série de Dirichlet adhère au sens de Mandelbrojt (Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Paris 1952, Chap. III; ce Zbl. **48**, 52) suffisamment à une fonction  $F(s)$  holomorphe dans une bande assez large, alors  $F(s)$  est presque-périodique. A part des résultats de Mandelbrojt, l'A. utilise des idées de Brunk (loc. cit. pp. 85—92) et de Sunyer y Balaguer (ce Zbl. **38**, 43). L'énoncé détaillé du théorème est trop compliqué pour être reproduit ici.

J. Horváth.

**Bochner, S.:** Connection between functional equations and modular relations and functions of exponential type. J. Indian math. Soc., n. Ser. **16**, 99—102 (1952).

Verf. beweist ein Theorem über „Residual-Funktionen“, die schon in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **42**, 321) auftreten.  $P(x)$  heißt „Residual-Funktion“, wenn folgendes gilt: 1.  $P(x)$  ist definiert und differenzierbar für  $0 < x < \infty$ . Für gewisses  $\gamma > 0$  ist  $P(x) = O(x^{-\gamma})$ ,  $x \rightarrow 0$ , und  $P(x) = O(x^\gamma)$ ,  $x \rightarrow \infty$ . 2. Die durch

$$\chi_r(s) = \int_0^1 P(x) x^{s-1} dx, \quad \chi_l(s) = \int_1^\infty P(x) x^{s-1} dx$$

in einer rechten bzw. linken Halbebene der komplexen Variablen  $s = \sigma + it$  definierten Funktionen sind Funktionselemente einer außerhalb eines Kreises definierten analytischen Funktion  $\chi_0(s)$ . 3.  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \chi_0(\sigma + it) = 0$  gleichmäßig in jedem endlichen Intervall  $\sigma_1 < \sigma \leq \sigma_2$ . Verf. beweist, daß eine Funktion  $P(x)$

dann und nur dann „Residualfunktion“ ist, wenn  $P(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n!} \left(\log \frac{1}{x}\right)^n$  mit  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} < \infty$ , und daß die in der Definition auftretende Funktion  $\chi_0(s)$  die

Entwicklung  $\chi_0(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{s^{n+1}}$  besitzt.

B. Schoeneberg.

**Radojčić, M.:** Sur les singularités essentielles de certaines fonctions automorphes dans un domaine. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **4**, 129—132 (1952).

Verf. hat früher (dies. Zbl. **5**, 253, siehe auch **16**, 168) den Begriff der (eindeutigen) absolut automorphen Funktion eingeführt, deren Existenzbereich er in Fundamentalbereiche (FB) einteilt, in denen die Funktion einwertig ist. Er nennt einen Punkt  $P$  Grenzpunkt einer unendlichen Folge von FB, wenn man aus jedem FB der Folge einen Punkt so wählen kann, daß die entstehende Punktfolge gegen  $P$  konvergiert. Geschieht dies bei jeder Wahl der Punkte, so sagt er, die Folge der FB konvergiere gegen  $P$ . Er fragt nach einer möglichst allgemeinen hinreichenden Bedingung dafür, daß (A) jede unendliche Folge von FB, die einen Grenzpunkt hat, gegen ihn konvergiert. Er findet: Der Existenzbereich einer absolut automorphen Funktion, deren Umkehrfunktion höchstens endlich viele algebraische Verzweigungspunkte besitzt, kann so in FB geteilt werden, daß (A) erfüllt ist. Die Grenzpunkte sind dann wesentlich singuläre Stellen. Ist eine Funktion in einem Bereich (aber vielleicht nicht in ihrem ganzen Existenzbereich) absolut automorph, so gilt ein entsprechender Satz.

G. Lochs.



**Borel, Armand:** Les fonction automorphes de plusieurs variables complexes. Bull. Soc. math. France **80**, 167—182 (1952).

Verf. berichtet zusammenfassend über die wichtigsten Ergebnisse, die während der letzten 30 Jahre in der Theorie der automorphen Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen erzielt wurden. Das Hauptaugenmerk wird auf das Problem der Existenz automorpher Funktionen und die Frage nach ihren algebraischen Relationen gerichtet. Dabei bezieht sich Verf. weitgehend auf die Ausarbeitung der Vorlesung Siegels über *Analytic functions of several complex variables* (Princeton 1949, dies. Zbl. **36**, 50). Ein besonderer Abschnitt ist den Untersuchungen É. Cartans über die beschränkten symmetrischen Räume gewidmet. Dem Bericht ist ein größeres Schriftenverzeichnis angefügt.

H. Maaß.

**Sampson, J. H.:** A note on automorphic varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 895—898 (1952).

Es bezeichne  $D$  einen beschränkten Bereich im Raum der komplexen Variablen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  und  $\Gamma = \{\gamma\}$  eine diskrete Gruppe analytischer Abbildungen von  $D$  auf sich. Eine in  $D$  holomorphe Funktion  $\theta(Z) = \theta(z_1, z_2, \dots, z_n)$  stellt eine automorphe Form zum Gewicht  $k$  ( $=$  natürliche Zahl) dar, wenn  $\theta(\gamma Z) = \theta(Z) [J_\gamma(Z)]^{-k}$  für  $\gamma \in \Gamma$  mit  $J_\gamma(Z) = \partial(\gamma Z)/\partial(Z)$  gilt. Mit Hilfe Poincaréscher Reihen des Typus  $\theta(Z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma Z) [J_\gamma(Z)]^k$  wird gezeigt, daß der Rang der linearen Schar der Formen vom Gewicht  $k$  mit  $k$  gegen  $\infty$  geht. Eine Anwendung dieses Theorems ergibt einen einfachen Beweis dafür, daß die Gruppe  $G$  der analytischen Abbildungen der komplexen Mannigfaltigkeit  $M = D \pmod{\Gamma}$  auf sich endlich ist, falls  $M$  kompakt ist. Dabei wird  $G$  als Liesche Gruppe behandelt, und es werden Hilfsmittel aus der Theorie der Lieschen Gruppen verwendet.

H. Maaß.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

**Haas, Felix:** A theorem about characteristics of differential equations on closed manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 1044—1047 (1952).

Extension à une variété orientable close  $W$  de résultats de A. Denjoy concernant les équations différentielles sur le tore. Etude de champs de vecteurs soumis à une condition de Lipschitz et n'ayant qu'un ensemble dénombrable de points singuliers sur  $W$ .

P. Lelong.

**Noto, Silvia:** Sulle equazioni differenziali del tipo  $(Q)$ . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **7**, 298—301 (1952).

The differential equation  $y'''' = \varphi(x, y, y', y'', y''')$  has a solution satisfying  $x = h$ ,  $y = k$  and, for  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $y'' = t$ , where  $t$  is a parameter. The value of  $y'$  at  $x = h$  is denoted by  $\theta(t)$ . If  $\theta$  is in homography with  $t$ , the expression  $f = 2(d\theta/dt)(d^3\theta/dt^3) - 3(d^2\theta/dt^2)^2$  will be zero. For small  $h$ , the expression  $f$  is always of order  $h$ . If  $f$  is of the order  $h^{1+s}$ , the system of curves satisfying the differential equation is said to have the projective property to the degree  $s$ . It is shown that to make  $s = 1$ , the differential equation must be of the form  $y'''' = A y'''^2 + B y''' + C$ , where  $A, B, C$  are functions of  $x, y, y', y''$ . This is the „equation of type  $Q$ “ studied by Kasner for the plane, and for curved surfaces by the author (see this Zbl. **40**, 336). — Conditions for  $s = 2$  and  $s = 3$  are also found.

W. W. Sawyer.

**Sears, D. B.:** Some properties of a differential equation. J. London math. Soc. **27**, 180—188 (1952).

Sei  $p > 1$ . Die Differentialgleichung  $y'' = f(x) y$  mit stetigem  $f(x)$  in  $x \geq 0$  kann keine Lösung  $y = \varphi(x)$  mit  $0 < \int_0^\infty |\varphi(x)|^p dx < \infty$  besitzen, falls für ein

$x_0 > 0$  und  $n \geq 0$  bei  $x \geq x_0$  eine Abschätzung

$$|f(x)| \leq \frac{p+1}{x^2 p^2} + \frac{p+2}{x^2 p^2} \sum_{r=1}^n \frac{1}{\log x \log_2 x \cdots \log_r x} + \sigma(x)$$

gilt, wobei  $\sigma(x)$  eine Funktion mit  $x \sigma(x) \in L(x_0, \infty)$  und  $x^{2q-1} \{\sigma(x)\}^q \in L(x_0, \infty)$  ( $1/p + 1/q = 1$ ) ist (für  $n = 0$  fehlen die logarithmischen Glieder). Die Konstanten  $(p+1)/p^2$ ,  $(p+2)/p^2$  sind bestmöglich. — Der Satz bleibt für  $p = 1$  gültig, wenn man nur die letzte Bedingung für  $\sigma(x)$  durch  $\sigma(x) = O(x^{-2})$  ( $x \rightarrow \infty$ ) ersetzt. Es ist  $\log_2 x = \log(\log x)$ ,  $\log_m x = \log(\log_{m-1} x)$  zu setzen. F. W. Schäfke.

**Lyra, Gerhard:** Über eine Konvergenzfrage bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit. J. reine angew. Math. 189, 238—242 (1952).

The existence of fundamental solutions of the differential equation  $z^2 w'' + z a(z) w' + b(z) w = 0$  may be proved either (I) by obtaining formal power series solutions and proving their convergence or (II) by „direct“ proofs not using power series. With method (II) the agreement of the formal solutions with the actual solutions requires demonstration. Method (II) leads to the following classification of possible cases; — (A<sub>1</sub>), having two solutions  $z^\alpha P_1(z)$ ,  $z^\beta P_2(z)$ , where  $\alpha - \beta$  is not an integer; (A<sub>2</sub>) as A<sub>1</sub> but  $\alpha = \beta + N$ ; (B<sub>1</sub>) having solutions  $z^\alpha P_1(z)$ ,  $z^\beta P_2(z) + C z^\alpha P_1(z) \log z$ , where  $\alpha = \beta$ ; (B<sub>2</sub>) as B<sub>1</sub> but  $\alpha = \beta + N$ . — Method (I) leads to a similar classification of cases A<sub>1</sub>', A<sub>2</sub>', B<sub>1</sub>', B<sub>2</sub>' in respect of formal solutions. The coincidence of the two systems of classification is not obvious; conceivably there might be two formal solutions (Case A<sub>2</sub>') of which only one converges (Case B<sub>2</sub>'). With the help of a lemma „B implies not A“ the equivalence of the classifications is proved. The existence of solutions once established by method (II) the validity of the formal solutions follows. — The paper concludes with a short proof, from viewpoint (I), that any formal solutions must converge. W. W. Sawyer.

**Hille, Einar:** Behavior of solutions of linear second order differential equations. Ark. Mat. 2, 25—41 (1952).

Betrachtet wird  $w''(x) = \lambda F(x) w(x)$  mit für  $0 \leq x < \infty$  stetiger positiver Funktion  $F(x)$  und komplexem Parameter  $\lambda$ . Hauptresultate: 1. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Fundamentalsystems  $w_1(x) = x(1 + o(1))$ ,  $w_2(x) = 1 + o(1)$  ( $x \rightarrow \infty$ ) für ein und damit für alle  $\lambda \neq 0$  ist:  $x F(x) \in L(0, \infty)$ . In diesem Falle gilt auch  $w_1'(x) = 1 + o(1)$ ,  $w_2'(x) = o(1)$ . 2. Sei  $x F(x) \notin L(0, \infty)$ ,  $\lambda = \mu + i\nu$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $w_0(0) = 0$ ,  $w_0'(0) = 1$ ,  $w_1(0) = 1$ ,  $w_1'(0) = 0$ . Dann beschreibt  $w_k(x, \lambda)$  für  $0 \leq x \leq \infty$  in der  $w$ -Ebene eine Spirale  $S_k(\lambda)$ , die von  $k$  nach  $\infty$  läuft.  $v^{-1} \arg w_k$  wächst mit  $x$  von 0 bis  $+\infty$ .  $S_k(\lambda)$  hat überall positiven Krümmungsradius und ist konkav zum Ursprung. Für  $\mu \geq 0$  wächst  $|w_k(x, \lambda)|$  monoton, für  $\mu > 0$  gilt  $|w_k(x, \lambda)|/x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Stets ist, falls nicht  $\lambda \leq 0$ ,  $|w_k(x, \lambda)|^{-1} \in L_2(1, \infty)$ . 3. Sei  $x F(x) \notin L(0, \infty)$ ,  $\lambda = \mu + i\nu$ ,  $\nu \neq 0$ . Dann beschreibt die „subdominante“ Lösung

$w_+(x, \lambda) = w_1(x, \lambda) \int_x^\infty [v_1(s, \lambda)]^{-2} ds$  eine Spirale  $S_+(\lambda)$  in der  $w$ -Ebene für  $0 \leq x < \infty$ . Ihr

Umlaufsinus ist dem von  $S_1(\lambda)$  entgegengesetzt. —  $v^{-1} \arg w_+$  wächst mit  $x$  nach  $+\infty$ .  $S_+(\lambda)$  hat positiven Krümmungsradius und ist konkav zum Ursprung. Für  $\mu \geq 0$  nimmt  $|w_+(x, \lambda)|$  monoton ab, für  $\mu > 0$  gilt  $w_+(x, \lambda) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Falls nicht  $\lambda \leq 0$ , gilt stets  $w_+(x, \lambda) w_1'(x, \lambda) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) und  $F(x) |w_+(x, \lambda)|^2$  und  $|w_+(x, \lambda)|^2$  gehören zu  $L(0, \infty)$ . — Weitere Resultate über die subdominante Lösung schließen sich an; sie betreffen u. a. Flächeninhalt und Länge von  $S_+(\lambda)$ . Den Schluß bildet eine kurze Diskussion der Wachstumseigenschaften von  $|w(x, \lambda)|$  für  $x \rightarrow \infty$ . F. W. Schäfke.

**Leighton, Walter:** On self-adjoint differential equations of second order. J. London math. Soc. 27, 37—47 (1952).

Betrachtet wird (1)  $(r(x) y')' + p(x) y = 0$  für  $0 < x < \infty$ ; dabei ist  $r(x) > 0$ ,  $r(x)$  und  $p(x)$  sind stetig. Nach einigen Vorbemerkungen über die Darstellung der Lösungen in Polarkoordinatenform  $y(x) = c_1 u(x) \cos v(x) + c_2 u(x) \sin v(x)$  wird eine naheliegende Verallgemeinerung des Trennungssatzes von Sturm bewiesen: 1. Seien  $y(x)$  und  $z(x)$  Lösungen von (1) und (1\*)  $(r(x) z')' + p_1(x) z = 0$ ; hat dann  $W(x) = r(x) [y(x) z'(x) - y'(x) z(x)]$  für großes  $x$  gleiches



Vorzeichen, so trennen sich dort die Nullstellen von  $y(x)$  und  $z(x)$ . — Weiter werden Schranken für die Lösungen erhalten, so z. B.: 2. Ist  $q(x) > 0$ ,  $q(x) \in C_2$ ,  $1 + q^3 q''$  positiv und monoton wachsend, so gilt für jede Lösung von  $y'' + q^{-1} y = 0$  eine Abschätzung  $|y(x)| \leq M q(x)$ . Analoge untere Schranken ergeben sich für die Funktion  $u(x)$  in  $y(x) = u(x) \cos v(x)$ , falls  $1 + q^3 q''$  monoton abnimmt. — Schließlich werden Bedingungen dafür hergeleitet, daß (1) oszillatorisch ist: 3. Ist  $p$  positiv und monoton, so ist, falls (1) oszillatorisch in  $(1, \infty)$ , notwendig

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \left(\frac{p}{r}\right)^{1/2} d\xi = +\infty. \quad 4. \text{ Gilt } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{d\xi}{r(\xi)} = +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x p(\xi) d\xi = +\infty,$$

so ist (1) oszillatorisch für große  $x$ . F. W. Schäfke.

**Burton, Leonard P.:** Oscillation theorems for the solutions of linear nonhomogeneous, second-order differential systems. *Pacific J. Math.* 2, 281–289 (1952).

$K(x)$ ,  $G(x)$ ,  $A(x)$  seien reell und stetig in  $a \leq x \leq b$ . Es sei  $K(x) > 0$ ,  $G(x) < 0$ ,  $K(x)G(x)$  nicht-wachsend und entweder  $\beta \leq 0$ ,  $A(x) > 0$  ( $x > a$ ),  $A(x)/G(x)$  abnehmend (i. e. S.) oder  $\beta \geq 0$ ,  $A(x) < 0$  ( $x > a$ ),  $A(x)/G(x)$  zunehmend (i. e. S.). I.  $y_1(x)$  bezeichne eine Lösung von (1) ( $K(x)y'$ )' -  $G(x)y = A(x)$ ,  $y(b) = \beta$ ,  $u_1(x)$  eine nichttriviale Lösung von (2) ( $K(x)u'$ )' -  $G(x)u = 0$ ,  $u(b) = 0$ . Dann trennen sich die Nullstellen von  $y_1$  und  $u_1$  in  $a \leq x < b$ . II. Sei (2) mit  $u(a) = u(b) = 0$  unlösbar,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  Lösungen von (2) mit  $u_1(b) = u_2(a) = 0$ ,  $K(u_2 u_1' - u_2' u_1) = 1$ ,  $y_2(x)$  die Lösung von (1) mit  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = \beta$ .  $u_2(x)$  möge genau die Nullstellen  $a = p_1 < p_2 < \dots < p_m (< b)$  ( $m > 3$ ) besitzen. Dann gilt:  $y_2(p_i) \neq 0$  ( $i \neq 1$ );  $y_2(x)$  hat entweder zwei Nullstellen in  $(p_i, p_{i+1})$  und keine in  $(p_{i+1}, p_{i+2})$  ( $2 \leq i \leq m-2$ ) oder umgekehrt;  $y_2(x)$  hat in  $(a, p_2)$  entweder keine oder eine Nullstelle, dann im ersten Falle zwei Nullstellen in  $(p_2, p_3)$ , im zweiten Falle keine Nullstelle in  $(p_2, p_3)$ ; hat  $y_2(x)$  zwei Nullstellen in  $(p_{m-1}, p_m)$ , so keine Nullstelle in  $(p_m, b)$ . — Es folgen Anwendungen dieser Sätze im Falle des Auftretens eines Parameters  $\lambda$  in (1). Dabei sind die Eigenwerte von (2) mit  $u(a) = u(b) = 0$  von wesentlicher Bedeutung. F. W. Schäfke.

**Hartman, Philip:** On non-oscillatory linear differential equations of second order. *Amer. J. Math.* 74, 389–400 (1952).

I.  $q(t)$  sei in  $0 \leq t < \infty$  reell und stetig; es gelte  $\sup_{0 < v < \infty} (1+v)^{-1} \left| \int_u^{u+v} q(t) dt \right| \rightarrow 0$  für  $u \rightarrow +\infty$ . Ist dann die Differentialgleichung (1)  $y'' + q(t)y = 0$  nicht-oszillatorisch, so gilt notwendig entweder (2)  $\int_0^T q(t) dt \rightarrow -\infty$  für  $T \rightarrow \infty$  oder (3)

es existiert (endlich)  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T q(t) dt$ . — II. Ist (1) nicht-oszillatorisch, so ist ent-

weder (4)  $\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \int_0^t q(s) ds dt = -\infty$  oder (5) es existiert (endlich)

$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \int_0^t q(s) ds dt$ ; dabei sind im Falle (4) für den  $\limsup$  alle Werte,  $-\infty$ ,

endlich oder  $+\infty$ , möglich. — III. Ist mit einem  $\varepsilon > 0$   $\int_u^{u+v} q(t) dt$  halbbeschränkt für  $0 \leq u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq \varepsilon$ , so gilt, wenn (1) nicht-oszillatorisch ist, entweder (2) oder (5). F. W. Schäfke.

**Jakubovič, V. A.:** Abschätzung der charakteristischen Exponenten und Stabilitätskriterien für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 87, 345–348 (1952) [Russisch].

The problem is reduced by means of a change of variable to the case  $y'' + p(t)y = 0$ ,  $p$  integrable periodic of period  $\omega$ . Let  $a = \sup_{t \in \mathbb{R}} p(t)$ ,  $\mu$  any positive number such that  $\mu^2 + a \geq 0$ . The following theorem is proved: if  $\int_0^\omega [a - p(t)] dt \leq \Phi(a, \mu)$  (where  $\Phi$  is a certain function which can be explicitly calculated) then

the solutions of the equation are  $O(e^{\mu t})$ . A similar statement where  $a$  is replaced by  $b = \inf p(t)$  also holds. Certain stability criteria are derived from these theorems.

*J. Massera.*

**Cohen, Hirsch:** The stability equation with periodic coefficients. *Quart. appl. Math.* **10**, 266—270 (1952).

The author considers the second order linear equation

$$(1) \quad u'' + \varepsilon p(t) u' + (1 + \varepsilon q(t)) u = 0,$$

where  $\varepsilon$  is a small parameter and  $p(t)$ ,  $q(t)$  are continuous periodic functions of period  $2\pi/\omega$ . Equation (1) can be considered as the linear variation equation of a class of non-linear second order differential equations, where criteria for the stability of a particular periodic solution of the latter are sought. Both the Mathieu and the Hill equations are particular cases of (1). It is well known that the  $(\varepsilon, \omega)$ -plane can be divided into zones corresponding to equations (1) having either all bounded solutions, or solutions partially unbounded in  $(0, +\infty)$ , respectively, and the lines of separation between zones correspond to equations (1) having periodic solutions. Thus through the determination of these periodic solutions criteria can be obtained for the boundedness of the solutions of equation (1). The first terms of a development in power series of  $\varepsilon$  of the periodic solutions of (1) are obtained by using Poincaré's method of casting out the secular terms. By using a procedure due to K. O. Friedrichs (see J. J. Stoker, *Non linear vibrations*, New York 1950, Appendix 1) the author determines conditions for periodic solutions and in turn criteria for the boundedness of the solutions of (1). (The period of the periodic solutions in question seems to the reviewer to be independent of  $\varepsilon$ , hence  $= 2\pi/\omega$ ; cf. S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton Univ. Press, 1949, p. 69). *L. Cesari.*

**Kato, Tosio:** Note on the least eigenvalue of the Hill equation. *Quart. appl. Math.* **10**, 292—294 (1952).

Es wird die Hillsche Differentialgleichung  $y'' + (\lambda + f(x)) y = 0$  mit reeller 1-periodischer Funktion  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n x}$  betrachtet. Für den kleinsten Eigenwert (1-Periodizität)  $\lambda_0$  werden aus dem Rayleighschen Minimalausdruck die Schranken  $-c_0 \geq \lambda_0 \geq -c_0 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ ,  $\lambda_0 \geq -c_0 - \pi^{-2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |c_n| \right]^2$  hergeleitet. *F. W. Schäfke.*

**Fishel, B.:** The continuous spectra of certain differential equations. *J. London math. Soc.* **27**, 175—180 (1952).

Betrachtet wird die Differentialgleichung  $(1) \quad x'' + (\lambda + q(t)) x = 0$  mit reeller stetiger Funktion  $q(t)$  in  $0 \leq t < \infty$ . Hartmann und Wintner (dies. Zbl. **35**, 181) hatten gezeigt: Ist  $(2) \quad q(t) \leq \tau < \infty$ , so ist (1) vom Grenzpunkttyp; ist dann  $x(t) = O(1)$  eine nichttriviale Lösung, so ist entweder  $x(t) \in L^2(0, \infty)$ , also  $\lambda$  in einem geeigneten Spektrum  $S_\lambda$  enthalten, oder  $\lambda$  gehört zum wesentlichen Spektrum  $S'$ . — Verf. zeigt, daß hier (2) durch jede der drei folgenden Bedeutungen ersetzt werden kann:  $q(t) \in L^2(0, \infty)$ ;  $q(t) \geq 0$ ,  $q(t_2) - q(t_1) < M(t_2 - t_1)$  ( $t_2 > t_1$ );  $|q(t_2) - q(t_1)| < M|t_2 - t_1|$ . *F. W. Schäfke.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On perturbations of the continuous spectrum of the harmonic oscillator. *Amer. J. Math.* **74**, 79—85 (1952).

Sei für  $0 \leq t < \infty$  die Funktion  $f(t)$  reell und stetig. Gilt dann

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T |f(t)| dt = 0,$$

so ist die Differentialgleichung  $(1) \quad x''(t) + (\lambda + f(t)) x(t) = 0$  vom Grenzpunkttyp, und ihr wesentliches Spektrum  $S'$  enthält die Halbgerade  $0 \leq \lambda < \infty$ . Gilt

$\liminf_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T |f(t)| dt \leq \tau < \infty$ , so ist (1) vom Grenzpunkttyp, und jedes Intervall,



$[\lambda, \lambda + 4\tau + 4\tau^2/\lambda]$  mit  $\lambda > 0$  enthält mindestens einen Punkt von  $S'$ . — Ein Anhang gibt vereinfachte Beweise schon bekannter Resultate. *F. W. Schäfke.*

**Hartman, Philip:** Some examples in the theory of singular boundary value problems. *Amer. J. Math.* **74**, 107—126 (1952).

I. Sei  $\psi(T)$  eine für  $0 < T < \infty$  positive stetige nicht-abnehmende Funktion. Dann gibt es reelle stetige Funktionen  $q(t)$  für  $0 \leq t \leq \infty$ , derart, daß die Anzahl  $N(T, \lambda)$  der Nullstellen jeder reellen nicht-trivialen Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung (1)  $x'' + (\lambda + q(t))x = 0$  ( $\lambda$  reell) im Intervall  $0 < t < T$  bei  $T \rightarrow +\infty$  jeweils eine der drei folgenden Eigenschaften hat:  $N(T, \lambda) = O(1)$  für  $\lambda < 0$ ,  $N(T, \lambda) = \psi(T) + O(1)$  für  $\lambda > 0$ ;  $N(T, \lambda) = \psi(T) + O(1)$  für alle  $\lambda$ ;  $N(T, \lambda) = \psi(T) + O(1)$  für  $\lambda < 0$ ,  $N(T, \lambda) = 2\psi(T) + O(1)$  für  $\lambda > 0$ . — II. Sei  $S$  eine abgeschlossene Punktmenge der reellen  $\lambda$ -Achse. Dann gibt es reelle stetige Funktionen  $q(t)$  in  $0 \leq t < \infty$  derart, daß für jedes Zahlenpaar  $\lambda, \mu$  die Differenz  $N(T, \mu) - N(T, \lambda)$  für  $T \rightarrow \infty$  unbeschränkt ist, falls das offene Intervall  $(\lambda, \mu)$  einen Punkt aus  $S$  enthält, und beschränkt ist, falls das abgeschlossene Intervall  $[\lambda, \mu]$  keinen Punkt aus  $S$  enthält. — Diese beiden Hauptresultate ziehen eine Reihe wichtiger Folgerungen für die Spektraltheorie singulärer Eigenwertprobleme für die Differentialgleichung (1) nach sich: 1. Es gibt reelle stetige Funktionen  $q(t)$  in  $0 \leq t < \infty$  derart, daß (1) vom Grenzpunkttyp ist und das zu  $x(0) \cos \alpha - x'(0) \sin \alpha = 0$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) gehörende Spektrum  $S_\alpha$  (für jedes  $\alpha$ ) ein reines Punktspektrum ist, das genau die Häufungspunkte  $+\infty$  und  $-\infty$  hat. 2. Es gibt Funktionen  $q(t)$ , derart, daß (1) vom Grenzpunkttyp ist, für jedes  $\lambda$  oszillatorisch ist und für jedes  $\lambda$  eine nicht-triviale Lösung aus  $L^2(0, \infty)$  besitzt; dabei sind die „Greenschen Kerne“ vollstetig. 3. (1) kann vom Grenzpunkttyp sein und  $S_\alpha$  (für jedes  $\alpha$ ) ein reines Punktspektrum sein, das genau 0 und  $+\infty$  (oder genau 0,  $+\infty$  und  $-\infty$ ) als Häufungspunkte hat. 4. (1) kann vom Grenzpunkttyp sein, das wesentliche Spektrum  $S'$  (= Menge der endlichen Häufungspunkte jedes  $S_\alpha$ ) allein aus  $\lambda = 0$  bestehen und dabei kein Intervall  $(0, \lambda)$  mit  $\lambda > 0$  unendlich viele Punkte aus  $S_\alpha$  (bei festem  $\alpha$ ) enthalten. 5. Die Bedingung, daß (1) oszillatorisch ist und  $N(T, \lambda_1) - N(T, \lambda_2) = O(1)$  ( $T \rightarrow \infty$ ) für jedes Paar  $\lambda_1, \lambda_2$  gilt, ist für den Grenzkreisfall zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend. 6. Jede abgeschlossene Menge auf der  $\lambda$ -Achse kann wesentliches Spektrum  $S'$  einer Differentialgleichung (1) vom Grenzpunkttyp sein. 7. Es ist möglich, daß (1) vom Grenzpunkttyp und  $S_\alpha$  für jedes  $\alpha$  ein reines Punktspektrum ist, das dicht in  $0 \leq \lambda \leq 1$  ist und sonst nur den Häufungspunkt  $\infty$  (oder die Häufungspunkte  $\infty$  und  $-\infty$ ) hat. *F. W. Schäfke.*

**Borg, Göran:** Uniqueness theorems in the spectral theory of  $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ . 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 276—287 (1952).

Durch die Differentialgleichung (L)  $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $q(x)$  stetig und die Randbedingung (R):  $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$ ,  $y \in L^2(0, \infty)$  wird ein singuläres Eigenwertproblem gegeben. Bei  $x = \infty$  liege der Grenzkreisfall vor. Betrachtet wird die „inverse“ Problemstellung: Bestimmung von  $q(x)$  aus dem Spektrum oder anderen Spektraldaten des Eigenwertproblems (L) + (R). Eine Größe, die sich zur Bestimmung von  $q(x)$  eignet, ist die Weyl-Titchmarshsche Funktion  $m(\lambda)$ , aus der man bekanntlich die Gewichtsfunktion

$k(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\lambda_0}^{\lambda} -\operatorname{Im}(m(u + i\delta)) du$  in der Entwicklung nach „Eigenfunktionen“ bestimmt.

Verf. zeigt:  $q(x)$  ist eindeutig bestimmt, wenn  $m(\lambda)$  oder nur  $k(\lambda)$  bekannt ist. Sind die Spektren von (L) + (R) und (L) + (R\*) [ $\alpha$  ist in (R) durch  $\alpha^* \equiv \alpha \pmod{\pi}$  zu ersetzen] diskret und ohne Häufungspunkte im Endlichen, dann bestimmen ihre Eigenwerte  $q(x)$  eindeutig. Für die Beweise werden Abschätzungen und spezielle Eigenschaften von  $m(\lambda)$  benötigt, die auch von sich aus von Interesse sind. Als Verallgemeinerung wird (L) in  $0 < x < \infty$  betrachtet unter der „Randbedingung“  $y \in I^2(0, \infty)$ , wobei bei  $x = 0$ ,  $x = \infty$  der Grenzkreisfall vorliegt.

*G. Hellwig.*

**Mizohata, Sigeru and Masaya Yamaguti:** On the existence of periodic solutions of the non-linear differential equation  $\ddot{x} + a(x) \cdot \dot{x} + \varphi(x) = p(t)$ . *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A* **27**, 109—113 (1952).

Die Differentialgleichung  $\ddot{x} + a(x) \dot{x} + \varphi(x) = p(t)$  mit stetigen Funktionen  $a(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$ ,  $p(t)$ ,  $\omega$ -periodischem  $p(t)$ ,  $\int_0^\omega p(t) dt = 0$ , besitzt mindestens eine  $\omega$ -periodische Lösung  $x(t)$ , falls  $\int_0^\infty a(x) dx \rightarrow \pm \infty$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $\operatorname{sign} x \cdot \varphi(x) \geq 0$  ( $|x| > q > 0$ ) (vgl. G. E. H. Reuter, dies. Zbl. **42**, 94). Die recht einfache Beweismethode wird auch auf  $\ddot{x} + f(x) + \varphi(x) = p(t)$  mit stetigem  $f, f', \varphi, \varphi', p, \omega$ -

periodischem  $p$  unter den Voraussetzungen  $\text{sign } y \cdot f(y) \rightarrow \infty$  ( $y \rightarrow \pm \infty$ ),  $\varphi(x) \rightarrow \pm \infty$  ( $x \rightarrow \pm \infty$ ) übertragen (vgl. G. E. H. Reuter, folgendes Referat).

F. W. Schäfke.

**Reuter, G. E. H.: Boundedness theorems for non-linear differential equations of the second order. II.** J. London math. Soc. **27**, 48—58 (1952).

1. Die Differentialgleichung  $\ddot{x} + kF(x) + g(x) = kp(t)$  ist vom Typ (B) [d. h.: für jede Lösung  $x(t)$  gilt für  $t > t_0$  ( $t_0$  abhängig von  $x(t)$ )  $|x(t)| < B_1$ ,  $|\dot{x}(t)| < B_2$  ( $B_1, B_2$  unabhängig von  $x(t)$  und  $k$ )], falls  $g(x)$  stetig,  $g(x) \text{ sign } x \rightarrow +\infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $F(y)$  stetig,  $F(y) \cdot \text{sign } y \rightarrow +\infty$  für  $|y| \rightarrow \infty$ ,  $p(t)$  stetig und beschränkt. — 2. Die Differentialgleichung  $\ddot{x} + g(x) = k\varphi(x, \dot{x}, t)$  ist vom Typ (B), falls  $g(x)$  stetig,  $g(x) \text{ sign } x \rightarrow +\infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x, y, t)$  stetig,  $\varphi(x, y, t) \text{ sign } y < A_1 + A_2|y|$  für alle  $x, y, t$ ,  $\varphi(x, y, t) \text{ sign } y < -A_3|y|$  für  $|x| \geq a_1$ ,  $|y| \geq b_1$  und alle  $t$  ( $A_1, A_2, A_3, a_1, b_1$  positive Konstanten unabhängig von  $k$ ). (Teil I s. dies. Zbl. **42**, 94.)

F. W. Schäfke.

**Cartwright, M. L.: Van der Pol's equation for relaxation oscillations.** Contrib. Theory of nonlinear Oscillations, II, Ann. Math. Studies **29**, 3—18 (1952).

Die Differentialgleichung  $\ddot{x} - k(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ , mit großem positivem  $k$  hat, abgesehen von  $x \equiv 0$ , genau eine periodische Lösung  $x = \tilde{x}(t)$  [vgl. B. van der Pol, Phil. Mag., VII. Ser. **2**, 978—992 (1926); Ph. le Corbeiller, J. Inst. Electr. Eng. **79**, 361—378 (1936)]. In Verschärfung der Ergebnisse von le Corbeiller wird gezeigt: Bei  $k \rightarrow \infty$  gilt für die Periode  $2T = 2k(3/2 - \log 2) + 3(\alpha + \beta)k^{-1/3} + o(k^{-1/3})$  und für die maximale Höhe  $h = 2 + \frac{1}{3}(\alpha + \beta)k^{-4/3} + o(k^{-4/3})$ . Die

Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sind die Werte  $\eta_0^*(0), \int_0^\infty \frac{d\xi}{\eta_0^*(\xi)}$  für die Lösung  $\eta_0^*(\xi)$  mit  $\eta_0^*(\xi) \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) von  $\eta_0 d\eta_0/d\xi = 2\xi\eta_0 + 1$  ( $\alpha + \beta = 2,338$ ).

F. W. Schäfke.

**Zwirner, Giuseppe: Sopra il problema di Nicoletti per le equazioni differenziali ordinarie d'ordine  $n$ .** Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII **1**, 1—7 (1952).

Per il problema di valori al contorno (\*)  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ;  $y(x_1) = c_1, \dots, y(x_n) = c_n$  S. Cinquini (questo Zbl. **22**, 339) ha dato due Teoremi di esistenza, il primo dei quali è stato generalizzato da G. Zwirner (questo Zbl. **27**, 314). Nella presente Nota l'A. stabilisce il seguente teorema, il quale fornisce un'estensione sia di entrambi i teoremi di Cinquini, sia di quello di Zwirner: Sia  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  una funzione definita nel campo  $S: a \leq x \leq b, |y^{(i)}| < +\infty, (i = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} = y)$ , la quale è continua rispetto a  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$  e misurabile rispetto a  $x$ , e siano  $c_1, c_2, \dots, c_n$  numeri reali prefissati e  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  valori qualsiasi di  $(a, b)$ . Si supponga che, in corrispondenza a ogni numero  $M > 0$ , si possano determinare un numero  $\delta$  con  $0 < \delta < M$  e  $n+2$  funzioni non negative soddisfacenti alle seguenti ipotesi:  $\gamma_1(u), \dots, \gamma_{n-1}(u)$  siano integrabili in  $(-\infty, +\infty)$ ;  $\varphi(x)$  sia integrabile in  $(a, b)$ ;  $\omega(v) > 0$  e  $\omega_1(v)$  siano continue per  $|v| \geq \delta$  e tali che esista un  $k > 0$  per il quale risulta  $\omega_1(v) \leq k\omega(v)$  per  $|v| \geq \delta$ ; in modo che, chiamato  $C(x)$  il polinomio di grado non superiore a  $n-1$ , per il quale è  $C(x_i) = c_i, (i = 1, \dots, n)$ , in tutto il campo  $T: a \leq x \leq b, |y^{(j)}| \leq \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} (M+2N), \delta \leq |y^{(n-1)}| \leq$

$M+2N$  ( $j = 0, 1, \dots, n-2$ ), ove  $N \frac{(b-a)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \geq \max_{a \leq x \leq b} |C^{(j)}(x)|, (j = 0, 1, \dots, n-1;$

$C^{(0)} = C)$ , abbia luogo la disuguaglianza  $|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \gamma_1(y^{(n-2)}) |y^{(n-1)}| \omega(y^{(n-1)}) + [\gamma_2(y^{(n-3)}) |y^{(n-2)}| + \dots + \gamma_{n-1}(y) |y'| + \varphi(x)] \omega_1(y^{(n-1)})$ , e inoltre per ogni  $M$  sufficiente-

mente grande ciascuno degli integrali  $\int_{\delta+N}^M \frac{dv}{\omega(v)}, \int_{-M}^{-\delta-N} \frac{dv}{\omega(v)}$  sia maggiore della somma

$k \int_a^b \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(u) du + k \sum_{r=2}^{n-1} r \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_r(u) du$ . Inoltre si supponga che, in corrispondenza a ogni campo limitato  $S_L$  costituito di punti di  $S$ , esista una funzione  $\chi(x) \geq 0$  integrabile



in  $(a, b)$  in modo che in  $S_L$  risulti  $|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq \chi(x)$ . — Sotto queste ipotesi il problema (\*) ammette almeno una soluzione  $y(x)$ ,  $(a \leq x \leq b)$ , assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini. *S. Cinquini.*

**Krejn, M. G.:** Über die inversen Probleme für eine inhomogene Saite. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 669—672 (1952) [Russisch].

The author gives without proof new results and improvements on his previous results (this Zbl. 42, 95) on the determination of the mass-distribution on a stretched string by means of its free or its forced oscillations. Necessary and sufficient conditions are given, slightly different from the previous ones, for  $\{\lambda_n\}_0^\infty$  to be the spectrum of a string fixed at both ends, not necessarily symmetrical; there is then a unique symmetrical string with this spectrum, which is also the string of least total mass with the given spectrum. Again, necessary and sufficient conditions are given for  $\{\mu_n\}_0^\infty$  to be the spectrum of a string fixed at one end, the other being free to move transversely; there is then a unique string with least total mass and the given spectrum. Let now the right end of the string be fixed and let  $R(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} t$  be the displacement of the left end at time  $t$  under the pulsating force  $F = \sin \sqrt{\lambda} t$  applied at the same point: again let  $\Phi(t)$  be the displacement of the left end caused by unit force applied at the left end for time  $t$ . The author terms  $R(\lambda)$  and  $\Phi(t)$  the „coefficient of dynamical pliability“ and the „transition function“, and gives formulae for them. As to the inverse problem for  $R(\lambda)$  he states that the mass-distribution is uniquely determined by  $R(\lambda)$ . The corresponding problems for  $\Phi(t)$  are bound up with the concept of a string with a „heavy“ right end, i. e. such that at every point in a certain neighbourhood of this end the line-density is positive. For such a string the mass-distribution is uniquely determined by the values of  $\Phi(t)$  in the interval  $(0, 2T)$ , where  $T = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (n/\sqrt{\mu_n})$

is the time of transit of a wave from the left end to the right. After this the author discusses the conditions which a given  $\Phi(t)$  must satisfy in order that it should be the transition function of some string. *F. V. Atkinson.*

**Ehlers, Georg:** Über schwach singuläre Stellen linearer Differentialgleichungssysteme. Arch. der Math. 3, 266—275 (1952).

Der klassische Satz von Sauvage, für den erst kürzlich H. Kneser (dies. Zbl. 43, 308) einen neuen Beweis gab, besagt, in quadratischen Matrizen geschrieben,

daß die Differentialgleichung  $zY' = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} A_{\nu} Y$  die Lösung  $Y = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} z_{\mu} z^B$

besitzt. Verf. führt einen Beweis ausschließlich mit Hilfe quadratischer Matrizen. Im Falle, daß die charakteristische Gleichung von  $A_0$  keine Wurzeln besitzt, zwischen denen ganzzahlige Differenzen ungleich Null bestehen, werden die  $C_{\mu}$  mit einem eleganten Verfahren bestimmt, das von Weitzenböck zur Auflösung der Gleichung  $XB - AX = R$  angegeben wurde (dies. Zbl. 4, 195). Es wird dabei nur mit den Matrizen selbst und nicht mit ihren Elementen operiert, und aus dem Ideenkreis des Elementarteilersatzes wird nur die einfach zu beweisende Hamilton-Cayleysche Gleichung benützt. Der Konvergenzbeweis und die Behandlung des Sonderfalles ganzzahliger Differenzen sind freilich etwas umständlicher. *A. Schmidt.*

**Haacke, Wolfhart:** Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. II. Math. Z. 57, 34—45 (1952).

In the present paper the author deals with differential systems of the form

$$(1) \quad r^2 y_k'' + r_k^2 y_k + \varepsilon \sum_{m=1}^n \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} p_{km\alpha}(x) y_m = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

where  $r > 0$ ,  $r_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , are real numbers,  $\varepsilon$  a small real parameter,  $p_{km\alpha}(x)$  continuous periodic functions of period  $2\pi$  with  $(x) p_{km\alpha}(-x) = p_{km\alpha}(x)$ . The power series  $\sum \varepsilon^{\alpha} p_{km\alpha}(x)$  are supposed to be absolutely and uniformly convergent for all  $x$ , for all  $k, m = 1, 2, \dots, n$ , and for all  $|\varepsilon| < E$  for some  $E > 0$ . Furthermore  $|\varepsilon|$  is supposed to be sufficiently small in order that the solutions of (1) can be developed into power series of  $\varepsilon$  absolutely and uniformly convergent in an interval  $0 \leq x \leq c$  of length larger than the period  $2\pi$  of the functions  $p$ , according to a theorem by O. Perron [Math. Ann. 113, 292—303 (1930)]. As the author had already shown in paper I (this Zbl. 47, 330) the Floquet algebraic equation of degree  $2n$  for the characteristic exponents of (1) can be reduced, under hypothesis (A), to an equation of degree  $n$ . If we consider the  $(\varepsilon, r)$ -plane and we suppose the numbers  $r_k^2$  to be positive and distinct, then the points close to the  $r$ -axis can be divided into zones corresponding to systems (1) having solutions all bounded, or partially unbounded in  $(0 \leq x < +\infty)$ . A de-

tailed discussion of the algebraic equation of degree  $n$  shows that the points of the  $r$  axis are all in the interior of zones of bounded solutions, with exception at most of the points ( $M$ ):  $r = (r_i \pm r_j)/l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , which may be on the boundary of zones of unbounded solutions (thus presenting a well known type of parametric instability). For the points ( $M$ ) the author determines, in some cases, the first coefficients of the development in power series of  $\varepsilon$ , of the characteristic exponents, so as to obtain criteria in order that the same points are on the boundary of zones of unbounded solutions. Also cases of numbers  $r_k$  not all distinct are considered. The explicit expression of the mentioned coefficients in terms of the functions  $p$  is not given. The method used by the author draws heavily on hypothesis ( $\alpha$ ). — The present paper is partially overlapping with a previous paper of the reviewer [L. Cesari, this Zbl. 35, 326] where differential systems of the form

$$(2) \quad r^2 y_k'' + r_k^2 y_k + \varepsilon \sum_{m=1}^n p_{km}(x) y_m = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

were considered, with  $p_{km}(x)$  continuous periodic functions of period  $2\pi$  with absolutely convergent Fourier series and satisfying either one of the following hypotheses: ( $\alpha$ )  $p_{km}(-x) = p_{km}(x)$ , or ( $\beta$ )  $p_{km}(x) = p_{mk}(x)$ . Under either of these hypotheses (and by using a variant of the Poincaré method of casting out secular terms) the reviewer had shown that the points of the  $r$ -axis are all in the interior of zones of bounded solutions with exception at most of the points ( $M$ ). Furthermore by examples the reviewer had shown that under the same hypotheses ( $\alpha$ ), or ( $\beta$ ), it may really happen that all these points ( $M$ ) are on the boundary of zones of unbounded solutions (parametric instability), while a further different behavior may appear while neither ( $\alpha$ ) nor ( $\beta$ ) is satisfied. Thus in the present paper systems (1) are considered which are more general than systems (2) and no restriction is made on the convergence of the Fourier series of the functions  $p$  while, on the other hand, neither case ( $\beta$ ) nor other cases are considered. E. Mettler (this Zbl. 35, 117) had studied systems (2) under the very particular hypothesis  $p_{km}(x) = a_{km} \cos 2x$ ,  $a_{km}$  constants, with the aim to determine practical appraisals of the form, near the points  $M$ , of the lines of separation between zones. L. Cesari.

**Tichonov, A. N.:** Systeme von Differentialgleichungen, die kleine Parameter bei den Ableitungen enthalten. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 575—586 (1952) [Russisch].

The author first investigates the system  $dx/dt = f(x, z^{(1)}, t)$ ,  $\mu_1 dz^{(1)}/dt = F^{(1)}(x, z^{(1)}, t)$ , as  $\mu_1 \rightarrow 0$ , where  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , in conjunction with the „degenerate system“  $dx/dt = f(x, z^{(1)}, t)$ ,  $0 = F^{(1)}(x, z^{(1)}, t)$ , and the „associated system“  $dz^{(1)}/dt = F^{(1)}(x, z^{(1)}, t)$ , wherein  $x$  and  $t$  are parameters. Conditions are found for the solutions of the original system to tend as  $\mu_1 \rightarrow 0$  to the solutions of the degenerate system with the same initial  $x$ -value. Differentiability restrictions are not explicitly stated. The investigation is then extended to the system  $dx/dt = f(x, z^{(1)}, \dots, z^{(m)}, t)$ ,  $\mu_j dz^{(j)}/dt = F^{(j)}(x, z^{(1)}, \dots, z^{(m)}, t)$ , ( $j = 1, \dots, m$ ), where  $\mu_{j+1}/\mu_j \rightarrow 0$ . The paper differs from the same author's previous paper [Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 147—156 (1950)] in that (e.g. for  $m = 1$ ) the stability of the root  $z^{(1)} = \varphi(x, t)$  of the degenerate equation  $F^{(1)}(x, z^{(1)}, t) = 0$  is defined in terms of a stability property of the associated system and not by an explicit sign criterion; furthermore the case  $m > 1$  is treated in greater detail than before. The definition of the „region of influence“ of a stable root is still in terms of the behaviour of the associated system. The author's present approach resembles that of I. S. Gradshteyn (this Zbl. 44, 92; 46, 95). F. V. Atkinson.

**Vasil'eva, A. B.:** Über Differentialgleichungen, die kleine Parameter enthalten. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 587—644 (1952) [Russisch].

The author finds for the system with several small parameters  $\mu_j$  (see preceding review) limiting values as  $\mu_j \rightarrow 0$  for the derivatives of solutions with respect to  $\mu_j$  and  $t$ , in extension of her previous work for the case of one small parameter (this Zbl. 42, 95). She now uses the associated system to define the „region of influence“ of a stable root, but still not (cf. preceding review) for the definition of a stable root itself. The differentiability restrictions are slightly more restrictive than previously. There are three chapters, the first on the case when all the  $\mu_j$  are equal, the other two on the general case. The investigation is of a complicated character, and the theorems involve numerous hypotheses, which the author does not recapitulate when enunciating her theorems. There is a fairly full historical survey and bibliography. F. V. Atkinson.

**Colombo, Giuseppe:** Sopra un fenomeno di isteresi oscillatoria. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 370—382 (1952).



L'A. considera un sistema formato da una equazione differenziale del tipo di Van der Pol accoppiata, con opportuni termini mutui, all'equazione ordinaria delle oscillazioni lineari. Dopo aver indicato una applicazione meccanica di quel sistema, ne determina, con le stesse ipotesi e con gli stessi metodi di altro lavoro (questo Zbl. 47, 331), due soluzioni periodiche di cui discute l'esistenza e la stabilità al variare di un opportuno parametro. Può così interpretare, per via diversa e forse matematicamente più rigorosa di quella seguita da Van der Pol, alcuni fenomeni d'isteresi che si presentano negli oscillatori a triodi. *D. Graffi.*

**Malkin, I. G.:** Über ein Problem der Stabilitätstheorie von automatischen Reglersystemen. Priklad. Mat. Mech. 16, 365—368 (1952) [Russisch].

L'A. donne la solution du problème d'Ajzerman (cf. par ex. Erugin, ce Zbl. 39, 95, 96) posé relativement au système:  $dx/dt = a x + f(y)$ ;  $dy/dt = b x + c y$  où  $a, b, c$ , sont des constantes et  $f(y)$  une fonction assez régulière pour assurer l'unicité des solutions du système dans le voisinage de l'origine. *J. Kravtchenko.*

**Sobolev, S. L.:** Über eine Differenzengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 341—343 (1952) [Russisch].

Vgl. dies. Zbl. 47, 333. Für die im zitierten Referat angeführte Laplacesche Differenzengleichung mit der rechten Seite 1 für  $m^2 + n^2 = 0$  bzw. 0 für  $m^2 + n^2 > 0$  teilt Verf. die Lösung

$$w_{m,n} = \oint_{|u|=1} \oint_{|v|=1} \frac{u^m v^n - 1}{u^2 v^2 + u^2 + v^2 + 1 - 4uv} dv du$$

mit und zeigt, daß sie im Unendlichen wie  $\log \sqrt{m^2 + n^2}$  wächst, so daß aus den Ergebnissen der zitierten Note die Eindeutigkeit folgt. (Vgl. auch die im zitierten Referat genannte Arbeit von Stöhr). *W. Hahn.*

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

**Lepage, Th.:** Sur une classe d'équations du second ordre, non linéaires et à coefficients constants. Bull. Soc. math. Belgique 1951, 3—14 (1952).

Les équations considérées par l'A. sont du type  $L(u_{ij}) = 0$ ,  $u_{ij} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ ,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  où  $L$  désigne un polynôme en les  $u_{ij}$  susceptible de s'exprimer sous forme linéaire à coefficients réels constants en les mineurs de tout ordre de la matrice symétrique  $U = (u_{ij})$ . A toute équation de ce type correspond une classe  $\{A_n\}$  de formes différentielles extérieures  $A_n(dx_i, du_i)$  à coefficients réels ou complexes de degré  $n$  telles que  $A_n(dx_i, u_{ij} dx_j) = L(u_{ij}) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ; deux formes de cette classe sont congrues modulo  $I = dx_1 \wedge du_1 + \dots + dx_n \wedge du_n$  et il existe dans  $\{A_n\}$  une et une seule forme  $\varrho_n$  telle que  $\varrho_n \wedge I = 0$ . Si l'on pose  $u_i = \partial u / \partial x_i$ , les solutions de l'équation donnée correspondent aux variétés intégrales à  $n$  dimensions du système différentiel extérieur  $A_n = 0$ ,  $I = 0$  telles que  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \neq 0$ . Réciproquement à toute forme  $A_n$  correspond un système extérieur de ce type et une équation  $L(U) = 0$ ; ceci permet d'étudier les propriétés des polynômes  $L(U)$  vis-à-vis du groupe des transformations linéaires en les  $dx_i, du_i$  qui conservent  $I$  (groupe symplectique). — Tout polynôme  $L(U)$  est irréductible. L'A. étudie particulièrement ceux dont la classe  $\{A_n\}$  renferme au moins une forme simple et qu'il appelle polynômes d'Ampère. Pour un tel polynôme, tout mineur d'ordre  $\geq 3$  de la matrice  $\tilde{U} = (\tilde{u}_{ij})$ ,  $\tilde{u}_{ii} = \partial L / \partial u_{ii}$ ,  $\tilde{u}_{ij} = \frac{1}{2} \partial L / \partial u_{ij}$  ( $i \neq j$ ) appartient à l'idéal engendré par  $L(U)$  dans l'algèbre des polynômes en les  $u_{ij} = u_{ji}$ . La matrice  $\tilde{U}$  est liée au signe de la variation seconde de certaine intégrale multiple du calcul des variations (voir p. ex. P. Gillis, ce Zbl. 47, 336). Aussi l'A. étudie-t-il l'ensemble ouvert des matrices  $U$  telles que la matrice associée  $\tilde{U}$  soit définie (positive ou négative). Pour tout polynôme régulier d'Hermite [c'est-à-dire dont la classe correspondante  $\{A_n\}$  renferme une forme  $A_n = \sum_{i=1}^n (A_{ij} dx_j + B_{ij} du_j)$  dans laquelle  $A$  et  $B$  sont des matrices complexes telles que le polynôme associé soit réel et que la matrice  $AB' - BA'$  soit régulière (ce qui exige  $n = 2g$ )] d'ordre  $n \geq 2$ , cet ensemble se décompose en deux parties connexes et convexes; pour  $g$  pair, l'une des composantes est positive, l'autre négative; pour  $g$  impair  $> 1$ , les deux composantes sont positives. Les démonstrations seront complétées dans un travail ultérieur. *P. Dedecker.*

**Saltykow, M. N.:** Généralisation par S. Lie de la théorie du dernier multiplicateur. Bull. Akad. serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 5, Nr. 1, 1—9 (1952).

Si considera un sistema di equazioni differenziali ordinarie  $dx_k = X_k dt$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $X_k$  funzioni di  $t, x_1, x_2, \dots, x_m$ ); si definisce come moltiplicatore  $\Delta$  di un tale sistema un certo determinante funzionale, e si ricava l'equazione a derivate parziali, a cui esso soddisfa. Queste ricerche sono poi estese ai sistemi di equazioni ai differenziali totali  $dx_k = \sum_{h=1}^n X_k^h dt_h$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

*M. Cinquini-Cibrario.*

**Saltykow, M. N.: Invariants différentiels des groupes fonctionnels d'intégrales.** Bull. Acad. serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. **5**, Nr. 1, 11—28 (1952).

Liegt eine kanonische Transformation der  $2n$  Variablen  $x_i, p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) in  $2n$  neue Variable  $X_i, P_i$  vor, so kann diese bekanntlich durch eine erzeugende Funktion  $\Omega(x, p)$  dargestellt werden, die den Gleichungen (\*)  $[X_i, z - \Omega] = 0$ ,  $[P_i, z - \Omega] = -P_i$  genügt [Druckfehler: Die rechte Seite des zweiten Systems in Gleichung (4), S. 12, muß statt 0 lauten:  $-P_i$ ]. Die Funktion  $\Omega$  läßt sich auch gewinnen, indem man die Gl. (\*) nach den Ableitungen von  $\Omega$  auflöst und das vollständige Differential  $d\Omega$  bildet. Diese Zusammenhänge werden auf den Fall verallgemeinert, daß nur je  $n - \rho$  der neuen Variablen  $X_i = \varphi_i(x, p)$ ,  $P_i = \varphi_i(x, p)$  bekannt sind, dafür aber ein System von  $2\rho$  Funktionen  $f_1 \cdots f_{2\rho}$  gegeben ist, dessen Funktionen mit sämtlichen  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  in Involution liegen. Die Funktion  $\Omega$  bestimmt sich dann aus einem System von totalen Differentialgleichungen. Die Methode wird an einem Beispiel erläutert und auf Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt.

*C. Heinz.*

**Saltykow, M. N.: Note sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre admettant les transformations infinitésimales.** Bull. Acad. serbe Sci., Cl. sci. math. natur., Sci. math. **5**, Nr. 1, 29—35 (1952).

Es werden drei Beispiele von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit  $n$  Unbekannten ( $n = 5, 6, 7$ ), die  $n - 1$  infinitesimale nicht integrable Transformationen zulassen, diskutiert. Im Falle  $n = 5$  wird gezeigt, daß man ein Integral durch Quadratur erhält, mit dessen Hilfe die Gleichung auf eine Gleichung mit 4 Variablen und 4 infinitesimalen Transformationen reduziert werden kann. Im Falle  $n = 6$  bzw.  $n = 7$  folgen 2 bzw. 3 Integrale durch Quadraturen, wodurch auch diese Gleichungen auf den Fall  $n = 4$  zurückgeführt werden.

*C. Heinz.*

**Saltykow, M. N.: Théories analytiques et géométriques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.** Bull. Acad. serbe Sci., Cl. sci. math. natur., Sci. math. **5**, Nr. 1, 127—128 (1952).

Si tratta di una postilla a un lavoro di B. Rachajsky [Bull. Acad. serbe Sci., Cl. sci. math. natur., Sci. math. **5**, 129—139 (1952)] per rilevare il contributo arrecato dall'autore citato alle equazioni in questione.

*S. Cinquini.*

**Saltykow, M. N.: Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue.** Bull. Acad. serbe Sci., Cl. sci. math. natur., Sci. math. **5**, Nr. 1, 101—122 (1952).

L'A. fa presente i diversi procedimenti, sviluppati nei due ultimi secoli, per integrare le equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

*S. Cinquini.*

**Saltykow, M. N.: Ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires de la forme générale.** Bull. Acad. serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. **5**, 141—148 (1952).

Si considera il sistema di equazioni differenziali

$$(*) \quad f_i(x_1; y_1, y'_1, \dots, y_1^{(m_{1i})}; \dots; y_n, y'_n, \dots, y_n^{(m_{ni})}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove l'ordine dell'equazione  $i$ -esima è il massimo dei numeri  $m_{1i}, \dots, m_{ni}$ , mentre l'ordine del sistema è dato dall'ordine dell'unica equazione differenziale in una funzione incognita, a cui il sistema (\*) è equivalente. — L'A. rileva che l'ordine del sistema (\*), le cui equazioni siano irriducibili per differenziazione e compatibili,



è uguale alla somma degli ordini delle derivate di ordine massimo rispetto alle quali le equazioni del sistema sono risolubili. *S. Cinquini.*

**Saltykow, M. N.:** *Domaine d'existence des intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au premier.* Bull. Acad. serbe Sci., Cl. sci. math. natur., Sci. math. **5**, Nr. 1, 149—156 (1952).

Le considerazioni, già sviluppate dall'A. (questo Zbl. **19**, 408) per le equazioni a derivate parziali del primo ordine, vengono estese sia a equazioni a derivate parziali del secondo ordine della forma  $r = H(x, y, z, p, q, s, t)$ , ove  $H$  è funzione olomorfa nelle variabili  $x, y, z, p, q, s, t$ , sia a sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine della forma

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_1} = H_k \left( x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m; \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n}; \dots; \frac{\partial z_m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \right) = 0$$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ), ove ciascuna delle funzioni  $H_k(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m; p_{1,2}, \dots, p_{1,n}; \dots; p_{m,2}, \dots, p_{m,n})$  è olomorfa nelle variabili  $x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m; p_{1,2}, \dots, p_{1,n}; \dots; p_{m,2}, \dots, p_{m,n}$ . *S. Cinquini.*

**Pucci, Carlo:** *Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. I, II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **13**, 18—23, 111—116 (1952).

Détermination explicite (sous forme de série convergente) d'une solution de (1)  $\partial^m u / \partial t^m - a \partial^n u / \partial x^n = f(x, t)$  dans le domaine  $x' < x < x''$ ,  $|t| < l \leq \infty$  satisfaisant aux données de Cauchy  $\partial^i u / \partial t^i(x, 0) = u_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$  [ $a$  est une constante réelle; les  $u_i$  et  $f$  ont des dérivées de tous ordres en  $x$  vérifiant des majorations d'un type connu, qui entraînent l'analyticité si  $m \leq n$ ]; démonstration d'un théorème d'unicité. Outre le cas bien connu des équations du second ordre, divers cas particuliers de (1) ont déjà été étudiés, notamment par M. Picone (ce Zbl. **20**, 360). *J. Deny.*

**Berg, Paul W. and Peter D. Lax:** *Fourth order operators.* Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **11**, 343—358 (1952).

Verff. betrachten Operatoren vierter Ordnung, die Produkte zweier elliptischer Operatoren zweiter Ordnung  $L$  und  $M$  in endlich vielen Variablen sind. Unter  $D$  einen kompakten Bereich des euklidischen Raumes und unter  $B$  seine Berandung verstanden, werden Funktionen gesucht, die in  $D$  der Gleichung  $LMu = f$  ( $f$  gegeben) und auf  $B$  der Bedingung  $u = \partial u / \partial n = 0$  genügen. Falls  $L$  und  $M$  in den Termen zweiter Ordnung übereinstimmen, gilt folgender Alternativsatz: Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Aufgabe ist, daß  $f$  (genügend oft differenzierbar) orthogonal ist zu allen quadratisch integrierbaren Lösungen des homogenen adjungierten Problems. Ferner zeigt sich, daß die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen des homogenen Problems endlich und dieselbe wie die des homogenen adjungierten Problems ist. Die Betrachtungen finden im Hilbert-Raum der über  $D$  quadratisch integrierbaren Funktionen statt. *K. Maruhn.*

**Ward, G. N.:** *On the integration of some vector differential equations. I.* Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 432—440 (1952).

Verf. betrachtet Systeme von Differentialgleichungen der Form  $\nabla \wedge \mathbf{f} = \mathbf{P}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{g} = Q$ ,  $\mathbf{g} = \Psi \cdot \mathbf{f}$ ; hierbei sind  $\mathbf{P}$  bzw.  $Q$  eine gegebene Vektor- bzw. Skalarfunktion,  $\Psi$  ein konstanter symmetrischer Tensor zweiter Ordnung und  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  in einem Bereich  $V$  gesuchte Vektorfunktionen, für die auf dem Rande  $S$   $\mathbf{n} \wedge \mathbf{f}$  und  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$  ( $\mathbf{n}$  Einheitsvektor auf der Außennormalen) vorgeschrieben sind. Auf Grund einer Integralidentität wird im elliptischen Fall mit Hilfe einer Fundamentallösung des homogenen Systems eine Darstellungsformel für die Lösung erhalten. Im hyperbolischen Fall treten wegen der stärkeren Singularität der entsprechenden Fundamentallösung Konvergenzschwierigkeiten auf, die mittels der Hadamard'schen Methode des „endlichen Teiles“ behandelt werden. *K. Maruhn.*

**Volpato, Mario:** Un criterio di confronto per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 127—133 (1952).

In der Arbeit werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß für zwei Lösungen  $z_1(x, y)$  und  $z_2(x, y)$  der Gleichung  $p = f(x, y, z, q)$ , ( $p = \partial z / \partial x$ ,  $q = \partial z / \partial y$ ), die in einer Menge  $A$  der Gestalt  $l \leq x \leq 0$ ,  $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$  erklärt sind, aus  $z_1(0, y) > z_2(0, y)$  die Ungleichung  $z_1(x, y) > z_2(x, y)$  in der ganzen Menge  $A$  folgt. Was die Regelmäßigkeit der Funktion  $f$  betrifft, sind die Bedingungen des Verf. zwar viel allgemeiner, als die vom Ref. aufgestellten (dies. Zbl. 37, 67), aber unter den Voraussetzungen des Verf. muß  $f$  (wenn stetig) von  $q$  unabhängig sein. Es liegt also eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Parametern  $y$  vor, für welche der Satz trivial ist.

*J. Szarski.*

**Schmidt, Adam:** Existenz, Unität und Konstruktion der Lösung für das Anfangswertproblem bei gewissen Systemen quasilinearer partieller Differentialgleichungen. Math. Nachr. 7, 261—287 (1952).

Verf. gibt für die Anfangswertaufgabe des hyperbolischen Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen (in Matrixschreibweise):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathfrak{A} \frac{\partial y}{\partial x} = 0; \quad y = \{y_1(x, t), \dots, y_n(x, t)\}, \quad \mathfrak{A} = (A_{ik}(y, x, t))$$

einen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis. Analog dem bereits vom Ref. gegebenen basiert dieser auf einer Differenzenmethode. An dem Verfahren erscheint bemerkenswert, daß hier die Integration direkt mit Hilfe der Charakteristiken, nicht über ein rechtwinkliges Gitter, erfolgt. Ansonsten erhält Verf. die bekannten Ergebnisse.

*H. Beckert.*

**Olevskij, M. N.:** Über die Riemannsche Funktion für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\varrho_1(x) + \varrho_2(t)] u = 0. \quad \text{Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 337—340 (1952) [Russisch].}$$

Soient  $R_1(x, t; x_0, t_0)$  et  $R_2(x, t; x_0, t_0)$  les fonctions de Riemann pour les équations

$$\partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial t^2 + \varrho_1(x) u = 0 \quad \text{et} \quad \partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial t^2 + \varrho_2(t) u = 0$$

respectivement. Alors

$$R(x, t; x_0, t_0) = R_1(x, t; x_0, t_0) + \int_{t=t_0}^{x-x_0} R_1(x, s; x_0, 0) \frac{\partial R_2(s, t; 0, t_0)}{\partial s} ds$$

constitue la fonction de Riemann pour l'équation

$$\partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial t^2 + [\varrho_1(x) + \varrho_2(t)] u = 0.$$

*M. Krzyżański.*

**Zwirner, Giuseppe:** Sull'equazione  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ . Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 9—16 (1952).

Si assegnano due criteri di confronto per gli integrali del sistema differenziale:

$$(1) \quad \begin{cases} z_{x,y} = f(x, y, z, q) \\ z(a, y) = \psi(y), \quad z(x, c) = \varphi(x) \end{cases} \quad \left[ q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \varphi(a) = \psi(c) \right]$$

nel rettangolo  $R \equiv (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$  e da uno di essi si trae il seguente criterio di unicità: „La funzione  $f$  sia definita nell'iperstrato  $T \equiv [(x, y) \in R, -\infty < z, q < +\infty]$  ed ivi non decrescente rispetto a  $z$ ; inoltre: a) esista un numero  $k > 0$  tale che per  $0 < |q_2 - q_1| \leq k$  riesca:  $f(x, y, z, q_2) - f(x, y, z, q_1) \leq \varphi_1(x, q_2 - q_1)$  e, per  $0 < |z_2 - z_1| \leq k$  e  $0 < |q_2 - q_1| \leq k$ , riesca:  $f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq \varphi_1(x, q_2 - q_1) + \psi_1\left(x, \frac{z_2 - z_1}{d - c}\right)$ , con  $\varphi_1(x, u)$  e  $\psi_1(x, u)$  funzioni



continue e limitate per  $a \leq x \leq b, u > 0$ , la seconda non negativa e non decrescente rispetto ad  $u$ ; b) assegnato  $\varepsilon > 0$ , esista un  $h_\varepsilon > 0$  in modo che per ogni punto  $\xi_0$  interno ad  $(a, b)$  l'integrale superiore dell'equazione:

$$u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0}^x [\varphi_1(t, u) + \psi_1(t, u)] dt$$

si mantenga non superiore ad  $\varepsilon$ , per  $x > \xi_0$ . Allora, supposte  $\psi(y)$  e  $\varphi(x)$  continue, il sistema (1) ammette al più una soluzione, continua con le sue derivate parziali prime e con la derivata seconda mista, in  $R$ .“ D. Greco.

**Kasner, Eward and John de Cicco:** The Fourier heat equation in Riemannian space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 822—825 (1952).

Dans un espace de Riemann  $V_n$ , les AA. considèrent un corps indéfini, siège d'un courant de chaleur variable  $X_i(x, t)$  satisfaisant aux hypothèses suivantes: a)  $X_i$  satisfait à l'équation de conductivité  $X_i = -k \partial_i U$ , où  $U(x, t)$  désigne la température et où la conductivité  $k$  est supposée constante dans la presque totalité du papier b)  $X_i$  et  $U$  satisfont à l'équation de continuité de la chaleur (1)  $\text{div}(k \partial_i U) = c \rho \partial U / \partial t$  où  $p$  est la densité du corps et  $c$  sa chaleur spécifique. Pour  $k, c, \rho$  constants, l'équation de Fourier (1) peut se ramener, par changement de l'unité de temps, à (2)  $\Delta U = \partial U / \partial t$ . Les AA. cherchent l'équation transformée de (2) quand la fonction  $U$  est définie implicitement par (3)  $F(x, t, U) = 0$ . Une famille d'hypersurfaces définies par (3), pour  $t$  et  $U$  constants, est dite dégénérée, si elle ne dépend effectivement que d'un paramètre. Une telle famille peut être définie par  $f(x) = \text{const.}$  où  $f$  satisfait à  $\Delta f = a f + b$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes.

A. Lichnerowicz.

**Hildebrand, F. B.:** On the convergence of numerical solutions of the heat-flow equation. J. Math. Physics 31, 35—41 (1952).

Il s'agit de remplacer le problème

$$(1a) \quad u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) \quad (0 < x < 1, \quad t > 0), \quad (1b) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(1c) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < 1)$$

par le problème correspondant, relatif à l'équation aux différences finies, à savoir

$$(2a) \quad r(v_{\mu+1, \nu} - 2v_{\mu, \nu} + v_{\mu-1, \nu}) = v_{\mu, \nu+1} - v_{\mu, \nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, M-1, \quad \nu = 1, 2, \dots),$$

$$(2b) \quad v_{0, \nu} = v_{M, \nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (2c) \quad v_{\mu, 0} = f(\mu/M) \quad (\mu = 1, 2, \dots, M-1)$$

avec  $v_{\mu, \nu} = v(x_\mu, t_\nu) = v(\mu \Delta x, \nu \Delta t)$ , et  $\Delta t = r(\Delta x)^2 = r/M^2$ . Leutert (dies. Zbl. 46, 137) a construit une suite de fonctions satisfaisant à (2a) et (2b), mais ne satisfaisant pas en général à (2c). Cette suite converge vers une solution du problème (1), lorsque  $M \rightarrow \infty$ . L'A. du présent travail suppose que  $f(x)$  est une fonction à variation bornée et qu'elle admet un nombre fini au plus de points des discontinuités. Alors la solution du problème (2) peut être mise sous la forme

$$v_{\mu, \nu}^{(M)} = \sum_{n=1}^{M-1} b_n^{(M)} \left(1 - 4r \sin^2 \frac{n\pi}{2M}\right)^\nu \sin \frac{n\pi\mu}{M},$$

avec

$$b_n^{(M)} = \frac{2}{M} \sum_{k=1}^{M-1} f\left(\frac{k}{M}\right) \sin \frac{n\pi k}{M} \quad (n = 1, 2, \dots, M-1).$$

En particulier

$$v_{\mu, \nu}^{(M)}(x^{(M)}, t^{(M)}) = \sum_{n=1}^{M-1} b_n^{(M)} \left(1 - 4r \sin^2 \frac{n\pi}{2M}\right)^{M^2 t^{(M)}/r} \sin n\pi x^{(M)}.$$

Si  $0 < r < \frac{1}{2}$ , alors pour tout  $x \in (0, 1)$  et  $t > 0$  on a  $\lim_{M \rightarrow \infty} v_{\mu, \nu}^{(M)}(x^{(M)}, t^{(M)}) = u(x, t)$ . Pour  $r = 1/2$  la convergence se démontre sous les conditions plus restrictives concernant  $f(x)$ .

M. Krzyżański.

**Wassermann, G. D.:** Heat conduction in solids as an eigenvalue problem. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 466—471 (1952).

Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung  $\Delta V = \kappa^{-1} \partial V / \partial t$  wird mittels Laplace-Transformation durch die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung  $\Delta u = \lambda^2 u$  ausgedrückt und für diese die Darstellung mit Hilfe der

Eigenfunktionen benutzt. Auf Verallgemeinerungen wird hingewiesen. Die Überlegungen bleiben formal, keine Existenz- oder Konvergenzbetrachtungen.

F. W. Schäfke.

**Tautz, Georg L.: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen. I.** Arch. der Math. 3, 232—238 (1952).

The author develops interesting consequences of a theorem due to N. Aisenstat [Un type d'opérateurs homogènes, Učenyje Zapiski Moskov. gosud. Univ., Matematika 15, 95—112 (1939)]. This theorem states that if a linear operator  $L$  satisfies the conditions: (1) that it transforms functions of  $n$  variables, continuous in the closure of a domain of an  $n$ -dimensional euclidean space, and regular (in the sense of the classical Dirichlet problem) in the same domain, into functions continuous in this domain; (2) that if a regular function has a non negative maximum at a point of the given domain its transform be non positive at the same point, then this operator is of the form:

$$L = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a \cdot u.$$

The conditions satisfied by the coefficients of this differential equations are not given. It is only supposed that  $L$  is of the elliptic type. — The author shows that what may be called a „generalized Green function“ exists in the case of domains  $T$  and of linear operators transforming any function  $f$ , continuous on the boundary of  $T$  (which boundary is supposed to be smooth), into functions regular in  $T$  and having  $f$  as boundary value. He states carefully the conditions under which such Green functions exist. Then he proves the theorem that if such a Green function exists, the linear functional operator is the inverse of the linear operator defined by a differential equation of the second order and of the elliptic type. Since he applies the theorem of Aisenstat without any discussion, no conditions about the coefficients of the differential equation are given. It would be certainly of great interest to conduct a thorough discussion about the assumptions to be made on these coefficients, in the line, for instance, of the detailed investigations of G. Giraud and of J. Schauder.

C. Racine.

**Tautz, Georg L.: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen. II.** Arch. der Math. 3, 239—250 (1952).

In a first note (see preced. review) the author made an interesting application of a theorem due to Aisenstat, proving that the range of what might be called a „Dirichlet operator“ — the operator  $R_{f,T}$  — consisted of the solutions of a generalized Dirichlet problem, in the sense of G. Giraud and J. Schauder. This was easily proved provided the assumption was made that the integral equation

$$(1) \quad v(P) = \int_T G(P, Q) \alpha(Q) dQ$$

had a continuous solution  $\alpha(P)$ ,  $P \in T$ , whenever  $v(P)$  was twice continuously differentiable in  $T$ , continuous in  $\bar{T}$  and vanishing in  $\bar{T} - T$ . It followed immediately that the solution of the integral equation

$$(2) \quad v(P) = u(P) - R_{u,T}(P) = \int_T G(P, Q) \alpha(Q) dQ$$

is essentially non negative, which allowed the author to apply Aisenstat's theorem. — At the beginning of his note, the author was remarking rightly that the assumption made by him was excessively restrictive. He was announcing a second note in which this restriction would be removed. This is done in the present note. Instead of the condition on equation (1) an additional condition is imposed on the Green function of the Dirichlet operator. This condition is of a very general nature and can hardly be considered as a real restriction. — The result is obtained by a long, delicate and extremely interesting reasoning which, in the opinion of the reviewer, makes of this paper an important contribution to the theory of the generalized Dirichlet problem. Instead of considering the integral equation (2) the author introduces the notion of a linear functional

$$\alpha_T [G(P, Q)] = L[G(P, Q); f(Q)] = r(P)$$

which is very close to the notion of distribution due to Laurent Schwartz. Here  $f(Q)$  is a function which is at least twice continuously differentiable in  $T$  and acts as a parameter. — If  $T_n \subset T$  denotes a sphere of radius  $\varepsilon_n$  about  $M \in T$  and if  $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$ ; if  $\Phi_n(Q)$  stands for the Green function  $G(M, Q)$  of  $T_n$ , it is shown that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\int \Phi_n dQ]^{-1} \cdot L(\Phi_n, f) = \sum a_{ik}(M) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a f.$$

Further, if the quadratic form  $\sum a_{ik} X_i X_k$  is positive definite, then  $a(P) \leq 0$ . — The points  $M$  at which this result does not hold form in  $T$  a closed, nowhere dense, set. This is a remarkable result. In his study of the generalized Dirichlet problem, G. Giraud had been led to acknowledge the role played by such exceptional sets of points. He made a thorough study of them in two papers (see this Zbl. 7, 115; 18, 126). That the author should be compelled to introduce the same sets is most certainly very significant.

C. Racine.



**Tautz, G. L.: Bemerkungen zu meiner Arbeit: Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen, I. II.** Arch. der Math. **3**, 361—365 (1952).

In this short note are given: two interesting remarks about two recent papers of the author (see preced. reviews), a refinement of its main result and a conjecture. — The first remark concerns the domains called  $\omega$  in the above mentioned papers. Their boundaries may have irregular points; provided the functions  $R_{f,\omega}$  are bounded in the vicinity of such points, all the proofs remain valid. A second remark is that the use of functionals introduced in the second paper may be avoided. — The refinement is an important one: it is shown that the assumption III made previously by the author can be deduced from his assumptions I, II, IV and V. The proof, being indirect, is long and might perhaps be simplified. — The conjecture is that it should be possible to prove the results based on the assumption  $IV_c^*$  of the second paper by making only the assumption  $IV_c$  of the first. C. Racine.

**Hopf, Eberhard: A remark on linear elliptic differential equations of second order.** Proc. Amer. math. Soc. **3**, 791—793 (1952).

Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$(*) \quad L(u) = \sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

seien stetig in einer offenen einfach zusammenhängenden Menge  $R$  des Euklidischen  $x$ -Raumes.  $x_0$  sei ein solcher Randpunkt von  $R$ , daß  $R$  das Innere der Sphäre  $|x - x^*| < r_0$  mit  $x_0$  auf ihrem Rande enthält. Es wird ein bemerkenswert einfacher Beweis für die folgende Behauptung gegeben: (\*) sei elliptisch in  $R + x_0$  und die Koeffizienten noch stetig in  $x_0$ ,  $u(x)$  sei aus der Klasse  $C^2$  in  $R$ ,  $u \geq 0$ ,  $L(u) \leq 0$ , der Grenzwert von  $u$  für  $x = x_0$  ist Null. Dann ist entweder  $\frac{du}{dn} \Big|_{x=x_0} > 0$

(Ableitung in Richtung der Normalen, verstanden als  $\lim \frac{\Delta u}{\Delta n}$ ) oder  $u = 0$  in  $R$ .

G. Hellwig.

**Olejnuk, O. A.: Über Gleichungen vom elliptischen Typus, die auf der Begrenzung eines Gebietes ausarten.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 885—888 (1952) [Russisch].

Let  $A$  be a plane region bounded by an interval (or a finite number of intervals) on the real axis and a curve  $\Gamma$  in the upper half-plane. M. V. Keldych (this Zbl. **43**, 95) proved that the equation  $u_{xx} + y^m u_{yy} + a u_y + b u_x + c u = 0$  ( $m \geq 1$ ), where the coefficients are real and analytic, has a unique bounded solution taking given values on  $\Gamma$ , provided that one of the following conditions is true: 1.  $m = 1$ ,  $a(x, 0) \geq 1$ , 2.  $1 < m < 2$ ,  $a(x, 0) > 0$ , 3.  $m \geq 2$ ,  $a(x, 0) \geq 0$ . The author considers a boundary condition  $u_\gamma + A u = \varphi$  on  $\Gamma$ , where  $u_\gamma$  denotes the derivative of  $u$  with respect to a continuously varying inner direction  $\gamma$  on  $\Gamma$ . A proof is sketched of the result that if  $c < 0$  or  $A < 0$  then the equation has a bounded solution satisfying the boundary condition and taking given values at those endpoints (if any) of  $\Gamma$ , where the angle between  $\gamma$  and the positive  $y$ -axis is greater than  $\pi/2$ . If any of Keldych's conditions are satisfied, this solution is unique. L. Gårding.

**Brelot, Marcel: Principe et problème de Dirichlet dans les espaces de Green.** C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 598—600 (1952).

In einem Greenschen Raum (vgl. Brelot-Choquet, dies. Zbl. **46**, 327) sei eine stetige Funktion  $f$  mit stetigem Gradient und beschränktem Dirichletintegral gegeben. Für eine passende ausschöpfende Gebietsfolge (z. B. von Niveaulflächen der Greenschen Funktion berandet) wird mit  $f$  das Dirichletsche Problem gelöst. Die Grenzfunktion  $U$  hat fast überall auf den Greenschen Linien dieselben Grenzwerte wie  $f$ , und sie ist unter allen harmonischen Funktionen  $u$  die einzige, welche das Dirichletintegral von  $u - f$  minimisiert. Nur kurze Beweisandzeige.

G. af Hållström.

**Lokki, Olli:** Über harmonische Funktionen mit endlichem Dirichletintegral. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 239—242 (1952).

Gesucht ist diejenige in einem endlich vielfach zusammenhängenden Bereich  $B$  eindeutige und harmonische Funktion  $u(z)$  mit  $u(z_1) = 0$ ,  $u(z_2) = 1$ , welche das Dirichletintegral zu einem Minimum macht. Bei weiterer Einengung der Klasse durch die Forderung, daß ihre Elemente Realteile von eindeutigen analytischen Funktionen seien, findet sich die Lösung bei Ref. (dies. Zbl. 5, 362). Nach derselben Methode wird hier das Resultat gewonnen:  $R(z)$  sei eine Radialschlitzfunktion mit  $R(z_1) = 0$ ,  $R(z_2) = \infty$ ;  $F(z, z_1)$  eine analytische Funktion, deren Realteil die Greensche Funktion mit Singularität  $z_1$  ist; setze  $W(z) = F(z, z_1) - F(z, z_2) + \lg R(z) + C$ , wo die Konstante  $C$  so bestimmt sei, daß  $W(z_1) = 0$ ; ferner:  $V(z) = \Re W(z)$ ; dann ist  $U(z) = V(z)/V(z_1)$  die Lösung. H. Grunsky.

**Bononcini, Vittorio E.:** Sul problema di Dirichlet in domini rettangolari. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950/51), 154—164 (1952).

Let  $f(P)$ ,  $P \in A$ , denote any function defined in the closed interval  $A = [a_i \leq u_i \leq b_i, i = 1, \dots, r]$  of the Euclidean space  $E_r$  and  $F(P)$ ,  $P \in F(A)$ , any function defined in the boundary  $F(A)$  of  $A$ . The (Dirichlet) problem of the existence and properties of the solutions of the boundary problem (D):  $\Delta u - \lambda u = f$  in  $A$ ,  $u = F$  in  $F(A)$ , can be split into the two problems (D<sub>1</sub>):  $\Delta u - \lambda u = f$  in  $A$ ,  $u = 0$  in  $F(A)$ ; (D<sub>2</sub>):  $\Delta u - \lambda u = 0$  in  $A$ ,  $u = F$  in  $F(A)$ . The present paper is the first of a series and deals with problem (D<sub>1</sub>). The particular form of the field  $A$  allows of the use of Fourier series (see e.g. M. Picone, this. Zbl 16, 209). As the reviewer has shown (this Zbl. 17, 212; 19, 262) extensive information can be obtained (on both problems) by the application of Zygmund's theorem on (1, 1)-summability almost everywhere of double Fourier series (A. Zygmund, this Zbl 10, 14) and of other recent results on Fourier series. For instance the reviewer has proved that (I) if  $f$  is bounded and measurable in  $A$ , then  $u(P)$  is continuous with its first partial derivatives in  $A \cap F(A)$ , is zero on  $F(A)$  and has second pure partial derivatives a. e. in  $A$  satisfying  $\Delta u - \lambda u = f$  a. e. in  $A$ . Furthermore (II) if  $f$  is Lipschitzian of order  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , in an open set  $G \subset A$ , then the second pure partial derivatives of  $u(P)$  are continuous in  $G$  and  $\Delta u - \lambda u = f$  is satisfied everywhere in  $G$ . In the present paper the author, using the same methods, proves that, under hypothesis (I),  $u(P)$  has also second mixed partial derivatives a. e. in  $G$  and, under hypothesis (II), that the same derivatives are continuous in  $G$  and also Lipschitzian of any order  $\alpha'$ ,  $0 < \alpha' < \alpha$ , in each closed set  $K \subset G$ . L. Cesari.

**Tsuji, Masatsugu:** Fundamental theorems in potential theory. J. math. Soc. Japan 4, 70—95 (1952).

Exposé avec quelques simplifications de ce qui, dans la théorie moderne du potentiel logarithmique, paraît le plus utile à la théorie des fonctions de variable complexe; principe du maximum, capacité intérieure et potentiel de la distribution d'équilibre des compacts, fonction de Green, problème de Dirichlet, points irréguliers. Ensuite, extension à la sphère de Riemann avec le logarithme de la distance sphérique. Enfin d'après Frostman une fonction holomorphe  $w$  dans  $|z| < 1$  dont  $|w| < 1$  tend vers 1 p. p. à la frontière, prend toute valeur de module  $< 1$  sauf celles d'un ensemble de capacité intérieure nulle; l'A. fait l'extension à  $w$  méromorphe, ne prenant pas les valeurs d'un ensemble fermé  $F$  de capacité  $> 0$ , les limites p. p. sur  $|z| = 1$  appartenant à  $F$ . Signalons que le théorème 20 sur la limite des mesures harmoniques relatives à  $M_n \rightarrow P$  irrégulier, présenté comme nouveau, est contenu dans un résultat précis de Frostman (ce Zbl. 23, 45).

M. Brelot.

**Tsuji, Masatsugu:** On F. Riesz' fundamental theorem on subharmonic functions. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 131—140 (1952).

The author gives a new proof of F. Riesz' theorem according to which if  $u(z)$  is subharmonic in a domain  $D$  of  $R^n$ , then there exists a uniquely determined negative Radon measure  $\mu(e)$  so that in every compact  $K \subset D$ ,  $\mu$  is the sum of the Newtonian (logarithmic if  $n = 2$ ) potential of  $\mu(e)$  and of a harmonic function. The idea of the proof is as follows: For every ball  $A(r, z)$  with center  $z$  and radius  $r$  let  $L(r, z; u)$  be the average of  $u$  on the sphere which bounds  $A(r, z)$ . Then define



$\mu(\Delta(r, z)) = r dL/dr$ . Starting from this set function defined for balls,  $\mu(e)$  is then obtained by a classical Carathéodory argument. An extension for Riemann surfaces is also given.

*J. Horváth.*

**Pachale, Helmut:** Über ein räumliches nichtlineares biharmonisches Randwertproblem. Math. Nachr. 8, 79—91 (1952).

Übertragung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 46, 325) auf analoge räumliche biharmonische Randwertprobleme.

*G. Hellwig.*

**Komatu, Yûsaku:** Eine gemischte Randwertaufgabe für einen Kreis. Proc. Japan Acad. 28, 339—341 (1952).

Soient  $U(\varphi)$  et  $V(\varphi)$  deux fonctions continues dont l'une est définie sur un arc  $l_1$  de la circonférence  $z = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , et l'autre sur l'arc complémentaire  $l_2$ . L'A. donne sans démonstration une formule explicite pour la fonction  $u(z)$  harmonique dans le cercle  $|z| < 1$  tendant vers  $U(\varphi)$  lorsque  $z$  tend vers  $l_1$  et dont la dérivée radiale tend vers  $V(\varphi)$  lorsque  $z$  tend vers  $l_2$ . La démonstration sera publiée ailleurs. La construction de la formule est appuyée sur la considération de la représentation conforme du cercle  $|z| < 1$  sur le cercle  $|w| > 1$  pourvu d'une coupure radiale.

*F. Leja.*

**Nitsche, Johannes und Joachim:** Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung  $\Delta u = e^u$ . Arch. der Math. 3, 460—464 (1952).

Es werden in einem einfach zusammenhängenden ebenen Gebiet  $T$  Lösungen der Gleichung  $\Delta u = e^u$  gesucht, die auf der Berandung  $S$  der Bedingung  $-\partial u/\partial n = f(s)$  genügen ( $n$  Innennormale,  $f$  Hölder-stetig,  $|f|_\lambda$  Hölderkoeffizient). Verff. zeigen, daß unter geeigneten Einschränkungen für  $T$  und für  $|f|_\lambda$  das Randwertproblem genau dann eine einzige Lösung besitzt, wenn  $\int_S f(s) ds > 0$  ist. Die Einzigkeit allein gilt schon ohne die Einschränkungen für  $T$  und  $|f|_\lambda$ .

*K. Maruhn.*

**Pleijel, Åke:** Sur les valeurs et les fonctions propres des membranes vibrantes. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 173—180 (1952).

Es seien  $\lambda_\nu$  und  $\varphi_\nu(x)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) Eigenwerte und Eigenfunktionen der Aufgaben (1)  $\Delta u + \lambda u = 0$  im (zweidimensionalen) Gebiete  $V$  mit (2)  $u = 0$  oder (3)  $\partial u/\partial n = 0$  auf der Berandung  $S$ . Weiter seien  $G(x_1, x_2; -\kappa^2) = K_0(\kappa r)/2\pi - \gamma(x_1, x_2, \kappa)$  ( $K_0$  modifizierte Zylinderfunktion,  $r$  Abstand der Punkte  $x_1$  und  $x_2$  in  $V$ ) die den Aufgaben (1), (2) bzw. (1), (3) entsprechenden Greenschen Funktionen der Gleichung  $\Delta u - \kappa^2 u = 0$  für  $V$  und  $\kappa_0 > 0$  eine Konstante. In Fortführung von Untersuchungen von Carleman (dies. Zbl. 12, 70) gewinnt Verf. asymptotische Formeln für ( $\kappa \rightarrow +\infty$ ) für  $\gamma(x_1, x_2, \kappa)$  ( $x_1, x_2$  in  $V + S$ ) und für

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(x)}{(\lambda_\nu + \kappa_0^2)(\lambda_\nu + \kappa^2)}$  und (für  $t \rightarrow +\infty$ ) für  $\sum_{\lambda_\nu < t} \varphi_\nu^2(x)$  ( $x$  auf  $S$ ), ferner eine

Verschärfung der Carlemanschen Formel für die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^{-z}$ .

*K. Maruhn.*

**Rosenbloom, P. C.:** Mass distributions and their potentials. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 130—138 (1952).

A partir de la relation de réciprocité, l'A. donne une démonstration particulièrement simple de la propriété connue: la distribution de charge  $\varphi$  est déterminée sans ambiguïté par son potentiel  $u$ . Il trouve une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable  $u$  dans un ensemble ouvert  $D$  soit le potentiel d'une distribution de charge telle que  $\varphi(D) < +\infty$ . Il signale le rôle fondamental que peuvent jouer les idées de Nevanlinna (fonction caractéristique et premier théorème fondamental) et indique différentes inégalités dont voici la plus simple:  $D$  étant un domaine contenant seulement des charges non négatives,  $F_1$  et  $F_2$  étant deux sous-ensembles fermés de  $D$ , on pose  $m_1 = \min_{P \in F_1} u(P)$ ,  $m = \inf_{P \in D} u(P)$ ,  $\lambda = \min G(P, Q)$  pour  $P \in F_1$ ,  $Q \in F_2$ ,  $G$  étant la fonction de Green de  $D$ ; alors  $\varphi(F_2) \leq (m_1 - m)/\lambda$ .

*J. Dufresnoy.*

**Rosenbloom, Paul C.:** Quelques classes de problèmes extrémaux. II. Bull. Soc. math. France 80, 183—215 (1952).

Pour la partie I v. Bull. Soc. math. France 79, 1—58 (1951). — L'A. généralise sa théorie en utilisant l'intégration d'Alexandroff par rapport à une charge (fonction d'ensemble additive au sens restreint). Il applique ses résultats à l'étude des fonctions représentables par  $f(x) = \int K(x, s) d\mu(s)$  où  $K$  est un noyau donné et  $\mu$  une charge non négative. Il en déduit des propriétés sur les fonctions absolument monotones, sur l'interpolation des fonctions harmoniques non négatives, sur les coefficients de Fourier d'une fonction positive, sur les solutions non négatives de l'équation de la chaleur, etc. . . . En appendice, l'A. discute quelques compléments au théorème des trois cercles de Hadamard. *J. Dufresnoy.*

**Payne, L. E. and Alexander Weinstein:** Capacity, virtual mass and generalized symmetrization. Pacific J. Math. 2, 633—641 (1952).

Les AA. étudient les corps de révolution à  $n$  dimensions et l'effet d'une opération de symétrisation (généralisant celles de Schwarz et Steiner) sur le volume, la capacité et la masse virtuelle, ce qui étend et simplifie des travaux récents de Polya-Szegö (Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton 1951; ce Zbl. 44, 383) et Garabedian-Spencer (Extremal methods in cavitation flow, Techn. Report n° 3, Applied Math. and Stat. Lab. Stanford Univ. 1951).

*M. Brelot.*

### Variationsrechnung:

**Sigalov, A. G.:** Über die Bedingungen für die Differenzierbarkeit und Analytizität der Lösungen von zweidimensionalen Problemen der Variationsrechnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 273—275 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet die zur Funktionenklasse  $A^2$  (vgl. Verf., dies. Zbl. 44, 281) gehörigen Extremalen des zweidimensionalen regulären Variationsproblems

$$\iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy \rightarrow \text{Extrem.}$$

mit festem Rand, deren Analytizität bei analytischem  $F$  im Falle, daß diese einer Lipschitzbedingung genügen, durch C. Morrey bewiesen wurde. Die bisher bekannten Ungleichungen für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von  $F$ , aus denen der Lipschitzcharakter der Extremalen folgt, hat Verf. verschärft. Dabei darf  $F$  von allen fünf Variablen  $x, y, z, p, q$  abhängen. Die Beweise stützen sich auf die Abschätzungsmethode von M. Shiffman (dies. Zbl. 29, 267) und Resultaten aus früheren Arbeiten des Verf. *H. Beckert.*

**Danskin jr., John M.:** On the existence of minimizing surfaces in parametric double integral problems of the calculus of variations. Rivista Mat. Univ. Parma 3, 43—63 (1952).

The present paper contains a proof of the existence of a surface minimizing the integral  $J(S) = \int_S f(x, X) du dv$  in the class of all parametric Fréchet surfaces of finite Lebesgue area and bounded by a fixed Jordan curve  $g$  in the Euclidean space  $E_3$ . The integral  $J(S)$  is the Weierstrass integral which is defined for all continuous parametric surfaces  $S$  of finite Lebesgue area  $L(S) < +\infty$  and for every continuous positively homogeneous function  $f(x, X)$ ,  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $X = (X^1, X^2, X^3)$ ,  $f(x, kX) = kf(x, X)$  for all  $k > 0$  [L. Cesari, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. 13, 77—117 (1944)]. Such an integral  $J(S)$  is independent of the representation of the surface  $S$ , is given by the ordinary Lebesgue integral whenever the Lebesgue area is equal to the classical area integral, and is lower semicontinuous under the usual hypotheses of regularity (L. Cesari, this Zbl 30, 390). In the present paper  $f$  is supposed to satisfy the further following conditions (1)  $f(x, kX) = |k|f(x, X)$  for all real  $k$ ; (2)  $f$  has continuous first and second partial derivatives; (3)  $0 < m \leq f(x, X) \leq M < +\infty$ , (4)  $f$  is positive regular. The proof of existence is obtained by making use of harmonic and geometric smoothing processes for polyhedral surfaces, by making use of properties of the Dirichlet integral and of a closure theorem for  $P$ -functions (absolutely continuous in the sense of G. T



Evans) [C. B. Morrey, this Zbl. **26**, 394 and Duke Math. J. **9**, 119—124 (1942)] and of the properties of lower semicontinuity of  $J(S)$  quoted above. — An analogous result has been obtained at the same time and independently, and by different methods, by A. G. Sigalov (this Zbl. **44**, 101) and by L. Cesari (this Zbl. **46**, 109). In this last paper the result is obtained under weaker hypotheses since no use is made of the conditions (1) and (2). *L. Cesari.*

**Bononcini, Vittorio E.:** Sugli integrali regolari del calcolo delle variazioni per superficie in forma parametrica. *Rivista Mat. Univ. Parma* **3**, 131—151 (1952).

Let  $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$  be any real continuous function of the six real variables  $x, y, z, u_1, u_2, u_3$  for all  $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$  such that  $F(x, y, z, k u_1, k u_2, k u_3) = k F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$  for all  $k > 0$ . Then the Weierstrass integral  $J(S) = \int_S F du dv$  is defined for all continuous parametric surfaces  $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in Q$ , of finite Lebesgue area  $L(S) < +\infty$ ; i. e., for every continuous mapping from the closed unit square  $Q$  into the  $xyz$ -space  $E_3$  [L. Cesari, *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat.*, II. Ser. **13**, 77—117 (1944)]. Such an integral  $J(S)$  is independent of the representation of the surface  $S$ , is given by the Lebesgue integral whenever the area is equal to the classical area integral and has the further property that  $S_n \rightarrow S, L(S_n) \rightarrow L(S)$  implies  $J(S_n) \rightarrow J(S)$ . — The author gives in the present paper sufficient conditions concerning the function  $F$  in order to assure that always  $S_n \rightarrow S, J(S_n) \rightarrow J(S)$  implies  $L(S_n) \rightarrow L(S)$ . The following conditions are considered: (1) the function  $F$  is continuous with its first and second partial derivatives  $F_{u_i}, F_{u_i u_j}, i, j = 1, 2, 3$ , for all  $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ ; (2) the set of points  $(u_1, u_2, u_3)$  in which the  $3 \times 3$  matrix  $\|F_{u_i u_j}\|$  has characteristic 1 has no interior points; (3)  $J$  is regular (positive, or negative), i. e. the Weierstrass function  $\mathcal{L}$  is of definite sign. Under these hypotheses, if  $A_{ij}$  are the cosets of the matrix  $\|F_{u_i u_j}\|$  we have  $A_{11} u_1^{-2} = A_{12} u_1^{-1} u_2^{-1} = \dots = A_{33} u_3^{-2} = \varphi$ . If the so defined function  $\varphi$  is always positive, then  $S_n \rightarrow S, J(S_n) \rightarrow J(S)$  implies  $L(S_n) \rightarrow L(S)$ , as well as  $J'(S_n) \rightarrow J'(S)$  for every other Weierstrass integral  $J'(S)$ . *L. Cesari.*

**El'sgol'c, L. È.:** Variationsprobleme mit retardiertem Argument. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **7**, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estest. Nauk Nr. 7), 57—62 (1952) [Russisch].

Verf. gibt hinreichende Bedingungen für die Lösungen von Variationsaufgaben der folgenden Art: Es sind die Extremalen des Funktional:

$$V[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_n(t)), \dots, x^{(m)}(t - \tau_1(t)), \dots, x^{(m)}(t - \tau_n(t))) dt$$

unter den Bedingungen  $x(t_0 - \tau_i(t_0)) = x_{i0}, x(t_1 - \tau_i(t_1)) = x_{i1}, i = 1, \dots, n$ , zu bestimmen; hierbei sind  $\tau_i(t)$  stetig differenzierbare Funktionen mit  $\tau_i(t) \geq 0$  und  $\tau_i'(t) < d < 1$ . *W. Thimm.*

**Kahan, T. et G. Rideau:** Sur la déduction de divers principes variationnels de la théorie des collisions à partir d'un principe unique. *J. Phys. Radium* **13**, 326—332 (1952).

Die Verff. benutzen einen symmetrischen linearen Operator  $L$ , welcher die Beziehung  $\int f L g d\tau = \int g L f d\tau$  befriedigt mit beliebigen Funktionen  $f$  und  $g$ . Sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei verschiedene Lösungen der Gleichung  $L\Phi = 0$  und bezeichnen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  die Ausdrücke  $\Phi_1 + \delta\Phi_1, \Phi_2 + \delta\Phi_1$ , so erhält man eine Lösung des Variationsproblems  $\delta I = 0$  in der Form  $I = \int \Psi_2 L \Psi_1 d\tau$ . Sind allgemeiner  $\Phi_i$  Funktionen, welche die Gleichungen  $L\Phi_i = \varphi_i$  erfüllen, so ergibt sich  $L\Phi_i' = 0$ , wenn man  $\Phi_i' = L^{-1}\varphi_i - \Phi_i$  setzt. Damit läßt sich wiederum das Variationsproblem

$$\delta I = 0, I = \int \{\Psi_2 L \Psi_1 - \Psi_2 \varphi_1 - \Psi_1 \varphi_2\} d\tau$$

behandeln. Mit diesen mathematischen Hilfsmitteln behandeln die Verff. anschließend einheitlich Diffusions- und Kollisionsprobleme der Kernphysik, wie sie von Hulthén, Schwinger, Kohn und anderen Autoren untersucht worden sind [vgl. z. B. Hulthén, dies. Zbl. **31**, 401; Kohn, *Phys. Review*, II. Ser. **74**, 1763 (1948)].

*M. Pinl.*

## Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Vilenkin, N. Ja.: Zur Theorie der orthogonalen Kerne. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 63—82 (1952) [Russisch].

Orthogonale Kerne sind das kontinuierliche Analogon der orthogonalen Funktionensysteme, spezieller orthogonaler Kerne. Ihre Definition lautet: Es seien  $\mu(x)$  und  $\nu(y)$  für  $a \leq x \leq b$  bzw.  $A \leq y \leq B$  monoton nicht abnehmende, von links stetige Funktionen. Die Funktion  $\varphi(x; y)$  heiße orthogonaler Kern bezüglich der Räume  $L^2_\mu$  und  $L^2_\nu$  für  $y$ , wenn 1. für eine beliebige Menge  $\Delta$  von endlichem  $\nu$ -Maß die Funktion  $\omega(x; \Delta) = \int_\Delta \varphi(x; y) d\nu(y)$  zu  $L^2_\mu$  gehört und die Funktion  $\int_\Delta |\varphi(x; y)|^2 d\nu(y)$  auf allen Mengen von endlichem  $\mu$ -Maß summierbar ist, 2. für beliebige Mengen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  von endlichem  $\nu$ -Maß gilt:

$$\int_a^b \omega(x; \Delta_1) \omega(x; \Delta_2) d\mu(x) = \nu(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Integralgleichungen mit kontinuierlichem Spektrum führen auf orthogonale Kerne. Mit der Theorie der orthogonalen Kerne ist die von Plancherel stammende Theorie der Darstellung von Funktionen durch bestimmte Integrale eng verbunden. Auf orthogonale Kerne werden Sätze über Orthogonalreihen übertragen, insbesondere Sätze über Konvergenzeigenschaften der Orthogonalreihen, wie sie in dem Buche von Kaczmarz und Steinhaus „Theorie der Orthogonalreihen“, Kapitel V (New York 1951) angegeben sind. Analog zur Orthogonalisierung von Funktionensystemen ist die Orthogonalisierung einer Funktion  $\psi(x; y)$  für gegebene Maße  $\mu$  und  $\nu$  mittels einer Integraltransformation vom Volterraschen Typus. Verf. schildert Ergebnisse von Gelfand und Levitan, welche die Orthogonalisierung der Funktion  $\cos \sqrt{\lambda} x$  für die Maße  $x$  und  $\varrho(\lambda)$  auf die Lösung einer Integralgleichung zurückführen, und zeigt die Verbindung dieses Problems mit einer Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgabe auf.

W. Thimm.

Parodi, Maurice: Applications de la relation qui donne l'original d'un déterminant à la résolution d'un type d'équations intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1002—1003 (1952).

Die Carsonsche Transformierte eines Polynoms  $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{n-\nu}$ , ( $a_0 = 1$ ), läßt sich in Determinantenform

$$(1) \quad \varphi(p) = (-1)^n n! \begin{vmatrix} -\frac{1}{p}, & 1, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{p}, & 1, & 0, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n}{n!}, & \frac{1! a_{n-1}}{n!}, & \frac{2! a_{n-2}}{n!}, & \dots, & \frac{a_1}{n}, & \frac{-1}{p} \end{vmatrix}$$

schreiben. Für das Carsonsche Urbild einer Determinante gilt in diesem Falle nach Humbert die Formel:

$$(2) \quad \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, x) = (-1)^n n! \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x d\lambda_n \int_0^{\lambda_n} d\lambda_{n-1} \dots \int_0^{\lambda_2} \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, x) d\lambda_1$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1, & 1, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & -(\lambda_2 - \lambda_1), & 1, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & -(\lambda_n - \lambda_{n-1}), & 1 \\ \frac{a_n}{n!}, & \frac{1! a_{n-1}}{n!}, & \frac{2! a_{n-2}}{n!}, & \dots, & \frac{a_1}{n}, & -(x - \lambda_n) \end{vmatrix}.$$

Da dies mit  $f(x)$  übereinstimmen muß, folgt

$$(3) \quad f(x) = (-1)^n n! \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x d\lambda_n \int_0^{\lambda_n} d\lambda_{n-1} \dots \int_0^{\lambda_2} \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, x) d\lambda_1.$$

Durch (2) wird also eine Lösung der Integralgleichung (3) geliefert. Bemerkung



des Ref.: Die letzte Zeile der Determinante (1) ist beim Verf. fehlerhaft. Außerdem ist die Anzahl der Differentiationen und Integrationen in der Umkehrungsformel und Schlußformel  $n$  und nicht  $n - 1$  wie beim Verf. *G. L. Tautz.*

**Tanaka, Chuji: Laplace-transforms. XI. The singularities of Laplace-transforms. III.** Duke math. J. **19**, 605—613 (1952).

Teil I, II s. Japanese J. Math. **21**, 37—42, 43—51 (1951). Sei  $(*) F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\alpha(x)$ ,  $\alpha(x)$  von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall. Wenn  $(*)$  für  $\sigma > 0$  ( $s = \sigma + it$ ) einfach konvergiert, so heißt der Punkt  $s_0$  auf  $\sigma = 0$  ein Picardscher Punkt, wenn  $F(s)$  jeden Wert mit Ausnahme von höchstens zweien ( $\infty$  einschließlich) unendlich oft in dem Halbkreis  $|s - s_0| < \varepsilon$ ,  $\sigma > 0$  annimmt. Satz: Wenn  $(*)$  für  $\sigma > 0$  einfach konvergiert, so ist  $s = 0$  ein Picardscher Punkt von  $F(s)$ , wenn (a)  $\lim_{m \rightarrow \infty} |O_m|^{1/m} \geq 1$ , (b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\log m)^{-1} \log^+ \log^+ |O_m| > \frac{1}{2}$  ist ( $\log^+ x = \max \{0, \log x\}$ ), wo  $O_m = \left(\frac{e}{m}\right)^m \int_{m(1-\omega)}^{m(1+\omega)} x^m e^{-x} d\alpha(x)$  ( $0 < \omega < 1$ ). Als Folgerungen ergeben sich Sätze über Dirichletsche Reihen, z. B. eine Verallgemeinerung des Hadamardschen Lückensatzes:  $F(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$  sei für  $\sigma > 0$  einfach konvergent. Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \lambda_n)^{-1} \log^+ \log^+ |a_n| > \frac{1}{2}$ , so ist jeder Punkt auf  $\sigma = 0$  ein Picardscher Punkt für  $F(s)$ . *G. Doetsch.*

**Tanaka, Chuji: Note on Laplace-transforms. XII. On the summability-abscisses of Laplace-transforms.** Kōdai math. Sem. Reports Nr. 3, 77—88 (1952).

Für die Cesàrosche Summierung des Laplace-Integrals werden die Abszissen einfacher, absoluter und gleichmäßiger Summabilität definiert, und es werden Formeln für sie angegeben, die den bekannten Formeln für die Konvergenzabszissen analog sind. Das für die Existenz der Summabilitätsabszisse grundlegende Theorem II (Aus Summabilität in einem Punkt  $s_0$  folgt gleichmäßige Summabilität in jedem Winkelraum  $|\arg(s - s_0)| \leq \vartheta < \pi/2$ ) ist bereits in des Ref. „Handbuch der Laplace-Transformation“, Bd. I, Basel 1950 (dies. Zbl. **40**, 59), S. 314 flg. bewiesen.

*G. Doetsch.*

**Bhatnagar, K. P.: On a new relation in the theory of generalized Laplace integral.** Ganita **3**, 13—18 (1952).

Es wird eine „Sequenz“ von vier Funktionen betrachtet, bei der jede Funktion mit der nächsten durch eine Funktionaltransformation zusammenhängt, und festgestellt, welches der Zusammenhang zwischen der ersten und letzten Funktion ist. Die beteiligten Transformationen sind die Laplace-Transformation und eine Verallgemeinerung derselben, die als Kern eine Whittakersche Funktion hat.

*G. Doetsch.*

**Bose, S. K.: A theorem on Whittaker transform.** Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 51—54 (1952).

Wenn  $\varphi(p) = p \int_0^\infty (2px)^{-1/4} W_{k,m}(2px) f(x) dx$  (Whittaker-Transformierte)

und  $\psi(p, t) = p \int_0^\infty e^{-px} (\frac{1}{2} x/t)^{-1/4} f(\frac{1}{2} x/t) dx$  (Laplace-Transformierte) ist, so gilt

unter gewissen Voraussetzungen:  $\varphi(p) = \frac{1}{2} (2p)^{-1/4} \int_0^\infty t^{-1} \psi(p, t) d\mu(t)$ , wo  $\mu(t)$

eine nicht abnehmende Funktion ist, die durch  $W_{k,m}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\mu(t)$  definiert ist.

*G. Doetsch.*

**Jaiswal, J. P.:** Two properties of Meijer transform. *Ganita* 3, 85—90 (1952).

Es werden „Sequenzen“ von folgendem Typus aufgestellt: Wenn  $f(t)$  und  $\varphi(s)$  durch Laplace-Transformation und  $f(s)$  und  $g(t)$  durch Meijer-Transformation zusammenhängen, so ist  $\varphi(s)$  eine gewisse Integraltransformierte von  $g(t)$ , bzw. wenn  $f(t)$  und  $\varphi(s)$  durch Meijer-Transformation zusammenhängen und  $f(t)$  in der Hankel-Transformation selbstreziprok ist, so ist  $\varphi(s)$  eine gewisse Integraltransformierte von  $f(t)$ . *G. Doetsch.*

**Sunouchi, Gen-ichiro und Tamotsu Tsuchikura:** Absolute regularity for convergent integrals. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 4, 153—156 (1952).

Die Integraltransformation  $\alpha(x) = \int_0^\infty b(x, t) a(t) dt$  bildet genau dann  $L(0, \infty)$

in sich ab, wenn  $\int_0^\infty |b(x, t)| dx \leq M$  für fast alle  $t$  gilt. Literatur: Knopp-Lorentz, dies. Zbl. 41, 184; Sunouchi, dies. Zbl. 41, 391. *K. Zeller.*

**Feller, William:** On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them. *Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.* band M. Riesz, 73—81 (1952).

The author introduces the generalized Riesz potentials

$$I_\delta^\alpha f = (\Gamma(\alpha) \sin \alpha \pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) |y - x|^{\alpha-1} \sin \alpha \left( \frac{\pi}{2} + \frac{y-x}{|y-x|} \delta \right) dy$$

for sufficiently regular  $f$ . Its connection with the Riemann-Liouville integrals  $J_+^\alpha, J_-^\alpha$  is given by

$$I_\delta^\alpha = \frac{\sin \alpha (\delta + \pi/2)}{\sin \alpha \pi} J_+^\alpha + \frac{\sin \alpha (-\delta + \pi/2)}{\sin \alpha \pi} J_-^\alpha,$$

$$I_\delta^\alpha f = I^\alpha f = \left( 2 \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi \alpha}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) |y - x|^{\alpha-1} dy, \quad I_{\pi/2}^\alpha = J_+^\alpha, \quad I_{-\pi/2}^\alpha = J_-^\alpha.$$

From the well-known properties of the latter (M. Riesz, this Zbl. 33, 276), we have  $I_\delta^0 = 1$ ,  $I_\delta^{-2} = -d^2/dx^2$ ,  $I_\delta^{\alpha+\beta} = I_\delta^\alpha I_\delta^\beta$ . According to P. Lévy (Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1937, this Zbl. 16, 170), the stable law is defined by the density function  $K_{\alpha\gamma}$ , whose Fourier transform is given by

$$\Phi(z) = \exp \left\{ -\tau |z|^\alpha \left( 1 + i \gamma \frac{z}{|z|} \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right) \right\}, \quad \tau > 0.$$

The semi-group  $T$  defined by

$$T_t(f)(x) = u(t, x) = t^{-1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K_{\alpha\gamma}(t^{-1/\alpha}(x-y)) dy$$

includes, as special cases, the integral transforms with Gauss kernel and Poisson kernel. The former corresponds to the classical diffusion equation  $\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2$ ,  $u(t, 0) = f(x)$ . The semi-group corresponding to the symmetrical density  $K_{\alpha 0}(x)$  is generated by the infinitesimal operator  $-(-d^2/dx^2)^{\alpha/2}$ . This is an operator-theoretic formulation of S. Bochner's discovery linking the stable distributions to the diffusion equations (this Zbl. 33, 68). Thus it is natural to introduce the functionalequation  $\partial u(t, x) / \partial t = -I_\delta^\alpha u(t, x)$ . It is proved that, when  $0 < \alpha < 1$ , its formal solution  $u(t, x^n)^n = \Sigma (-t) I_\delta^\alpha f / n!$  can be written as an integral transform of  $f$  with the kernel  $U_{\alpha\delta}(x-y)$  where

$$(1) \quad U_{\alpha\delta}(x) = \frac{-1}{\pi |x|} \sum \left( \frac{-t}{|x|^\alpha} \right)^n \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \sin n\alpha \left( \frac{\pi}{2} + \frac{x}{|x|} \delta \right).$$

It is shown that, when  $0 < \alpha < 1$  and  $\alpha \delta < \pi/2$ ,  $U_{\alpha\delta}(x)$  exhausts stable density functions. By means of the formula

$$U_{\alpha\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty \exp(-i r |x| - t r^\alpha \exp(-i \alpha \delta x/|x|)) dr,$$

which is obtained by Cauchy's integral formula from (1), the analytic continuation of (1) is possible and thus all stable densities with  $1 < \alpha \leq 2$  are given by

$$(2) \quad U_{\alpha\delta}(x) = \frac{-1}{\pi |x|} \Im \sum \frac{(-i |x| \exp(i \delta x/|x|))^{n+1}}{(n+1)!} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} + 1\right).$$



In the case  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 0$  both series representations (1) and (2) break down but lead nevertheless to the Poisson kernel. This result is deduced by the formula

$$I^{-1} = I^{-2} I^1 = -(d^2/dx^2) I^1 = -(d/dx) \text{ (Hilbert transform)}$$

and the theory of conjugate harmonic functions. Thus the formal solution  $\Sigma(-t)^n I^{-n} f/n!$  of  $\partial\Phi/\partial t = -I^{-1}\Phi$  leads to the harmonic functions in the upper half plane, in accordance with the result which Bochner (loc. cit.) has obtained by different methods. *K. Yosida.*

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Kneser, Hellmuth:** Konvexe Räume. Arch. der Math. 3, 198—206 (1952).

Ein Halbmodul  $P$ , der zugleich eine multiplikative Gruppe mit Einheit 1 ist, wird Positivbereich genannt, wenn 1. Addition und Multiplikation distributiv verbunden sind und 2. für  $\alpha, \beta \in P$  von den 2 Gleichungen  $\alpha + \xi = \beta$ ,  $\beta + \xi = \alpha$  keine bzw. mindestens (und mithin genau) eine lösbar ist, je nachdem  $\alpha$  und  $\beta$  gleich oder verschieden sind. Es wird gezeigt, daß jedes  $P$  sich zu einem (zugehörigen) geordneten Schiefkörper  $S$  derart erweitern läßt, daß  $P$  genau aus den „positiven“ Elementen von  $S$  besteht. Mit „konvexer Raum“ wird eine Menge  $K$  von „Punkten“  $x, y, \dots$  bezeichnet, die mit „Massen“  $\alpha, \beta, \dots \in P$  belegt sind. Zu jedem Paar  $x, \alpha; y, \beta$  von Massenpunkten mit  $\alpha + \beta = 1$  wird ein „Schwerpunkt“  $\langle x, \alpha; y, \beta \rangle$  derart zugeordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind (in  $K_1, K_2, K_4$  wird  $\alpha + \beta = 1$  angenommen)

$$K_1: \langle x, \alpha; x, \beta \rangle = x, \quad K_2: \langle x, \alpha; y, \beta \rangle = \langle y, \beta; x, \alpha \rangle.$$

$$K_3: \langle \langle x, \alpha (\alpha + \beta)^{-1}; y, \beta (\alpha + \beta)^{-1} \rangle, (\alpha + \beta) (\alpha + \beta + \gamma)^{-1}; z, \gamma (\alpha + \beta + \gamma)^{-1} \rangle = \langle x, \alpha (\alpha + \beta + \gamma)^{-1}; \langle y, \beta (\beta + \gamma)^{-1}; z, \gamma (\beta + \gamma)^{-1} \rangle, (\beta + \gamma) (\alpha + \beta + \gamma)^{-1} \rangle.$$

$$K_4: \text{Aus } \langle x, \alpha; y, \beta \rangle = \langle x, \alpha; z, \beta \rangle \text{ folgt } y = z.$$

Hierbei ist  $K_3$  das Äquivalent des Satzes der Mechanik, daß der Schwerpunkt mehrerer Massenpunkte durch sukzessive Schwerpunktsbildung und Massenvereinigung ermittelt werden kann, unabhängig von der Reihenfolge der Massenpunkte. Die Gesamtheit der zu  $n$  festen Punkten bei variabler Massenbelegung gehörigen Schwerpunkte ist deren konvexe Hülle. Es wird bewiesen, daß jeder konvexe Raum über  $P$  sich eineindeutig, massenbelegungs- und schwerpunkt-treu auf eine Untermenge eines geeigneten Vektorraumes über  $S$  (= zu  $P$  gehöriger Schiefkörper) abbilden läßt. Eine Anwendung dieser Sätze auf die Spieltheorie wird in Aussicht gestellt. *F. W. Levi.*

**Berg, William D. et Otton Martin Nikodým:** Sur les ensembles convexes dans les espaces linéaires réels abstraits où aucune topologie n'est admise. I. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1005—1007 (1952).

A list of notations and elementary well-known properties of convex sets and their faces [see e. g. E. Artin, Piccayune Sentinel, Bloomington (Indiana) 1950]; the authors state the following theorem: if  $E$  is an infinite-dimensional convex set having at least an interior point, there exists a hyperplane  $H$  such that all hyperplanes parallel to  $H$  have a non empty intersection with  $E$ . *J. Dieudonné.*

**Berg, William D. et Otton Martin Nikodým:** Sur les ensembles convexes dans l'espace linéaire où aucune topologie n'est admise. Corps convexes. II. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1096—1097 (1952).

The authors first prove the theorem stated in the first Note (see preceding review). They say that a convex set is linearly closed (resp. linearly bounded) if its intersection with every line is closed (resp. bounded). They give examples showing that if  $E, F$  are convex linearly closed and linearly bounded sets, their convex hull may fail to be linearly closed, or linearly bounded. *J. Dieudonné.*

**Dieudonné, Jean:** Sur un théorème de Šmulian. Arch. der Math. 3, 436—440 (1952).

Der von V. Šmulian (dies. Zbl. 22, 235) für normierte Räume  $E$  bewiesene Satz, daß eine konvexe abgeschlossene Teilmenge  $K$  von  $E$  dann und nur dann schwach kompakt ist, wenn jede abnehmende Folge konvexer abgeschlossener Teilmengen von  $K$  einen nichtleeren Durchschnitt hat, wird auf beliebige quasivollständige (d. h. jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge ist vollständig) lokalkonvexe Räume ausgedehnt. Ein Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung der Quasivollständigkeit nicht entbehrt werden kann. *G. Köthe.*

**Green, John W.:** On families of sets closed with respect to products, translations and point reflections. Anais Acad. Brasil. Ci. 24, 241—244 (1952).

Let  $S$  be a real normed vector space of dimension  $n$  and call  $F$  a collection of sets such that the intersection of any two elements of  $F$  belongs to  $F$  and that every translate and point reflection of a set in  $F$  is in  $F$ . Among others the following properties concerning the family  $F$  are established. (1) If  $E \subset S$  a necessary and sufficient condition in order that  $E$  and its translates and point reflections together with the null set be a family  $F$  is that  $E$  be a translate of a subgroup of  $S$ ; (2) Every non-null family  $F$  contains a group; (3) Given a translation invariant measure in  $S$ , if the family  $F$  is not reduced to the set  $S$ , then it contains a member of interior measure zero.

*M. M. Peixoto.*

**Hausner, M. and J. G. Wendel:** Ordered vector spaces. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 977—982 (1952).

Ein Vektorraum  $V$  (lat. Buchstaben) über dem Körper der reellen Zahlen (griechische Buchstaben) wird als geordnet bezeichnet, wenn in ihm eine den folgenden Bedingungen genügende Ordnungsrelation  $>$  gegeben ist: Aus  $x > 0$ ,  $\lambda > 0$  folgt  $\lambda x > 0$ ; aus  $x, y > 0$  folgt  $x + y > 0$ ;  $x > y$  genau dann, wenn  $x - y > 0$ . In der Menge  $V^+$  der Vektoren  $> 0$  soll  $x \ll y$  bedeuten:  $\lambda x < y$  für alle  $\lambda$ . Die Menge  $T$  der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „weder  $x \ll y$  noch  $y \ll x$ “ wird durch die Relation  $>$  geordnet, welche dadurch erklärt ist, daß für die Klassen  $[x]$ ,  $[y]$  der Vektoren  $x, y \in V^+$  genau dann  $[x] > [y]$  gilt, wenn  $x \ll y$  ist. Die Menge derjenigen auf  $T$  erklärten reellwertigen Funktionen, deren Nichtnullstellenmengen als Teilmengen von  $T$  wohlgeordnet sind, wird mit den üblichen Verknüpfungen zu einem geordneten Vektorraum  $V_T$  (lexikographischer Funktionenraum), wenn in ihm  $f > 0$  bedeutet, daß  $f(t) > 0$  für das erste Element  $t \in T$  mit  $f(t) \neq 0$  gilt. Wird dann aus jeder Äquivalenzklasse  $t \in T$  ein Vektor  $e_t$  ausgewählt, so gibt es einen Isomorphismus von  $V$  in  $V_T$ , der  $e_t$  in die charakteristische Funktion  $f_t$  von  $t$  [d. h.  $f_t(t) = 1, f_t(t') = 0$  für  $t' \neq t$ ] überführt und in seiner Bildmenge mit jeder Funktion  $f$  bei beliebigem  $t_0$  auch die durch  $g(t) = f(t)$  für  $t < t_0$  und  $g(t) = 0$  für  $t \geq t_0$  erklärte Funktion enthält.

*G. Pickert.*

**Allen, H. S.:** Duality of the spaces of linear functionals on dual vector spaces. Bull. Soc. math. France **80**, 233—235 (1952).

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $(x, y)$  une forme bilinéaire séparante sur  $E \times F$ , c'est-à-dire telle que  $(x, y) = 0$  pour tout  $y \in F$  (resp. tout  $x \in E$ ) entraîne  $x = 0$  (resp.  $y = 0$ ); il y a alors des isomorphismes  $\varphi$  de  $E$  dans le dual  $F^*$  de  $F$ ,  $\psi$  de  $F$  dans le dual  $E^*$  de  $E$ , telle que  $(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \psi(y) \rangle$ . L'A. se propose de définir sur  $F^* \times E^*$  une forme bilinéaire séparante  $(y', x')$  telle que pour  $y' = \varphi(x)$  et  $x' = \psi(y)$ , on ait  $(y', x') = (x, y)$ ; si  $M$  (resp.  $N$ ) est un supplémentaire de  $\varphi(E)$  dans  $F^*$  [resp. de  $\psi(F)$  dans  $E^*$ ], il suffit de prendre  $(y', x')$  telle que  $(\varphi(x), x') = \langle x, x' \rangle$ ,  $\langle y', \psi(y) \rangle = \langle y', y \rangle$  et  $(y', x')$  arbitraire sur  $M \times N$ . La méthode utilisée par l'A. est artificielle et ne s'applique que lorsque le corps de base est de caractéristique  $\neq 2$ . On démontre un résultat analogue lorsque  $E = F$  et que  $(x, y)$  est hermitienne ou alternée.

*J. Dieudonné.*

**Weston, J. D.:** On the bounds of a bilinear form related to Hilbert's. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 115—118 (1952).

Einfache Beweise für folgende Sätze: I. Ist  $\lambda$  reell und nicht ganz,  $\sum_1^\infty |x_n|^2 = \sum_1^\infty |y_n|^2 = 1$ , so ist  $\pi |\operatorname{cosec} \pi \lambda|$  die obere Grenze von  $\left| \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{x_m y_n}{m - n + \lambda} \right|$ ; sie wird nicht angenommen, wenn alle  $x_n$  und  $y_n$  nicht-negativ sind; in diesem Falle ist  $\pi \operatorname{cosec} \pi \lambda$ , falls positiv, die obere Grenze, falls negativ, die untere Grenze der Bilinearform. II. Ist  $\lambda$  reell und nicht ganz,  $x_n$  reell,  $\sum_1^\infty x_n^2 = 1$ , dann sind obere

und untere Grenze der quadratischen Form  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_m x_n}{m-n+\lambda}$  die Zahlen  $\pi \operatorname{cosec} \pi \lambda$  und  $\pi \cot \pi \lambda$  für  $|\lambda| < 1$  und  $\pm \pi |\operatorname{cosec} \pi \lambda|$  für  $|\lambda| > 1$ ; sind alle  $x_n$  positiv, so ist  $\pi \cot \pi \lambda$  obere Grenze für  $-1 < \lambda < 0$  und untere Grenze für  $0 < \lambda < 1$ . Diese Grenzen werden nicht angenommen. F. W. Schäfke.

**Gomes, Ruy Luís:** Zwei Ungleichungen. *Gaz. Mat., Lisboa* 13, 7–8 (1952) [Portugiesisch].

Verf. gibt Beweise zu dem folgenden Satz [N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, 1<sup>ère</sup> Pte., Livre VI: Intégration, Chap. I–IV. Actual. sci. industr. No. 1175, Paris 1952; Exercices p. 220–221]: Es seien  $a, b$  Elemente eines Banachschen Raumes, ferner  $0 \leq t \leq 1$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , dann ist

$$|a - t b|^p \leq 2^p |a - t^p b|, \quad |a - t^p b| \leq 2^p |a - t b|.$$

G. Aumann.

**Nevanlinna, Rolf:** Erweiterung der Theorie des Hilbertschen Raumes. *Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz*, 160–168 (1952).

An account of recently published results of the author (this *Zbl.* 46, 122–123).

W. W. Rogosinski.

**Inzinger, Rudolf:** Eine geometrische Realisierung des Hilbertschen Raumes in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene. *Rend. Mat. e Appl., V. Ser.* 10, 140–155 (1951).

Verf. legt seinen Betrachtungen eine eindeutige Abbildung  $\Sigma$  der Vektoren  $\mathfrak{A}$  des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$  auf die ebenen stützbaren Bereiche  $A$  der Bereichsmenge  $H$  zugrunde;  $H$  umfaßt die Bereiche der Ebene  $\Pi$ , deren Ränder, als Speermannigfaltigkeiten aufgefaßt, durch die Relation  $a = a(\varphi)$  in den polaren Speerkoordinaten  $a$  und  $\varphi$  festgelegt sind, wo  $a(\varphi)$   $2\pi$ -periodische, im Lebesgueschen Sinn quadratisch integrierbare Funktionen (Stütz-

funktionen), die durch ihre Fourier-Reihen  $a(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\nu\varphi}$ ,  $\alpha_\nu = a'_\nu - i a''_\nu$ ,  $\alpha_{-\nu} = \alpha_\nu$  bis

auf äquivalente durch Cesàrosche Summen erster Ordnung eindeutig festgelegt sind. — Die Geometrie der stützbaren Bereiche in  $\Pi$  (vgl. über diesen Gegenstand auch die früheren Arbeiten des Verf., dies. *Zbl.* 37, 250) läßt sich als Bild der Geometrie in  $\mathfrak{H}$  entwickeln. Insbesondere werden die metrischen Elemente in  $\mathfrak{H}$ , nämlich das innere Produkt  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =$

$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(\varphi) \bar{b}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \bar{\alpha}_{-\nu}$ , das Betragsquadrat  $|\mathfrak{A}|^2 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  und die Distanz

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} = |\mathfrak{B} - \mathfrak{A}|$  vermöge  $\Sigma$  auf  $H$  übertragen; analog auch der auf dieser Metrik beruhende Konvergenzbegriff. So ist ein Bereich  $A$  die konvergente Summe der Reihe, gebildet aus den Komponentenbereichen  $A_\nu$ ;  $A_0$  ist durch  $a_0(\varphi) = \frac{1}{2} \alpha_0 \{\text{Kreis}\}$ ,  $A_1$  durch  $a_1(\varphi) = \frac{1}{2} (\alpha_1 e^{i\varphi} + \alpha_{-1} e^{-i\varphi})$  {Bereichsmitte — entspricht bei konvexen Bereichen dem Steinerschen Krümmungsschwerpunkt} und  $A_\nu$  durch  $a_\nu(\varphi) = \frac{1}{2} (\alpha_\nu e^{i\nu\varphi} + \alpha_{-\nu} e^{-i\nu\varphi})$  [ $\nu \geq 2$ ] {hypozykloidsche Komponenten} definiert. Die  $n$ -ten Teilsummen der Reihe sind die Polynombereiche  $A^{(n)}$ . — Die Bedeutung der Korrespondenz  $\mathfrak{H} \leftrightarrow H$  wird durch den beachtenswerten Umstand hervorgehoben, daß sie durch einen geometrischen Projektionsvorgang realisierbar ist und sich dadurch über das Formale erhebt. Identifiziert man nämlich  $\Pi$  mit der ersten durch  $a'$  und  $a'_1$  ( $\alpha_1 = a'_1 - i a''_1$ ) aufgespannten Koordinatenebene, so ergibt sich, daß  $A$  durch Schnitt von  $\Pi$  mit einem festen Projektionskegel von  $\mathfrak{H}$  erzeugt werden kann, der in  $\mathfrak{H}$  so verschoben ist, daß seine Spitze mit dem Endpunkt des Vektors  $\mathfrak{A}$  zusammenfällt. — Projiziert man den wirkenden Projektionskegel auf den  $(2n+1)$ -dimensionalen Koordinatenraum, der durch  $a_0, a'_1, a'_1, \dots, a'_n, a''_n$  aufgespannt wird, so entsteht dort wieder ein Kegel, der aus  $\Pi$  den  $n$ -ten Polynombereich  $A^{(n)}$  ausschneidet. Für  $n=1$  resultiert die Kegelprojektion des 3-dimensionalen Raumes auf die Ebene  $\Pi$ , welche jedem Raumpunkt  $a_0, a'_1, a''_1$  den durch  $a^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + a'_1 \cos \varphi + a''_1 \sin \varphi$  charakterisierten Kreis zuordnet (zyklographische Abbildung). Dieser Spezialfall läßt erkennen, daß sich die vom Verf. entwickelte Korrespondenz in ihrer Realisierung als Projektion als weitgehende Verallgemeinerung der entsprechenden bekannten Deutung der Laguerreschen Kreisgeometrie als Bild der Raumgeometrie auffassen läßt.

H. Hadwiger.

**Inzinger, Rudolf:** Faltungsgeometrie im Hilbertschen Raume und in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene. *Monatsh. Math.* 56, 105–125 (1952).

Ausführlichere Darstellung und Weiterführung der in der vorstehend referierten Note skizzierten Theorie. Insbesondere wird für die Faltungsrelation  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \mathfrak{A}$  im Hilbertschen



Raum  $\mathfrak{H}$  und für die entsprechende Beziehung  $B = TA$  in der Menge  $H$  der stützbaren Bereiche, welche durch die Abbildung  $\Sigma$  aus den Elementen von  $\mathfrak{H}$  hervorgeht, eine geometrische Interpretation gegeben. Innerhalb der Klasse der betrachteten Stützfunktionen

ist die Faltung durch die Integralverknüpfung  $b(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\varphi - \lambda) a(\lambda) d\lambda$  erklärbar; ihr

entspricht für die komplexen Koordinaten der Fourier-Reihen die Beziehung  $\beta_\nu = \tau_\nu \alpha_\nu$  ( $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Durch Faltung aller Vektoren von  $\mathfrak{H}$  mit einem festen Vektor  $\mathfrak{T}$  ergibt sich eine beschränkte lineare Transformation, welche  $\mathfrak{H}$  auf den Unterraum  $\{\mathfrak{T}\}$  (Faltungsideal) abbildet;  $\{\mathfrak{T}\}$  enthält  $\mathfrak{T}$  nicht, da  $\mathfrak{H}$  kein Einselement der Faltung zuläßt. — Verf. betrachtet nun die Abbildung  $Y = \Sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{X}) = \Sigma_{\mathfrak{T}} \mathfrak{X}$  von  $\mathfrak{H}$  in  $H$ , wobei jeder Vektor  $\mathfrak{X}$  aus  $\mathfrak{H}$  mit einem festen Vektor  $\mathfrak{T}$  gefaltet und dann durch  $\Sigma$  auf den stützbaren Bereich  $Y$  von  $H$  abgebildet wird.  $\Sigma_{\mathfrak{T}}$  läßt sich auch wieder als (allgemeine) Kegelprojektion interpretieren, ähnlich wie  $\Sigma$  in der vorstehend referierten Note als (spezielle) Kegelprojektion dargestellt wurde. Die Bereiche  $Y$  des Faltungsideals  $\{T\}$  der Menge  $H$  werden dadurch erhalten, daß die Ebene  $\Pi$  mit einem durch den Endpunkt des Vektors  $\mathfrak{X}$  hindurchgelegten, vom Faltungsvektor  $\mathfrak{T}$  abhängigen Projektionskegel geschnitten, und der Schnittbereich  $Y^\pi$  durch eine durch die erste komplexe Koordinate  $\tau_1$  von  $\mathfrak{T}$  bestimmte Drehstreckung in  $Y$  übergeführt wird.  $\Sigma$  kann indessen nicht als Sonderfall von  $\Sigma_{\mathfrak{T}}$  gewonnen werden. Die beiden Kegelprojektionen  $\Sigma$  und  $\Sigma_{\mathfrak{T}}$  können zu einer geometrischen Deutung der Faltung in  $\mathfrak{H}$  verwendet werden, indem sich  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{T}\mathfrak{X}$  als  $\mathfrak{Y} = \Sigma^{-1} \Sigma_{\mathfrak{T}} \mathfrak{X}$  interpretieren läßt.  $\mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{X}$  werden also durch  $\Sigma$  und  $\Sigma_{\mathfrak{T}}$  auf den gleichen Bildbereich  $Y$  der Ebene  $\Pi$  bezogen. Analog läßt sich  $Y = TX$  als  $Y = \Sigma_{\mathfrak{T}} \Sigma^{-1} X$  auffassen.

*H. Hadwiger.*

**Følner, E.: Sur quelques questions rattachées à deux espaces de dimensions infinies.** 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 225—228 (1952).

$R$  sei der Raum bestehend aus den Punkten  $X = (x_1, x_2, \dots)$  mit reellen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots$ , und  $R_1$  sei der Raum bestehend aus den Punkten  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  mit reellen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  abhängig von  $A$ . Eine Punktfolge  $X^{(n)} \in R$  konvergiert gegen  $X \in R$ , wenn das Skalarprodukt  $A X^{(n)} = a_1 x_1^{(n)} + a_2 x_2^{(n)} + \dots$  für jedes  $A \in R_1$  gegen  $AX$  konvergiert:  $AX^{(n)} \rightarrow AX$ . Entsprechend konvergiert  $A^{(n)} \in R_1$  gegen  $A \in R_1$ , wenn  $XA^{(n)} \rightarrow XA$  für jedes  $X \in R$ . Ist  $M$  ein Punktemodul  $\subset R$ , so bedeute  $M'$  die Menge aller  $A \in R_1$  mit  $XA \equiv 0 \pmod{1}$  für alle  $X \in M$ . Entsprechend sei  $M' \subset R$  erklärt, wenn  $M \subset R_1$ . Es gilt dann: Für jeden Modul  $M$  aus  $R$  oder  $R_1$  ist  $M'' = \overline{M}$ , das ist die abgeschlossene Hülle von  $M$ . — Der Vortrag enthält eine Beweisandeutung für diesen Satz, sowie die Mitteilung einiger Sätze über fastperiodische Funktionen und unendliche Systeme linearer Kongruenzen mit unendlich vielen Variablen, die aus ihm folgen. Der Satz läßt sich zum Beweis des Pontrjaginschen Dualitätssatzes benutzen.

*W. Maak.*

**Shirotu, Taira: A generalization of a theorem of I. Kaplansky.** Osaka math. J. 4, 121—132 (1952).

The principal results of this paper deal with the problem of characterizing topological spaces  $X$  by means of various sublattices of the lattice  $\mathfrak{C}(X, R)$  of all continuous real-valued functions defined on  $X$ . The first theorem of this type is due to I. Kaplansky (this Zbl. 31, 219). Typical results obtained are the following. 1. A locally compact Hausdorff space is completely determined by the lattice of continuous real-valued functions which have compact supports. 2. A locally compact Hausdorff space is completely determined by the lattice of continuous real-valued functions which vanish at infinity. 3. A locally compact and fully normal space  $X$  is completely determined by the lattice  $\mathfrak{C}(X, R)$ . 4. A complete metric space is completely determined by the lattice of all uniformly continuous real-valued functions defined on it. 5. A complete metric space is completely determined by the lattice of all bounded, uniformly continuous real-valued functions defined on it. 6. An  $e$ -complete space [Shirotu, Proc. Japan. Acad. 27, 513—516 (1951)] is completely determined by the lattice  $\mathfrak{C}(X, R)$ . The basic theorem employed in obtaining these results is a representation theorem, interesting on its own account, of lattices which in addition to the usual partial ordering  $\leq$  have another binary relation  $\leq$ , subject to certain axioms. The author proves that every such lattice can be represented as a basis consisting of regular open sets  $G$  for a locally compact Hausdorff space. The relation  $\leq$  becomes ordinary set inclusion, while the relation  $\leq$  becomes the relation  $G^- \subset H$  in the family of open sets.

*E. Hewitt.*

**Henriksen, Melvin:** On the ideal structure of the ring of entire functions. *Pacific J. Math.* **2**, 179—184 (1952).

Let  $R$  be the ring of all entire functions  $f$  of the complex variable  $z$ . Let  $K$  denote the complex number field. For  $f \in R$ , let  $A(f) = E\{z; z \in K, f(z) = 0\}$ . For  $B \subset R$ , let  $A(B)$  be the family of sets  $\{A(f)\}_{f \in B}$ . The author first classifies all families of subsets of  $K$  which can serve as  $A(I)$  for free ideals  $I \subset R$  (see Hewitt, this Zbl. **32**, 286), showing that families of sets  $A(I)$  are simply filters in the ring of countable subsets of  $K$  having no limit points, and having total intersection void. He next considers maximal ideals in  $R$ , proving that every fixed maximal ideal in  $R$  has the form  $E\{f; f \in R, f(z_0) = 0\}$  for some  $z_0 \in K$ . A free maximal ideal  $M$  in  $R$  is characterized by the fact that  $A(M)$  is an ultrafilter in the ring of sets described above. The difference ring  $R - M$  is always isomorphic to  $K$ , for every maximal ideal  $M$ , although if  $M$  is a free maximal ideal, the isomorphism can be constructed only by transfinite methods. E. Hewitt.

**Chaplanov, M. G.:** Ein Matrizenkriterium für die Vollständigkeit eines Systems analytischer Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **83**, 35—38 (1952) [Russisch].

This note deals with the same subject-matter as three previous communications (this Zbl. **45**, 58, 59); for notation and terminology, see the reviews of these articles. Let  $E$  be an infinite-dimensional normal linear co-ordinate space. Theorem I: a linear functional  $f$  on a subspace  $G$  of  $E$  can be linearly extended over  $E$ . It is not stated whether or not  $f$  is to be continuous; if  $f$  is continuous, the proof is false (see line 3 of page 36 for the error); if  $f$  is not necessarily continuous, the theorem is trivial. The standard Banach criterion for density of a linear subspace and a number of other simple consequences are inferred from Theorem I. All of these naturally remain open, in view of the indefinite status of this theorem. E. Hewitt.

**Edwards, R. E.:** On the weak convergence of bounded continuous functions. *Indagationes math.* **14**, 230—236 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc.*, Ser. A **55**, 230—236 (1952).

Let  $T$  be a locally compact Hausdorff space, and let  $C = C(T)$  be the space of bounded, real-valued, continuous functions on  $T$ , with the usual norm  $\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|$ , and with pointwise addition and scalar multiplication. Let  $C^* = C(T)^*$  be the conjugate space of  $C(T)$ . Let  $L_*(x) = \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t)$  and  $L^*(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t)$  for all  $x \in C$  (the symbol „ $x \rightarrow \infty$ “ is to be interpreted in an obvious way for general locally compact spaces). An element  $L \in C^*$  is said to be a generalized limit if  $L_*(x) \leq L(x) \leq L^*(x)$  for all  $x \in C$ . It is first proved that every  $F \in C^*$  can be written as  $\alpha_1 L_1 - \alpha_2 L_2 + \int_T \cdot d\mu(t)$ , where  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are real numbers,  $L_1$  and  $L_2$  are generalized limits, and  $\mu$  is a bounded Radon measure on  $T$ . As noted by the author, this is a special case of a theorem due to K. Yosida and the reviewer (this Zbl. **46**, 54, Theorem 1.24 of the paper) but is proved independently here. The main result deals with the weak convergence of sequences  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  of functions in  $C$ . The following conditions are immediately seen to be necessary: I.  $\|x_n\| \leq A$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; II.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0$  for all  $t \in T$ . These conditions are easily proved to be sufficient if  $T$  is compact [see Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932 (this Zbl. **5**, 209), p. 224, Théorème 8, for the case  $T$  metrizable]. The following condition is next introduced: III.  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_*(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L^*(x_n) = 0$ . The author proves that conditions I, II, and III are sufficient for weak convergence of  $x_n$ , and discusses the case in which these conditions are also necessary. E. Hewitt.

**Glicksberg, Irving:** The representation of functionals by integrals. *Duke math. J.* **19**, 253—261 (1952).

Let  $X$  be a topological space and let  $C(X)$  denote the vector space of all continuous, bounded, real-valued functions defined on  $X$ . Let  $J$  be a non-negative linear functional defined on  $C(X)$ . Then  $J$  admits a representation of the form  $(*) J(f) = \int_X f(x) dm(x)$ , where  $m$  is a countably additive measure defined on the smallest  $\sigma$ -algebra containing all sets of the form  $E\{x; x \in X, f(x) \neq 0\}$ , with  $f \in C(X)$ , if and only if  $J(f_n) \rightarrow J(f)$  for all sequences  $f_n$  in  $C(X)$

which are monotone increasing and converge pointwise to  $f$ . The author then takes up the question of characterizing those completely regular spaces in which every non-negative  $J$  satisfies this condition and hence has a countably additive integral representation. He shows that this occurs if and only if every function in  $C(X)$  is bounded, and also shows that this condition is equivalent to a number of other conditions, one of them being that for every sequence of open sets  $\{V_n\}_{n=1}^\infty$  with pairwise disjoint closures, the sequence of sets  $\{V_n\}_{n=1}^\infty$  has a cluster-point. Call this the condition (b). The author finally proves a generalization of the Riesz representation theorem for linear functionals on the space of functions which are continuous and have compact support. Namely, let  $C_{00}(X)$  be the space of all functions  $f$  in  $C(X)$  such that the set  $(E[x; x \in X, f(x) \neq 0])^-$  has the compactness property (b). Suppose also that  $J$  is bounded, over the set of all  $g \in C_{00}(X)$  such that  $0 \leq g \leq \chi_W$ , where  $W$  is any of the sets  $E[x; x \in X, f(x) \neq 0]$  for  $f \in C_{00}(X)$ . Then  $J$  admits a representation of the form (\*), where  $m$  is a countably additive measure defined over the smallest  $\sigma$ -algebra containing all of the sets  $W$ . The first and last theorem mentioned here have also been proved independently, and in more general form, by the reviewer [Ark. Mat. 2, 269—282 (1952)].

E. Hewitt.

**Lazard, Michel:** Sur les groupes abéliens dans les modules filtrés. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1465—1467 (1952).

$L$  bedeutet einen Vektorraum über dem Körper  $Q$  der rationalen Zahlen und  $w$  eine Abbildung von  $L$  auf die um  $\infty$  als maximales Element bereicherte Menge der ganzen Zahlen mit den Eigenschaften  $w(x) < \infty$  für  $x \neq 0$ ,  $w(x-y) \geq \min(w(x), w(y))$ ,  $w(ax) \geq w(x)$  für  $a \in Q$ . Bezüglich der Metrik, in der  $2^{-w(x-y)}$  der Abstand von  $x$  und  $y$  ist, sei  $L$  vollständig. In  $L$  heißt eine Funktion homogen vom Grad  $k_i$  im  $i$ -ten Argument, wenn bei Multiplikation des  $i$ -ten Arguments mit der ganzen Zahl  $n$  sich der Funktionswert mit  $n^{k_i}$  multipliziert, und  $\sum k_i$  wird dann der Gesamtgrad der Funktion genannt. In  $L$  sei nun eine Menge  $A$  von Funktionen mit den folgenden Eigenschaften gegeben:  $A$  enthält die Abbildungen  $x \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow ax$  ( $a \in Q$ ),  $(x, y) \rightarrow x + y$ ;  $A$  ist abgeschlossen bezüglich Einsetzung;  $f \in A$  ist bez. eines Arguments konstant, wenn  $f$  bez. dieses Arguments homogen vom Grade 0 ist; ist  $f \in A$  homogen vom Gesamtgrad  $k$  ( $\geq 1$ ), so gilt  $w(f(x_1, \dots, x_m)) \geq k-1 + \min_{i=1, \dots, m} w(x_i)$ ; jede Funktion

aus  $A$  läßt sich als unendliche Reihe homogener Funktionen aus  $A$  darstellen, und jede Reihe homogener Funktionen aus  $A$  mit wachsenden Gesamtgraden konvergiert gegen eine Funktion aus  $A$ . Wird die Menge  $L$  durch eine (multiplikativ geschriebene) binäre Verknüpfung zu einer Gruppe gemacht, so heißt diese Gruppe analytisch, wenn die Abbildung  $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$  zu  $A$  gehört. Zu jeder solchen Gruppe  $G$  gibt es einen in  $A$  liegenden Isomorphismus auf eine analytische Gruppe  $G'$ , in der  $x^n = nx$  gilt. In  $G'$  hat das Produkt zweier Elemente  $x, y$  die Darstellung

$x + y + \sum_{k=2}^\infty f_k(x, y)$ , worin  $f_k \in A$  homogen vom Gesamtgrad  $k$  ist. Die Verknüpfung  $2f_2$

macht  $L$  zu einer Lie-Algebra über  $Q$ , und die unendliche Reihe für das Produkt von  $x, y$  entspricht dann der Formel von Campbell-Hausdorff, so daß die  $f_k$  sich durch  $f_2$  allein ausdrücken lassen. Die Ergebnisse gelten auch noch dann, wenn  $Q$  durch den Ring  $I_p$  aller rationalen Zahlen, deren Nenner keine Primfaktoren  $\geq p$  enthält, ersetzt wird,  $L$  unitärer  $I_p$ -Modul ist und jede Funktion  $\in A$  von einem Gesamtgrad  $\geq p$  gleich 0 ist.

G. Pickert.

**Clifford, A. H.:** A class of partially ordered Abelian groups related to Ky Fan's characterizing subgroups. Amer. J. Math. 74, 347—356 (1952).

This paper completes a previous paper by Ky Fan (this Zbl. 37, 351) whose notations and definitions are adopted throughout. Condition IV': Every maximal singular subgroup of  $G$  is maximal convex. Any characterizing subgroup of  $C(\Omega)$  with compact  $\Omega$  satisfies IV' but not necessarily Ky Fan's stronger condition IV as shown by Example 1. —  $S$  denotes the discrete space of the natural numbers 1, 2, ... and  $S^*$  the space  $S$  with the limit point  $\infty$  adjoined. The functions  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) are defined by  $\alpha_i(j) = 1$  when  $j \leq i$ ,  $\alpha_i(j) = 1/(j-i+1)$  when  $j > i$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , and  $\alpha_i(\infty) = 0$ .  $e = (1, 1, \dots, 1)$ .  $G$  is the group of all functions  $f = \lambda e + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  where  $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  represent real coefficients. Theorem: Any partially ordered abelian group  $G$  satisfying I, II, III, IV' is isomorphic with an additive group of bounded, continuous, real-valued functions on a completely regular space  $\Sigma$  (namely the space  $\Sigma$  of maximal singular subgroups of  $G$ ), satisfying  $P_1 = (jj)$ ,  $P_2 = (jjj)$  (see review quoted above) and four other conditions  $P_3, P_4, P_5$ , and  $Q$ . This theorem is proved without making use of the compactness of  $A \supseteq \Sigma$ . Example 2:  $H$  is the group of all essentially finite sequences  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$  with  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ ,  $G$  consists of all sequences  $\lambda e + h$  with  $\lambda$  any real number



and  $h \in H$ . The group  $G$  satisfies I, II, III and IV' but fails to be a characterizing subgroup of  $C(S^*)$ . Chr. Pauc.

Reiter, H. J.: Investigations in harmonic analysis. Trans. Amer. math. Soc. 73, 401—427 (1952).

Les deux résultats essentiels établis dans ce travail sont les suivants: I. Tout homomorphisme continu d'un idéal fermé  $I$  de  $L^1$  (algèbre des fonctions intégrables définies sur un groupe abélien localement compact) sur le corps des nombres complexes  $C$ , est réalisé par une transformation de Fourier. Si  $I_0$  en est le noyau,  $I/I_0$  normé de la manière habituelle est non seulement algébriquement isomorphe à  $C$ , mais encore lui est isométrique. II. Si  $I$  a pour co-spectre  $Z_I$  (ensemble des zéros communs à toutes les transformées de Fourier des fonctions appartenant à  $I$ ) et si la transformée de Fourier  $\hat{k}(\hat{x})$  de la fonction  $k(x) \in L^1$  satisfait à 1)  $Z_k \supset Z_I$  [ $Z_k$  ensemble des zéros de  $\hat{k}(\hat{x})$ ] 2.  $F(Z_k) \cap F(Z_I)$  est dénombrable [ $F(Z)$  désignant la frontière de  $Z$ ], alors  $k(x) \in I$  (généralisation du théorème de Mandelbrojt et Agmon, ce Zbl. 36, 352). A. Revuz.

Cotlar, Mischa: Über die Grundlagen der Ergodentheorie. Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 71—84 (1952) [Spanisch].

Ce rapport donne une vue d'ensemble de la théorie ergodique abstraite. La première partie expose les schémas ergodiques suivant leur complexité croissante, montrant clairement les avantages du point de vue fonctionnel dans le cas de transformations aléatoires. Dans la seconde partie sont formulés les principaux théorèmes ergodiques. L'A. développe la remarque de N. Wiener au sujet de l'analogie entre le théorème ergodique individuel et le théorème de Lebesgue sur la différentiation de l'intégrale indéfinie, considérant le cas d'un groupe de transformations à deux paramètres. Il préconise une étude systématique de cette analogie, indiquant qu'il a déjà obtenu une généralisation d'un lemme de F. Riesz utilisable en théorie ergodique et en théorie de la différentiation. Chr. Pauc.

Gel'fand, I. M. und S. V. Fomin: Geodätische Strömungen auf Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 118—137 (1952) [Russisch].

Verff. beschreiben hier eine neue gruppentheoretische Methode, Eigenschaften der Strömungen auf Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung zu bestimmen. Sei zuerst  $F$  eine 2-dimensionale Fläche (Riemannsche Mannigfaltigkeit), die vollständig ist (d. h., jede geodätische Linie ist in beiden Richtungen unbegrenzt fortsetzbar) und konstante negative Krümmung hat. Man definiert wie gewöhnlich den Raum  $H$  aller Linienelemente von  $F$  [siehe E. Hopf, Ergodentheorie, Ergeb. Math. 5, Nr. 2, 67—68 (1937)], und eine Strömung auf  $H$ , die mit einer Bewegung auf  $F$  übereinstimmt. Man stellt  $F$  dar als die vollständige Lobatschewskische Ebene (= die obere Halbebene der komplexen Ebene mit einer gewissen nichteuklidischen Metrik), unter Identifizierung aller Punkte, die vermöge der Substitutionen einer Gruppe  $D$  von nichteuklidischen Bewegungen einander kongruent sind. Dann betrachtet man den Phasenraum  $H$  als die Gruppe  $W$  der Bewegungen der Lobatschewskischen Ebene, modulo  $D$ . Diese Gruppe  $W$  ist isomorph mit der Gruppe  $G$  aller reellen Matrizen zweiter Ordnung mit Determinante eins, und deshalb kann man den Raum  $H$  als den Raum der Nebenklassen  $Dg$  der Gruppe  $G$  modulo  $D$  darstellen. Zunächst beweist man, daß die Strömung in  $G/D$  eine Darstellung der Form  $Dg \rightarrow Dg g_t$  zuläßt, wo  $g_t = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ . Die Hauptidee der vorliegenden Abhandlung

ist genau diese Darstellung des Phasenraumes  $H$  als eine Menge von Nebenklassen und der Strömung in  $H$  als Multiplikation mit den Matrizen  $g_t$ . Man kann nun die Theorie der Darstellungen der Gruppe  $G$  anwenden [s. V. Bargmann, Ann. of Math., II. Ser. 48, 568—640 (1947)]. Der folgende Satz wird bewiesen. Die oben beschriebene Strömung hat ein Spektrum vom Lebesgueschen Typus, d. h.: in der Spektralzerlegung des unitären Operators  $U_t$ , wo  $U_t f(Dg) = f(Dgg_t)$  für alle  $f \in L_2(H)$ , haben alle Spektralmaße genau dieselbe Familie der Nullmengen wie das Lebesguesche Maß. Der Beweis beruht auf einer Untersuchung der irreduziblen unitären Darstellungen von  $G$  (alle von unendlicher Dimension) und Anwendung der bekannten Zerlegung einer beliebigen unitären Darstellung einer lokal kompakten Gruppe in eine direkte Summe (siehe F. Mautner, dies. Zbl. 35, 298). — Ein neuer Beweis wird gegeben, daß eine Strömung von dem beschriebenen Typus ergodisch und metrisch transitiv ist, wenn die Fläche  $F$  endliche Oberfläche hat. Zusammenhänge mit der Theorie der automorphen Formen werden behandelt, und

die Verff. betrachten auch Strömungen auf Mannigfaltigkeiten von beliebiger Dimension  $n$  mit konstanter negativer Krümmung. Hier ist die Lage etwas komplizierter. Man beweist, daß auch in diesem Falle jede geodätische Strömung ein Spektrum vom Lebesgueschen Typus hat. Zum Schluß werden die dieser Theorie zugrunde liegenden gruppentheoretischen Begriffe erklärt und diskutiert.

*E. Hewitt.*

**Vajnberg, M. M.:** Einige Fragen der Differentialrechnung in linearen Räumen. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 4 (50), 55—102 (1952) [Russisch].

This is mainly an expository article, giving a survey of the theory of differentials in certain real Banach spaces, as developed by the Soviet and other mathematical schools. The norm and weak topologies for Banach spaces and a number of corresponding definitions of continuity for non-linear operators are first discussed. Countable compactness, a concept awkward by comparison with (bi-)compactness, is employed. The Gâteaux and Fréchet differentials are defined and compared. The gradient of a functional is introduced (for a concrete case, see Golomb, this Zbl. 9, 312). A so-called potential operator is next defined; there is only a remote connection between this potential and the potentials of classical analysis. Much attention is given to various types of continuity for potential operators. The paper closes with the discussion of a number of examples of these operators, mapping various  $L_p$ -spaces into the corresponding  $L_p$ -spaces ( $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ ). *E. Hewitt.*

**Grinbljum, M. M.:** Eine allgemeine Definition des Operatorintegrals. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 84, 661—664 (1952) [Russisch].

In einer früheren Note (dies. Zbl. 37, 78) hat Verf. Operator-Integrale Riemann-Stieltjesscher Art  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) P(\lambda)$  definiert;  $P(\lambda)$  ist hier eine Spektralfunktion in dem vom Verf. gegebenen Sinne (dies. Zbl. 35, 201). Nachdem Verf. die Fortsetzbarkeit von  $P(\lambda)$  zu einer abzählbar-additiven Mengenfunktion  $P(M)$  auf dem Körper aller Borelmengen  $M$  nachgewiesen hat [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 345—348 (1951)], definiert er jetzt Operator-Integrale Lebesgue-Stieltjesscher Art.

*B. Sz.-Nagy.*

**Halmos, Paul R.:** Einige aktuelle Probleme über Operatoren in Hilberträumen. *Symposium problem. mat. Latino América*, 19—21 Dic. 1951, 9—14 (1952) [Spanisch].

L'A. fait un tour d'horizon des problèmes actuels de la théorie des opérateurs des espaces de Hilbert et indique en passant les lignes générales suivant lesquelles des solutions ont été trouvées. Il mentionne aussi quelques questions de la théorie qui n'ont pas encore reçu de réponse. Les questions suivantes sont formulées explicitement: 1. Comment caractériser les commutateurs? Quelle est la distance minima entre 1 et un commutateur? Peut-on dire que la distance de 1 à un commutateur est toujours plus grande ou égale à 1? 2. Si  $A$  est un opérateur, existe-t-il toujours un sous-espace propre invariant par rapport à  $A$ ? 3. Tout opérateur inversible a-t-il une racine carrée? — Un compte rendu de la discussion qui a suivi cet exposé est inclu après la bibliographie.

*A. Pereira Gomes.*

**Miyadera, Isao:** Generation of a strongly continuous semi-group operations. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 4, 109—114 (1952).

As a remark to Theorem 12.2.1 in E. Hille's book (Functional analysis and semi-groups, New York, 1948; this Zbl. 33, 65), the following theorem is proved: Let  $A$  be a closed linear operator defined on a dense subset of a Banach space  $E$  into  $E$  such that i) the spectra of  $A$  is located in  $\Re(\lambda) \leq \sigma \leq \log M$  (with  $M > 1$ ) and ii)  $\|R(\sigma; A)^k\| \leq M(\sigma - \log M)^{-k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ;  $\sigma > \log M$ ), where  $R(\sigma; A)$  is the resolvent of  $A$ . Then there exists a semi-group  $T(\xi)$  ( $0 \leq \xi < \infty$ ) of bounded linear operators on  $E$  into  $E$  with the infinitesimal generator  $A$ . The proof is quite similar to the reviewer's investigation (this Zbl. 37, 353), which was unknown to the author.

*K. Yosida.*

**Takeda, Zirô:** On a theorem of R. Pallu de la Barrier. *Proc. Japan Acad.* 28, 558—563 (1952).

Soit  $\mathfrak{A}$  une  $W^*$ -algèbre commutative dans un espace hilbertien  $H$ . Soient  $E$  le spectre de  $\mathfrak{A}$ ,  $\mu$  une mesure normale sur  $E$  (i. e. une mesure telle que tout ensemble rare de  $E$  soit négligeable pour  $|\mu|$ ). Alors, il existe  $x \in H$  et  $y \in H$  tels que  $\int A(\xi) d\mu(\xi) = \langle Ay, x \rangle$  pour tout  $A \in \mathfrak{A}$ . R. Pallu de la Barrière a démontré ce théorème, mais n'a pas publié sa démonstration. L'A. en donne deux démonstrations (moins simples que celles de Pallu de la Barrière, car elles passent par l'intermédiaire de  $W^*$ -algèbres abéliennes maximales contenant  $\mathfrak{A}$ ). Il démontre de façon simple plusieurs conséquences, toutes plus ou moins explicitement connues.

*J. Dixmier.*

Misonou, Yosinao: On a weakly central operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 194—202. (1952).

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre contenant 1, de centre  $Z$ . L'A. dit que  $A$  est factorielle (resp. faiblement centrale) si  $Z$  se réduit aux scalaires (resp. si étant donnés deux idéaux bilatères maximaux  $M_1$  et  $M_2$ , l'égalité  $M_1 \cap Z = M_2 \cap Z$  entraîne  $M_1 = M_2$ ). Les  $W^*$ -algèbres sont faiblement centrales. Une  $C^*$ -algèbre faiblement centrale  $A$  est la somme continue des  $C^*$ -algèbres factorielles  $A_\zeta = A/I_\zeta$ , où  $\zeta$  parcourt le spectre de  $Z$ , et où  $I_\zeta$  est l'intersection des idéaux bilatères fermés de  $A$  contenant l'idéal de  $Z$  attaché à  $\zeta$ . On a enfin des résultats du type suivant (si  $A$  est une  $W^*$ -algèbre): tout projecteur de  $A_\zeta$  est l'image canonique d'un projecteur de  $A$ .

*J. Dixmier.*

Krejn, M. G. und M. A. Krasnosel'skij: Die Stabilität des Index eines nicht-beschränkten Operators. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 219—224 (1952) [Russisch].

The authors give extensions of results of the reviewer (this Zbl. 42, 120) on conditions under which the „index“  $\nu(A)$  of a linear operator on a Banach space is unaffected by the perturbation of  $A$ ; the index is defined by  $\nu(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ , where  $\alpha(A)$  is the dimensionality (assumed finite) of the set of zeros of  $A$ , and  $\beta(A)$  is the adjoint concept. Instead of  $A$  being bounded, the authors merely require it to be closed; they do not require, as did the reviewer, the domain and range of  $A$  to lie in the same Banach space. The theorem that  $\nu(A + B) = \nu(A)$  for sufficiently small  $\|B\|$  then generalises that of the reviewer. The corresponding theorem for the case when  $B$  is completely continuous is in partial generalisation of the reviewer's result, in that if  $B$  is not finite-dimensional they require the space  $E_2$  in which  $A$  and  $B$  have their values to have a basis. They give a separate geometrical argument to prove the result  $\alpha(A + B) \leq \alpha(A)$  for small  $\|B\|$ , which they appear to have developed in an earlier paper in collaboration with D. P. Milman [Sbornik Trud. Inst. Mat. Akad. Nauk Ukr. SSR 11, 97—112 (1948), not accessible to the reviewer].

*F. V. Atkinson.*

Krasnosel'skij, M. A. und Ja. V. Rutickij: Lineare Integraloperatoren in Orliczschen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 33—36 (1952) [Russisch].

Further investigations of Orlicz spaces (this Zbl. 45, 61); for expressions not defined here, see the review cited. Let  $G$  be a compact subset of  $n$ -dimensional Euclidean space, let  $\hat{G} = G \times G$ , and let  $M_1$  and  $M_2$  be  $N'$ -functions. Let  $A(u) = \int_G K(x, y) u(y) dy$ , where  $K$  is a function measurable on  $G$ . Let the complementary functions to  $M_i$  be  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ). The authors are here concerned with conditions under which the operator  $A$  is continuous, completely continuous, etc., as a mapping of  $L_{M_1}^*(G)$  into  $L_{M_2}^*(G)$ . This problem has been investigated also by Zaanen [Ann. of Math., II. Ser. 47, 654—666 (1946)]. A total of eight theorems are announced, without proofs, of which the following may be taken as a fair sample. I. Let  $\varphi(u)$  be an  $N'$ -function such that for  $u(y) \in L_{M_1}^*(G)$ ,  $v(x) \in L_{N_2}^*(G)$ , the function  $u(y)v(x) \in L_\varphi^*(G)$ , and  $\|u v\|_\varphi \leq C \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2}$ . Let  $K(x, y) \in L_{N_2}^*(G)$ , where  $\Psi$  is the function complementary to  $\Phi$ . Then the operator  $A$  maps  $L_{M_1}^*(G)$  into  $L_{M_2}^*(G)$  and is continuous. II. The conclusion of I holds if  $\Psi(u) = M_2[N_1(u)]$  or  $\Psi(u) = N_1[M_2(u)]$ . III. Under the hypotheses of I or II, the operator  $A$  is completely continuous provided that the function  $\Psi$  satisfies the condition



12. IV. Under the hypotheses of I or II, the operator  $A$  is completely continuous if for every  $\alpha > 0$ ,  $\iint_{GG} \Psi[\alpha K(x, y)] dx dy < \infty$ . Finally, conditions are stated under which subsets of  $L_M^*(G)$  are compact.

*E. Hewitt.*

**Berman, D. L.:** Über eine Klasse linearer Operationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 13—16 (1952) [Russisch].

**Berman, D. L.:** Lineare trigonometrische Polynomoperationen in gewissen Funktionalräumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 9—12 (1953) [Russisch].

Dans la première Note on considère des opérateurs  $U(f, x)$  sur l'espace  $\tilde{C}$  des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques, dont les valeurs sont des polynômes trigonométriques de degré au plus égal à  $n$  et tels que pour ces polynômes on ait

$$U(T, x) = \sigma_n(T, x) \equiv \int_0^{2\pi} T(x+t) \Phi(t) dt,$$

$\Phi(t)$  étant un polynôme trigonométrique de degré  $n$ . On démontre l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(f_t, x-t) = \sigma_n(f, x), \quad f_t(x) = f(x+t).$$

et l'inégalité  $\|U\|_{\tilde{C}} \geq \|\sigma_n\|_{\tilde{C}}$ . — Des résultats analogues sont valables pour l'espace  $\tilde{L}$  des fonctions  $2\pi$ -périodiques, sommables sur  $[-\pi, \pi]$ . — Dans la deuxième Note on étend ces résultats aux applications  $U(f, x)$  d'un espace  $E_1$  dans un autre espace  $E_2$ , en rendant évidentes les propriétés qui les font possibles. *G. Marinescu.*

**Davis, Chandler:** Estimating eigenvalues. Proc. Amer. math. Soc. 3, 942—947 (1952).

Bemerkungen zum Spektrum  $S$  eines Hermiteschen Operators  $A$  auf dem Hilbertschen Raum  $H$ . (1) Sind Intervalle  $(a_{2v-1}, a_{2v})$  bekannt, derart daß  $S \cap (a_{2v-1}, a_{2v})$  leer ist für  $v = 1, \dots, n$  und daß  $S \cap (a_{2k}, a_{2k+1})$  für ein passendes  $k$  nur aus einem Punkt  $\lambda$  besteht, so können die Schranken  $a_{2k}$  und  $a_{2k+1}$  für den Eigenwert  $\lambda$  nach Wahl eines geeigneten  $x \in H$  durch Ausnutzung der Multilinearität von  $f(a_1, \dots, a_{2n}) = (H(A - a_n I)x, x)$  verbessert werden. (2) Der am nächsten bei einer gegebenen Zahl  $b$  gelegene Eigenwert von  $A$  kann auf dem Weg über den Maximaleigenwert von  $kI - (A - bI)^2$  iterativ berechnet werden, wenn  $A$  beschränkt ist und  $k$  genügend groß gewählt ist.

*H. Wielandt.*

**Karush, W.:** Convergence of a method of solving linear problems. Proc. Amer. math. Soc. 3, 839—851 (1952).

Asymptotische Fehlerabschätzung für ein von Lanczos [An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. J. Res. nat. Bur. Standards 45, 255—282 (1950)] vorgeschlagenes Verfahren zur angenäherten Lösung von  $Ay = \lambda y$  und  $(A - I)x = b$ ; dabei bedeutet  $A$  einen vollstetigen Hermiteschen Operator in einem von  $b, Ab, A^2b, \dots$  aufgespannten Hilbertschen Raum. Das Verfahren läuft darauf hinaus,  $A$  durch die Projektion  $A^{(n)}$  von  $A$  auf den von  $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$  aufgespannten  $n$ -dimensionalen Teilraum zu ersetzen. Bezeichnet man die nichtnegativen Eigenwerte von  $A$  mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ , die Eigenwerte von  $A^{(n)}$  mit  $\lambda_1^{(n)} \geq \dots \geq \lambda_n^{(n)}$ , so gilt über die bekannte Tatsache  $\lambda_k^{(n)} \nearrow \lambda_k$  hinaus die bemerkenswerte Fehlerabschätzung: Zu jedem  $\delta > 0$  und jedem  $k = 1, 2, \dots$  gibt es eine von  $n$  unabhängige Konstante  $K$  derart, daß  $0 \leq \lambda_k - \lambda_k^{(n)} \leq K \delta^n$  für alle  $n$ ; der Fehler geht also schneller gegen Null als jede geometrische Progression. Ebenso gut ist die Konvergenz der zugehörigen Eigenvektoren (wenn diese auf die Länge 1 und positive erste Komponente normiert sind) und die Konvergenz der Lösungen der inhomogenen Gleichung (wenn 1 kein Eigenwert von  $A$  ist). Setzt man an Stelle der Vollstetigkeit nur voraus, daß das Spektrum von  $A$  aus  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  und einer unterhalb von  $\lambda_k$  gelegenen beschränkten Menge besteht, so gilt noch  $\lambda_k^{(n)} \nearrow \lambda_k$ .

*H. Wielandt.*

**Gelfand, I. M.:** Über das Spektrum von nicht-selbstadjungierten Differentialoperatoren. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 6 (52), 183—184 (1952) [Russisch].

Es wird das Eigenwertproblem  $(D + q - \lambda)u = 0$  betrachtet mit  $u = u(x, y, z)$ ,  $Du = -\Delta u + pu$ , und mit gegebenen Funktionen  $p, q$ ;  $p$  ist reellwertig und so gewählt, daß der Operator  $D$  in  $L^2$  selbstadjungiert ist;  $q$  ist komplexwertig und verschwindet außerhalb eines beschränkten Gebietes. Dann besteht das Spektrum des Operators  $D + q$  aus einer Menge von reellen Zahlen und evtl. aus abzählbar vielen komplexen Zahlen, die aber nur reelle Häufungswerte besitzen können. Die kontinuierlichen Spektra von  $D$  und  $D + q$  (auf der reellen Achse) sind gleich. — Zum Beweis wird die Resolvente  $R_\lambda = (D - \lambda)^{-1}$  herangezogen und die Identität  $D + q - \lambda = (D - \lambda)(1 + R_\lambda q)$  benutzt. Dann ist  $(D + q - \lambda)^{-1} = (1 + R_\lambda q)^{-1} R_\lambda$ , und man braucht nur die Existenz und das Verhalten des Operators  $(1 + R_\lambda q)^{-1}$  zu untersuchen. Nun ergibt sich, daß der Operator  $R_\lambda q$  [d. h.  $R_\lambda q \cdot u = R_\lambda(qu)$ ] vollstetig ist und — zusammen mit  $R_\lambda$  — analytisch von  $\lambda$  abhängt, und dann kann die Fredholm-Rieszsche Theorie der vollstetigen Operatoren angewendet werden. — Die Ergebnisse können auch auf andere Eigenwertprobleme übertragen werden.

*B. Sz.-Nagy.*

**Glazman, I. M.:** Über den Charakter des Spektrums von eindimensionalen singulären Randwertproblemen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 87, 5—8 (1952) [Russisch].

Let  $l[y] = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k(x) \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}$ ,  $0 < x < \infty$ , be a given differential operator of order  $2n$ , with one singular end. Let  $L'$  be the minimal operator defined by  $l[y]$  [this operator is denoted by the symbol  $L$  in an earlier note (see Glazman, this Zbl. 45, 45)]. Let  $\tilde{L}$  be any self-adjoint extension of the closure  $L$  of  $L'$ . The present note is concerned with properties of the spectrum  $\mathfrak{S}(\tilde{L})$  and the continuous spectrum  $\mathfrak{C}(\tilde{L})$  for various choices of the operator  $l[y]$  (the continuous spectrum is taken to contain isolated points of growth of the spectral resolution  $E_\lambda$  of  $\tilde{L}$ , provided that they are of infinite multiplicity). Typical of the results announced are the following. 1. If  $l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + q(x)y$  and if  $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ , then  $[0, \infty) \subset \mathfrak{S}(\tilde{L})$ . 2. If  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_0(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_k(x) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), and  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_k^{(r)}(x) = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $r = 1, 2, \dots, k-1$ ), then  $[0, \infty) \subset \mathfrak{S}(\tilde{L})$ . 3. If the hypothesis of 2. are satisfied and also  $p_k(x) \geq 0$  for sufficiently large  $x$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ), then  $(-\infty, 0) \cap \mathfrak{C}(\tilde{L}) = \emptyset$ . The other theorems stated, which are too complicated to describe completely here, give conditions under which  $\mathfrak{C}(\tilde{L})$  is unbounded above and conditions under which  $\mathfrak{C}(\tilde{L})$  contains the interval  $[0, \infty]$ .

*E. Hewitt.*

**Caccioppoli, Renato:** Equazioni differenziali ordinarie negli spazi astratti, osservazioni su una nota del prof. B. Ferretti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 13, 95—97 (1952).

It is pointed out that the existence of a solution of the differential equation  $dA/d\lambda = F(A, \lambda)$  in a Banach space can be proved under conditions on  $F$  which are less restrictive than those given by Ferretti (this Zbl. 46, 125). It is also pointed out that the proof by successive approximations is not valid for Hermitian operators without continuous spectra (the case in which Ferretti was interested) since these do not form a linear space.

*J. D. Weston.*

**Každan, Ja. M.:** Über das Momentenproblem für  $J_p$ -Matrizen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 82, 329—332 (1952) [Russisch].

This note gives a solution, elementary in the sense that spectral theory is not

employed, of a moment problem for matrices originally posed and solved by M. G. Krejn (this Zbl. 35, 359). With the notation and terminology of this article, the exact result is: if  $A$  is a regular  $J_p$ -matrix, then there exists at least one monotone

increasing matrix function  $T(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ) such that  $\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\lambda) D_j(\lambda) dT(\lambda) = \delta_{ij} I$ . For the case  $p = 1$  (so that  $A = \{a_{ik}\}_{i,k=0}^{\infty}$ , with  $a_{ik} = 0$  for  $|i - k| > 1$ ) if  $a_{k+1,k} = a_{k,k+1} > 0$ , if  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,k} = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) and if  $a_{k,k+1} < M$ , then the spectral function  $\sigma(\lambda)$  [as  $T(\lambda)$  becomes in this case] is uniquely determined, and is bounded below (resp. above). E. Hewitt.

**Rothe, E. H.: Leray-Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space.** Ann. of Math., II. Ser. 55, 433—467 (1952).

In this paper the author generalizes to the case of not necessarily separable Hilbert spaces and to more general functionals important results which have been published by him recently (this Zbl. 42, 344). The functionals are of the form  $i(q) = \frac{1}{2q} (x, x)^q + I(x)$  where  $q$  is any positive integer and no longer only 2. The main theorem of the paper is about the relation  $j = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r m^r$

between the index  $j$  and the Morse type numbers  $m^r$  (denoted  $M^r$  in the above mentioned article). This relation holds in any Hilbert space provided certain restrictive assumptions are made; but these which have an extremely simple expression seem the most natural that one is bound to expect. — The method of proof is fundamentally the same as that of Leray and Schauder (this Zbl. 9, 73), namely what the author calls „approximation procedure by reduction to the finite dimensional case“. This reduction is easily obtainable on account of the fact that  $I(x)$  has a completely continuous gradient. Section 2 deals in detail with the procedure itself. Section 3 is devoted to the study of „layer scalars“ which are characterized by the property of being equal to certain of their projection approximations in some finite dimensional spaces. In section 4 the type numbers are shown to satisfy the important relations  $m^0 = p^0 - 1$ ,  $m^r = p^{r-1}$ , where  $p^r$  stands for  $r^{\text{th}}$  Betti number of  $\{i(x) \leq 0\} \cap \{\|x\| = p\}$ . Section 5 shows how to approximate a scalar by a layer scalar. In section 6 the proof of the relation mentioned above between index and type numbers is developed and section 7 treats of some applications. This article, as well as another paper of the author (this Zbl. 42, 344) is undoubtedly a very important contribution to the theory of equations (in the sense of Leray) in Hilbert spaces. C. Racine.

**Cinquini-Cibrario, Maria: Metodi esistenziali in analisi matematica.** Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 90—100 (1952).

Questo articolo è il testo di una lezione tenuta dall'A. sui vari metodi attualmente usati per la dimostrazione dei teoremi di esistenza delle soluzioni delle equazioni funzionali. L'A. ha voluto dare in poche pagine un quadro completo dell'argomento e l'esposizione è perciò assai schematica. C. Miranda.

**Kuwagaki, Akira: Sur quelques équations fonctionnelles et leurs solutions caractéristiques. II.** Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 47—53 (1952).

Extensions au cas de plusieurs variables des résultats d'un mémoire antérieur [Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 26, 271—277 (1951)]. M. Hukuhara.

**Parodi, Maurice: Application de la transformation de Laplace à deux variables à la résolution d'équations fonctionnelles.** C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1597—1599 (1952).

## Praktische Analysis:

● **Larčenko, E. G.: Technik des Rechnens.** Moskau: Verlag für geodätische und kartographische Literatur 1952. 249 S. R. 7,65 [Russisch].

Das Buch ist für Studierende der Geodäsie und des Meliorationswesens bestimmt und aus Vorlesungen des Verf. am Moskauer Institut für Ingenieure des Meliorationswesens entstanden. Es soll über die allgemeinen Grundsätze des Rechnens mit angenäherten Zahlen, über die in den genannten Fächern gebräuchlichsten Rechenverfahren und Rechenhilfsmittel, sowie über die Verwendung dieser Hilfsmittel bei der Verarbeitung geodätischer Messungsergebnisse unterrichten. — Im einzelnen bringt das Werk zunächst eine Einleitung über Näherungswerte und ihre Genauigkeit, über Fehlerfortpflanzung, Kontrollrechnungen und praktische Winke zur



Durchführung der Rechnungen. — Daran schließt sich eine ausführliche Darstellung der Lehre von den abgekürzten Rechenverfahren, den kleinen Größen verschiedener Ordnung, der Verwendung von Näherungsformeln, dem Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers, insbesondere des geodätischen Spezialrechenschiebers, von der Verwendung von Funktionstafeln mit Erörterungen über deren Einteilung, die Auswahl nach der Stellenzahl und die Interpolationsformeln, von den Rechenmaschinen mit historischen Betrachtungen, grundsätzlichen Erklärungen ihrer Einrichtung und Anleitungen zur Lösung besonderer Aufgaben mit ihrer Hilfe, und von den Elementen der Nomographie, umfassend die Funktionsleitern, die Netztafeln mit ihrer Anamorphose und die Fluchtentafeln. Ein Anhang enthält eine Sammlung viel gebrauchter Zahlenwerte, eine Hilfstafel zur Berechnung von Quadratwurzeln auf 5 genaue geltende Stellen und ein ausführliches Verzeichnis der einschlägigen Literatur in russischer Sprache. — Die Darstellung des gebotenen Stoffes ist einfach und klar und behält immer die Arbeit des vermessenden Ingenieurs und deren rechnerische Auswertung im Auge. Zahlreiche praktische Beispiele erleichtern das Verständnis. Jedem Kapitel sind Übungsaufgaben beigegeben.

W. Schmid.

Mulholland, H. P.: On the distribution of a convex even function of several independent rounding-off errors. Proc. Amer. math. Soc. 3, 310–321 (1952).

The paper aims to simplify the proof and strengthen the result of Golstine-von Neumann's investigation into the effect of the rounding-off errors in long computations (this Zbl. 43, 123). Thus the Theorem 4 states the result: Let  $x = (x_1, \dots, x_n)$  be a vector whose elements  $x_i$  are independent random variables with the cumulative distribution functions  $V_{m_i}(x_i|\beta^{-s})$ , where  $m_i \leq l$  and  $V_k(t)$  denotes the  $k$ -fold convolution of the uniform distribution  $V_1(t)$  on the interval  $-1/2 < t < 1/2$ . Then, for the bound  $|x| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$  of  $x$ ,

$$\text{Prob. } [|x| > \varrho_l \beta^{-s} (l n r/12)^{1/2}] \leq (r e^{1-r})^{n/2} (r-1)^{-1} (\pi n)^{-1/n},$$

with

$$\varrho_1 = (6/\pi)^{1/2} < 1.382, \quad 1 < \varrho_l \leq \varrho_2 < 1.0707 \quad (l \geq 2).$$

K. Yosida.

Collatz, L.: Aufgaben monotoner Art. Arch. der Math. 3, 366–376 (1952).

Gegeben ein halbgeordneter Raum  $R$  und ein Operator  $T$ , der einen Teilraum  $D$  auf einen Teilraum  $B$  von  $R$  abbildet.  $T$  heißt „von monotoner Art“, wenn für  $v, w \in D$  aus  $Tv \leq Tw$  stets folgt  $v \leq w$ . Gelingt es, zu einem gegebenen  $f \in R$  Elemente  $v_1, v_2$  mit  $Tv_1 \leq f \leq Tv_2$  zu finden, so folgt für die Lösung  $u$  von  $Tu = f$  (falls sie existiert) die Einschließung  $v_1 \leq u \leq v_2$ . Dieses allgemeine Prinzip wird auf nichtlineare Rand- und Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf lineare Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen 2-ter und 4-ter Ordnung und lineare Gleichungssysteme angewandt; im Zusammenhang mit Differenzenverfahren kann es zu einer vollständigen Einschließung der exakten Lösung benutzt werden. Zahlenbeispiele erläutern die praktische Anwendung.

J. Weissinger.

Mysovskich, I. P.: Über die Konvergenz der Newtonschen Methode für eine reelle Gleichung bei Bedingungen vom Cauchyschen Typus. Priklad. Mat. Mech. 16, 756–759 (1952) [Russisch].

Sei  $P(x)$  eine zweimal differenzierbare reelle Funktion, deren erste Ableitung dem Betrage nach in dem in Frage kommenden Intervall beschränkt ist. Ist  $x^*$  eine Wurzel der Gleichung  $P(x) = 0$ , hat der Anfangswert  $x_0$  für eine Approximation von  $x^*$  den Abstand nicht größer als  $r (> 0)$ , ist  $P(x_0) P'(x_0) > 0$  und gelten für alle  $x$  im Intervall (1)  $x_0 - (1 + \frac{1}{2}l)r \leq x \leq x_0$  die Ungleichungen  $|P'(x)|^{-1} \leq B$ ,  $|P''(x)| \leq K$ , wobei  $l = BKr \leq 2$ , so ist das mit  $x_0$  beginnende Newtonsche Iterationsverfahren  $x_{n+1} = x_n - P(x_n)/P'(x_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) konvergent, und  $x_n$  strebt gegen die einzige Wurzel  $x^*$  im Intervall (1). Dies Theorem wird benutzt, um eine Verschärfung eines Satzes von Ostrowski (dies. Zbl. 19, 273) zu beweisen, von der dann gezeigt wird, daß sie die bestmögliche darstellt.

H. Schwerdtfeger.

Hestenes, Magnus R. and Eduard Stiefel: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. J. Res. nat. Bur. Standards 49, 409—436 (1952).

Bekanntlich hat Enskog vorgeschlagen, die Lösung Fredholmscher Integralgleichungen  $(1 - \lambda K) y = f$  mit reellem und symmetrischem Kern in der Form  $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i$  zu berechnen, wobei  $1 - \lambda K$  positiv definit,  $(p_i, (1 - \lambda K) p_k) = \delta_{ik}$  und  $c_i = (f, p_i)$  ist. Unabhängig von Enskog wenden die Verf. die gleiche Methode auf ein System  $A x = k$  von  $n$  linearen Gleichungen mit  $n$  Unbekannten an. Die Matrix  $A$  wird als positiv definit vorausgesetzt, jedoch läßt sich das Vorgehen verallgemeinern, um stets anwendbar zu sein. Ausgehend von einer Näherungslösung  $x_0$  werden weitere Näherungsvektoren  $x_1, x_2, \dots, x_n$  berechnet, bei denen spätestens  $x_n = x$  ist. Diese Rechnung läuft parallel zur schrittweisen Entwicklung von Vektoren  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (unnormiert), die die Bedingungen  $(p_i, A p_k) = 0$  für  $i \neq k$  erfüllen. Dabei werden die Formeln  $r_i = k - A x_i$ ,  $p_1 = r_0$ ,  $x_{i+1} = x_i + a_{i+1} p_i$ ,  $a_{i+1} = |r_i|^2 / (p_i, A p_i)$  und  $r_{i+1} = r_i - a_{i+1} A p_{i+1}$  benutzt und insbesondere die Vektoren  $p_i$  nach der Formel  $p_{i+1} = r_i + p_i |r_i|^2 / |r_{i-1}|^2$  konstruiert. Das Verfahren läuft darauf hinaus, den Vektor  $x - x_0$  in der Enskog'schen Form  $x - x_0 = \sum_{i=1}^n p_i \frac{(r_0, p_i)}{(p_i, A p_i)}$  und die Vektoren  $x_k - x_0$  als Partialsummen hiervon (der Index  $i$  läuft dann nur bis  $k$ ) darzustellen. Als Vorteil des schrittweisen Vorgehens wird angegeben, daß Speicherkapazität bei programmgesteuerten Rechenmaschinen gespart und der Einfluß von Abrundungsfehlern vermindert wird. Weitere Ergebnisse der Arbeit betreffen: Gewisse Minimaleigenschaften der Ausdrücke  $(x - x_k, A(x - x_k))$ , Fehlerabschätzungen mit Hilfe der Residuen  $r_i$  und Rayleighscher Quotienten, die Fortpflanzung von Abrundungsfehlern, eine Stabilitätsbedingung, eine Endkorrektur, Verfeinerungen des obigen Algorithmus, Zusammenhänge mit dem Eliminationsverfahren von Gauß und Beziehungen zwischen orthogonalen Polynomen und den im Sinne  $(p_i, A p_k) = 0$  orthogonalen Vektoren. Der obige Algorithmus führt auch zur Berechnung von Eigenwerten. Numerische Beispiele beschließen die Arbeit.

H. Bückner.

Lopšić, A. M.: Ein Extreimalsatz für das Hyperellipsoid und seine Anwendung auf die Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 183—197 (1952) [Russisch].

Im Zusammenhang mit der Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit eines (weiter unten näher beschriebenen) Näherungsverfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $A x = a$ , wo  $A$  eine symmetrische positiv definite Matrix ist, ergab sich die Aufgabe, den größten Wert des Winkels  $\varphi$  zu bestimmen, den der Radiusvektor  $r$  des Ellipsoids  $r' A r = 1$  mit dem zugehörigen Normalenvektor  $A r$  bildet. Es ergibt sich  $(1) \sin \varphi_{\max} = (M - m)/(M + m)$ , wobei  $m$  und  $M$  den kleinsten und größten Eigenwert der Matrix  $A$  vorstellen. Dies wurde vom Verf. im April 1950 in einem Vortrag in der Rechenabteilung des Instituts für Feinmechanik und Annäherungsrechnungen bewiesen [vgl. auch Krasnoselskij und Krejn (dies. Zbl. 47, 362), § 3; Ann. d. Ref.]. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das folgende allgemeinere geometrische Problem behandelt: Den größten Wert des Winkels  $\varphi$  zu finden, der gebildet wird vom Radiusvektor  $r$  mit der von den Vektoren  $A r, \dots, A^k r$  aufgespannten Hyperebene. Resultat: Sei  $T_k(x)$  das  $k$ -te Tschebyscheffsche Polynom; dann ist  $(2) \sin \varphi_{\max} \leq (-1)^k T_k \left( \frac{m+M}{m-M} \right)$ .

Eine kurze Beschreibung des ziemlich komplizierten Beweises läßt sich nicht geben. — Anwendung bei der Methode der „besten Annäherung in vorgegebenen Ebenen“: Sei  $\pi$  die von den Vektoren  $p_1, \dots, p_k$  aufgespannte Ebene; man soll  $u = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_k p_k$  so bestimmen, daß  $|A u - a| < |A v - a|$ , wo  $v$  irgendein Vektor in  $\pi$  ist. Das führt in leicht ersichtlicher Weise auf ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Unbekannten  $\alpha_i$ . Sodann wird  $y = x - u$  als neue Unbekannte eingeführt, so daß das System  $A y = b (= a - A u)$  zu lösen ist. Auf dieses System wird dieselbe Methode angewandt mit der durch die Vektoren  $A p_i$  aufgespannten Ebene  $\pi'$ . Es ist dann  $|b| = |a| \sin \varphi$ , wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $a$  und der Ebene  $\pi'$  ist. Auf dieser Basis läßt sich die Abschätzung (2) [oder (1)] benutzen, um in einer Folge von Ebenen  $\pi_i$  die Lösung des Systems  $A x = a$  zu approximieren und die Güte der Approximation zu beurteilen. Dabei wählt man als  $\pi_i$  die von den Vektoren  $a_i, A a_i, A^2 a_i, \dots, A^{k_i-1} a_i$  mit  $a_i = a_{i-1} - A u_{i-1}$ ,  $a_1 = a$  aufgespannte Ebene.

H. Schwerdtfeger.

Lavut, A. P.: Die Lage der Eigenwerte von Seidelschen Transformationen für Systeme von normalen Gleichungen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 197—202 (1952) [Russisch].

Für die Konvergenz der Seidelschen Methode zur Lösung eines normalen Systems linearer Gleichungen  $A x + b = 0$ , dessen Matrix  $A = (a_{ij})$  symmetrisch positiv definit ist, müssen die Wurzeln der beim Lösungsprozeß zu iterierenden

Matrix  $A_s$ , die aus der Bestimmungsgleichung der Methode

$$(1) \quad \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

zu gewinnen ist, im Einheitskreis liegen. (Die übliche Bezeichnung  $a_{ii} + 1$  ist hier durch  $a_{ii}$  ersetzt.) Es handelt sich um die Frage, ob die Wurzeln der „Seidelschen Matrix“  $A_s$  auf einen bestimmten Teil des Einheitskreises beschränkt sind, und es stellt sich heraus, daß dies nicht der Fall ist. — Zwecks genauerer Analyse der Seidelschen Matrix wird zunächst bemerkt, daß die  $k$ -te Abweichung  $z^{(k)} = x^{(k)} - x = A_s z^{(k-1)}$  die Lösung des homogenen Systems  $Az = 0$  approximiert. Eine Betrachtung der Transformation  $y = A_s x$  zeigt, daß die Spalte  $z^{(i)} = (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)'$  der  $i$ -ten Gleichung des Systems  $Az = 0$ , d. h.  $(2)_i$

$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = 0$  genügt, so daß  $A_s$  sich als Produkt von  $n$  aufeinanderfolgenden Projektionen [von  $z^{(i-1)}$  auf die Hyperebene  $(2)_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) in der Richtung der  $i$ -ten Koordinatenachse] erweist:  $A_s = P_n P_{n-1} \dots P_1$ , was auch charakteristisch für eine Seidelsche Matrix  $A_s$  ist. Es wird dann bewiesen, daß für jedes  $\lambda_0$  im Einheitskreis ein  $n$  und eine  $n$ -reihige reelle Seidelsche Matrix  $A_s$  existiert, deren einer Eigenwert sich beliebig wenig von  $\lambda_0$  unterscheidet. H. Schwerdtfeger.

**Carafa, Mario:** Espressione e calcolo di un determinante di ordine  $n$  con un prodotto funzionale. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 196—216 (1952).

L'A. applicando alcuni risultati di un altro suo lavoro (questo Zb. 41, 442) in cui introduce un prodotto funzionale di più funzioni (nel campo analitico), dimostra ( $1^0$  metodo) che il valore di un determinante  $\Delta$  di ordine  $n$  può esprimersi con un prodotto funzionale del tipo anzidetto e precisamente trova che:  $\Delta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{x} D_n \left( \frac{1}{x} \right) P_1(x) \dots P_n(x) dx$ , con  $P_1(x), \dots$

$P_n(x)$  polinomi della variabile complessa  $x$ , i cui coefficienti dipendono dagli elementi delle varie colonne del determinante stesso, mentre  $D_n(x)$  è un polinomio che dipende soltanto dall'ordine del determinante, la curva d'integrazione  $C$  può essere una qualsiasi circonferenza con centro in  $x = 0$ . Dimostra poi che il procedimento si può semplificare ( $2^0$  metodo), portando l'integrazione direttamente nel campo reale (per un determinante ad elementi tutti reali) ed

eliminando la funzione  $D_n$ . Conclude che  $\Delta$  può calcolarsi con la formula:  $\Delta = k \int_0^{2\pi} \bar{P}_1(\theta) \dots$

$P_n(\theta) d\theta$ , dove  $k$  è una costante ben definita e  $P_1(\theta), \dots, \bar{P}_n(\theta)$  sono polinomi trigonometrici, che si esprimono facilmente mediante gli elementi del determinante. Per il calcolo numerico è necessario eseguire l'integrazione con uno dei metodi di approssimazione, dato che per  $n$  grande il grado dei polinomi  $P_n(\theta)$  non permette di sviluppare praticamente il prodotto  $P_1(\theta), \dots, P_n(\theta)$ . L'A. ritiene che il calcolo numerico di un determinante secondo questo  $2^0$  metodo, si presti ad essere facilmente eseguito mediante le moderne macchine calcolatrici automatiche (oppure, con la preventiva tabellazione di alcuni polinomi trigonometrici che dipendono soltanto dall'ordine del determinante). M. Platone.

**Blanc, Charles:** Étude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché. Commentarii math. Helvetici 26, 225—241 (1952).

Ein Versuch, die Fehlergrenzen bei linearen Näherungsmethoden nicht durch Aufstellung von gekünstelten Regularitätsbedingungen bezüglich der in Betracht kommenden Funktionen zu bestimmen, sondern als Varianzen bzw. Kovarianzen von Zufallsfunktionen zu betrachten. Die entsprechenden formalen Rechnungen werden in diesem Sinne für die Interpolation, die numerische Quadratur, die lineare Funktionenannäherung und die numerische Integration von Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen durchgeführt. Dieser neue Gesichtspunkt scheint insbesondere bei der vergleichenden Bewertung von verschiedenen Näherungsmethoden natürlich und fruchtbar zu sein. Welche Gründe für die gelegentliche Beschränkung auf stationäre Zufallsfunktionen (zweiter Ordnung)  $\xi(t)$ , insbesondere auf solche mit der Kovarianzfunktion  $A \frac{\sin a(t-t')}{a(t-t')}$  vorliegen, ist aber aus der vorläufigen Mitteilung nicht ersichtlich. T. Szentmártony.



**Mikeladze, Š. E.:** Näherungsformeln für mehrfache Integrale. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 193—200 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt zunächst die allgemeine Kubaturformel

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{\nu=0}^r A_{\nu} \cdot f(a_{\nu}, b_{\nu}) + R_k;$$

darin sind  $A_{\nu}$  die Koeffizienten (Gewichte) der Kubaturformel,  $a_{\nu}$  und  $b_{\nu}$  die Koordinaten der zu wählenden Funktionswerte  $M_{\nu}$  und  $R_k$  das Restglied. — Wenn man einmal in den Werten  $f(a_{\nu}, b_{\nu})$  auf der rechten Seite, das andere Mal in dem Integranden auf der linken Seite nach Maclaurin setzt:

$$f(x, y) = a_{00} + \sum_{\alpha+\beta=1}^n a_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} + R_M,$$

und die so erhaltenen zwei Gleichungen gliedweise voneinander subtrahiert, so erhält man schließlich

$$0 = a_{00} \left\{ \sum_{\nu=0}^r A_{\nu} - J_{00} \right\} + \sum_{\alpha+\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \left\{ \sum_{\nu=0}^r A_{\nu} a_{\nu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta} - J_{\alpha\beta} \right\} + R,$$

wobei abkürzend bedeutet  $J_{\alpha\beta} = \iint_D x^{\alpha} y^{\beta} dx dy$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ). Stimmt man

die  $A_{\nu}$  und die Funktionswerte  $M_{\nu}(a_{\nu}, b_{\nu})$  so aufeinander ab, daß  $\sum_{\nu=0}^r A_{\nu} a_{\nu}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta} = J_{\alpha\beta}$

wird, so erhält man  $R = 0$ ; es gilt danach also die Kubaturformel (ohne Restglied) exakt für eine Potenzreihe bis zum Grade  $(n+1)$ . — Im einzelnen leitet Verf. dann die Kubaturformel für den Fall ab, daß das Integrationsgebiet  $D$  ein Quadrat ist. Für die 5 Punkte  $(0, 0)$ ;  $(2, 0)$ ;  $(0, 2)$ ;  $(-2, 0)$ ;  $(0, -2)$  erhält er:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy = \frac{1}{6} [20 f(0, 0) + f(2, 0) + f(0, 2) + f(-2, 0) + f(0, -2)].$$

Weiterhin behandelt er den Fall, daß das Integrationsgebiet  $D$  der Einheitskreis ist. Für die 9 Punkte  $(0, 0)$ ;  $(1, 0)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(-1, 0)$ ;  $(0, -1)$ ;  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ;  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ;  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ;  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  erhält er:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{6} \{ f(0, 0) + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \\ + \tfrac{1}{4} [f(1, 0) + f(0, 1) + f(-1, 0) + f(0, -1)] \}.$$

Sie ist genau für Polynome bis zum 5. Grade. — Durch Übergang auf Polarkoordinaten erhält man eine von Ljusternik angegebene Kubaturformel. Verf. weist noch kurz darauf hin, daß sich die Überlegungen auch auf mehrfache Integrale (z. B. Volumenintegrale) erweitern lassen. K. Borkmann.

**Brodskij, M. L.:** Wahrscheinlichkeitstheoretische Abschätzungen für den Fehler bei der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer variierten Matrix. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 205—214 (1952) [Russisch].

$u$  sei ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  der (endlichen) Matrix  $||a_{ik}||$ . Durch Variation erhält man  $u + \delta u$ ,  $\lambda + \delta \lambda$ ,  $||a_{ik} + \delta a_{ik}||$ . Unter Verwendung der adjungierten Matrix kann man  $|\delta \lambda|$  in Abhängigkeit von  $\max_{i,k} |\delta a_{ik}|$  abschätzen. Häufig

kompensiert sich die Wirkung der Änderung der einzelnen  $a_{ik}$ . Man erhält daher bessere Schranken, wenn man die wahrscheinliche Änderung von  $\lambda$  ins Auge faßt, und dabei führen einfache Rechnungen zum Ziel. Entsprechendes gilt für  $\delta u$ . Im Hinblick auf Sturm-Liouville-Aufgaben betrachtet Verf. noch den Fall, daß die Elemente  $a_{ik}$  nicht alle unabhängig sind. K. Zeller.

**Hu, Hai-Chang:** On the approximate solutions of boundary value problems at a point. Sci. Record 5, 59—68 und chines. Zusammenfassg. 59 (1952).

Verf. skizziert knapp ein Näherungsverfahren zur Lösung von Randwertauf-

gaben bei partiellen Differentialgleichungen, das in Zusammenhang mit Arbeiten von W. Prager und J. L. Synge steht (dies. Zbl. 29, 235, 281). Als Beispiel berechnet er die Durchbiegung in der Mitte einer gleichmäßig belasteten quadratischen Platte, die am Rand eingespannt ist. *A. Weigand.*

**Hyman, Morton A.: Non-iterative numerical solution of boundary-value problems.** Appl. sci. Research, B 2, 325—351 (1952).

Ordnet man dem ersten Randwertproblem für ein Rechteck:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, y) = u(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = F(x), \quad u(x, K) = G(x)$$

durch Einführung eines Rechteck-Gitters mit den Maschenlängen  $\Delta x, \Delta y$  in üblicher Weise die Differenzengleichung

$$(1) \quad u_{i,j,k+1} = (2u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}) - r^2(u_{i-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,k}), \quad r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

mit den Randbedingungen  $u_{0,k} = u_{N+1,k} = 0, u_{i,0} = F_i, u_{i,M+1} = G_i$  zu, so ergibt sich durch einen Separationsansatz die Lösung

$$(2) \quad u_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N \sin \frac{j n \pi}{N+1} \left[ P_n \lambda_n^k + Q_n \lambda_n^{-k} \right],$$

$$\lambda_n = \left( 1 + 2r^2 \sin \frac{n \pi}{2(N+1)} \right) + \sqrt{\left( 1 + 2r^2 \sin \frac{n \pi}{2(N+1)} \right)^2 - 1},$$

wobei die  $P_n, Q_n$  sich mittels der finiten Fourierkoeffizienten

$$(3) \quad A_n = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N F_j \sin \frac{j n \pi}{N+1}, \quad B_n = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N G_j \sin \frac{j n \pi}{N+1}$$

aus den Randbedingungen  $P_n + Q_n = A_n, P_n \lambda_n^{M+1} + Q_n \lambda_n^{-(M+1)} = B_n$  sofort ergeben. Durch Superposition mit der entsprechenden Lösung für verschwindende Randwerte auf den beiden andern Rechteckseiten ergibt sich die allgemeine Lösung des finiten Randwertproblems. Da man entsprechend eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung angeben kann, ist dann auch das Poissonsche Problem explizit gelöst. — Zweckmäßig benutzt man (2) nur, um  $u_{i,j,k}$  auf 2 benachbarten Gittergeraden  $k$  und  $k-1$  zu berechnen und von da schrittweise nach (1) das ganze Gitter zu erfassen. Die Geraden wählt man i. a. am besten etwa in der Mitte ( $k \approx M/2$ ) des Rechtecks und schaltet nach längerer Rechnung evtl. wieder ein Geradenpaar nach (2) ein. — Ist die Randkurve beliebig, so schließe man sie in ein Rechteck ein, setze für dieses (2) an und bestimme  $P_n, Q_n$  so, daß  $u$  in  $2N$  Randpunkten die vorgegebenen Werte hat, wobei in (2)  $k$  durch  $y/\Delta y$  und  $j/(N+1)$  durch  $x/L$  zu ersetzen ist. — An Zahlenbeispielen werden insbesondere auch die Fehler- und Stabilitätseigenschaften des Verfahrens erläutert; durch Herausstellung der tragenden Grundgedanken werden allgemeinere Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt. *J. Weissinger.*

• **Johnson, L. H.: Nomography and empirical equations.** New York: John Wiley and Sons, 1952. IX, 150 p. \$ 3,75.

Verf. behandelt im 1. Teil Funktionsleitern und Fluchtliniennomogramme, und zwar Nomogramme mit parallelen Leitern, den Z-Typ, Nomogramme mit zwei parallelen oder zwei aufeinander senkrecht stehenden Ablesegeraden, mit drei geraden durch einen Punkt gehenden Leitern, mit einer Kurvenleiter und mit Zapfenlinien. An ausführlichen Beispielen aus der Technik wird die Praxis der Konstruktion erläutert. — Im 2. Teil werden graphische Methoden angegeben, um aus einer Beobachtungsreihe für einen vermuteten funktionalen Zusammenhang eine Formel angeben zu können. Für eine Reihe von Gleichungstypen, wie Potenz- und Exponentialfunktionen, werden nach gewissen Umformungen und evtl. Ermittlung von Konstanten aus wenigen Beobachtungswerten alle Werte in einem solchen Funktionspapier aufgetragen, daß eine Gerade entstehen muß, wenn diese Funktionswerte die vermutete Gleichung erfüllen. Auf die Ausgleichung wird kurz eingegangen. — Jedem Abschnitt ist eine Reihe von Aufgaben ohne Lösungen (insges. 125) beigegeben, die sich mit den behandelten Methoden lösen lassen. Als Beilage sind für die lineare, die Wurzel- und die logarithmische Skala Strahlentafeln beigelegt zur bequemen Ablesung dieser Skalen für verschiedene Maßstäbe. *R. Ludwig.*

**Džems-Levi, G. E.:** Projektive Transformationen von Nomogrammen. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 4 (50), 147—151 (1952) [Russisch].

Verf. gibt eine elementare Herleitung der von M. V. Pentkovskij [Učenyje Zapiski Moskov. gosud. Univ. 28, 115—140 (1939)] angegebenen Netze für die projektive Transformation von Nomogrammen, die dieser durch Anwendung der Zerlegung der Bewegung der nichteuklidischen Ebene in invariante Untergruppen erhalten hatte. An dem Masseauschen Nomogramm für  $u + v = w$  wird das Verfahren erläutert.

*R. Ludwig.*

**Wünsche, Günther:** Bemerkungen über nomographische Verfahren zur rationalen Sequentialtest-Planung. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 4, 268—276 (1952).

Verf. setzt die Sequential-Test-Methodik als bekannt voraus. Sein vornehmstes Ziel ist, die funktionalen Beziehungen zwischen den zur Aufstellung eines optimalen Sequential-Test-Planes notwendigen Kurven der „Operationscharakteristik“ ( $OC$ -Kurve), der „Kurve des durchschnittlichen Stichprobenumfangs“ ( $ASN$ -Kurve) und den zu testenden Mittelwerten nomographisch anschaulich herauszuarbeiten. Das gelingt ihm mittels „Doppelstrahlentafeln“, die zugleich eine rasche Auffindung der gesuchten Zahlenwerte ermöglichen. Der Anschaulichkeit halber hat er die Diskussion auf den Sonderfall der Testung zweier, über den Mittelwert einer Poisson-Verteilung getroffenen Alternativ-Hypothesen abgestellt, jedoch gelten entsprechende Entwicklungen auch für die rationelle Planung sonstiger Sequential-Testverfahren und Vertafelung der Zusammenhänge.

*P. Lorenz.*

● **Panov, D. Ju.:** Der Rechenstab. 8. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 128 S. R. 2,75 [Russisch].

Die Broschüre enthält eine eingehende, für einen breiten Leserkreis gedachte Anleitung zur Handhabung des Rechenstabes. Sie gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil (50 S.) werden die einfachsten Rechenoperationen beschrieben, die sich mit dem Rechenstab lösen lassen: Multiplikation, Division, Proportionsrechnungen, Quadrate und Kuben nebst den entsprechenden Wurzeln. Alles Gebrachte wird durch zahlreiche Beispiele erläutert; außerdem sind Aufgaben mit Lösungen beigefügt. Im zweiten Teil (78 S.) werden weitere Rechenoperationen behandelt: Reziprokeilung (falls eine solche am Stabe fehlt, kann man sich durch Umdrehen der Zunge helfen), Logarithmen, trigonometrische Funktionen sowie Lösungen von quadratischen bzw. kubischen Gleichungen über ihre Normalform  $x + q/x = r$  bzw.  $x^2 + q/x = r$ .

*K. Borkmann.*

**Vaughan, D. C.:** Relaxation methods. A three-dimensional mechanical analogy. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 462—465 (1952).

Verwendet man bei der angenäherten Lösung der Differenzengleichungen dreidimensionaler Randwertaufgaben für die Poissonsche Gleichung Relaxationsmethoden, so entstehen Gleichungen derselben Form wie für die kleinen Auslenkungen der Knotenpunkte eines geeignet belasteten und gespannten gewichtslosen elastischen dreidimensionalen Netzes, wobei die Auslenkungen in einer willkürlichen Richtung gewählt werden können.

*L. Collatz.*

**Persico, E.:** A new resistor network for the integration of Laplace's equation. *Nuovo Cimento, Ser. IX* 9, 74—89 (1952).

Zur Lösung von Randwertaufgaben der Laplaceschen Gleichung  $\Delta u = 0$  läßt sich ein zweidimensionales elektrisches Netzwerk aus einem orthogonalen Netz von gleichen Ohmschen Widerständen bauen. Dreidimensionale Probleme lassen sich ebenfalls lösen, falls sie zylindersymmetrisch sind; in diesem Fall wird das Netzwerk für eine Schnittebene, die durch die Achse geht, gebaut, und die Widerstände sind voneinander verschieden. Verf. zeigt, daß in beiden Fällen die Genauigkeit der Lösung durch Einfügen von Widerständen entlang den Diagonalen verbessert wird; die nötigen Werte sind numerisch berechnet. — Durch Bezugnahme auf die einschlägige Literatur (z. B. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen; dies. Zbl. 44, 331) hätten umfangreiche Herleitungen erspart werden können.

*Amb. Speiser.*



● **Staff of the Computation Laboratory: Description of a magnetic drum calculator.** (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University. Vol. XXV.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1952. 318 p. \$ 8,—.

Der vorliegende Band gibt eine eingehende Beschreibung des allgemeinen Aufbaues und der Einrichtung der unter der Leitung von Howard H. Aiken gebauten programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschinen Mark III, die in den Jahren 1948/50 gebaut, im März 1950 fertig und ein Jahr später in Dahlgren (Virginia) in Betrieb genommen wurden. — Kapitel I, in dem die Beschreibung der mit 16-ziffrigen Dezimalzahlen in Serie arbeitenden Maschine, die 2000 Relais und 4500 Röhren hat, gegeben wird, zusammen mit dem Kap. VIII, das die Einzelheiten für die Programmierung behandelt und dem Kapitel X, das Vorbereitung und Lösung von vier typischen Problemen enthält, geben das, was für den Rechner wissenswert ist. In den restlichen Kapiteln werden technische Einzelheiten mitgeteilt, die für diejenigen, die mit der Instandhaltung und Betreuung der Maschine zu tun haben, von Interesse sind. Kap. II bringt Stromkreise und Schaltungen im einzelnen. Die Darstellung ist hier ebenso wie im folgenden Kapitel knapp und setzt Vertrautheit mit der Elektronik voraus. Kap. III gibt die Beschreibung der verwendeten Magnettrommelspeicher. Die Maschine hat 200 Speicherzellen mit kurzer (4,3 ms) und 4000 mit langer (50 ms) Suchzeit. Im nächsten Kapitel werden die Recheneinheiten, also die Additions- und Multiplikationseinrichtungen und die zugehörigen Stromkreise beschrieben. — Die Division erfolgt durch Iteration. — Ferner wird auf die Übertragungsleitungen, die als Zwischenglied zwischen Recheneinheiten und dem Speicherspeichersystem dienen, eingegangen. Im Kap. V wird die theoretische Grundlage der automatischen Berechnung der elementaren Funktionen  $x^{-1}$ ,  $x^{1/2}$ ,  $\lg x$ ,  $10^x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan^{-1} x$  diskutiert. Das folgende Kapitel behandelt dann alles, was mit Eingabe und Ausgabe zusammenhängt. Das nächste beschäftigt sich mit den Stromkreisen, die für die Befehlsausführung nötig sind, wie etwa zum Ablesen und Ausführen einer Folge von Instruktionen, die vorher in der Befehlsspeichertrommel aufgezeichnet sind, unbedingten oder bedingten Sprungbefehlen, Änderungen der Adressen der Befehle im  $i$ -Register (die Maschine arbeitet mit 1 reiadreßbefehlen), Stoppen der Maschine usw. Schließlich informiert Kap. IX über die Arbeitsweise der Maschine im einzelnen.

*Fr.-A. Willers.*

**Poorte, Glen E.: The operation and logic of the MARK III electronic calculator in view of operating experience.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 50—65 (1952).

Verf. gibt eine kurze logische Beschreibung der elektronischen Rechenmaschine Mark III, die 1950 an der Harvard University fertiggestellt wurde. Sie besitzt eine Multiplikationszeit von 12 Millisekunden und speichert in magnetischen Trommeln 4400 Zahlen und 4000 Befehle. Anschließend werden ausführliche Angaben über Betriebssicherheit und Fehlerquellen gemacht, welche in Form von Verbesserungs-vorschlägen ausgewertet sind.

*Ambrosius Speiser.*

**Meagher, R. E. and J. P. Nash: The ORDVAC.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 37—43 (1952).

Verff. geben eine ziemlich ausführliche Beschreibung der Rechenmaschine „ORDVAC“, welche an der University of Illinois gebaut wurde und welche mit 1 Millisekunde Multiplikationszeit eine der schnellsten Maschinen ist. Das Speichersystem verwendet Kathodenstrahlröhren in der Schaltung von F. C. Williams. Von den einzelnen Grundelementen im Rechenwerk sind Schaltchemata gegeben.

*Ambrosius Speiser.*

**Mullaney, F. C.: Design features of the ERA 1101 computer.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 43—49 (1952).

Die elektronische Rechenmaschine ERA 1101 wird kommerziell hergestellt. Sie besitzt 16000 Speicherzellen auf einer magnetischen Trommel und eignet sich demgemäß für die Behandlung größerer mathematischer Probleme. Der Artikel gibt eine Beschreibung dieser Maschine mit Bildern, sowie einige Angaben über die Betriebssicherheit.

*Ambrosius Speiser.*

**Eckert jr., J. Presper, James R. Weiner, H. Frazer Welsh and Herbert F. Mitchell: The UNIVAC system.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951) 6—16 (1952).

Das UNIVAC-System ist eine kommerziell hergestellte elektronische Rechen-

maschine größten Ausmaßes; sie ist bestimmt für die Verwendung in einem großen Recheninstitut oder für statistische Arbeiten. Der Artikel gibt eine übersichtliche Beschreibung der verschiedenen Teile mit Blockschemata; anschließend folgen reichliche zahlenmäßige Angaben über Betriebssicherheit und Fehlerhäufigkeit.

*Ambrosius Speiser.*

**McPherson, J. L. and S. N. Alexander: Performance of the census UNIVAC system.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 16—22 (1952).

Verff. beschreiben die Betriebserfahrungen mit einer UNIVAC-Maschine, die in einem statistischen Amt im Betrieb steht. Besonderes Gewicht ist auf die Frage gelegt, wie groß die Fehlerhäufigkeit sein darf, damit ein bestimmtes Problem mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit noch fehlerfrei gerechnet werden kann. Für diesen Fall ist eine interessante Abnahmeprüfung beschrieben.

*Ambrosius Speiser.*

**Hoberg, G. G.: The Burroughs Laboratory Computer.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 22—29 (1952).

Verf. gibt die Beschreibung einer interessanten elektronischen Rechenmaschine, welche aus etwa 800 normalisierten, kommerziell hergestellten Einheiten durch steckbare Kabel laboratoriumsmäßig zusammengestellt ist. Das Gerät dient in erster Linie für Versuche und für die Ausbildung von technischem Personal; als Speicher verwendet es eine magnetische Trommel.

*Ambrosius Speiser.*

**Sheldon, John W. and Liston Tatum: The IBM card-programmed electronic calculator.** Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 30—36 (1952).

Der technische Aufbau der unter dem Namen CPC bekannt gewordenen Rechenmaschine der Firma IBM (vgl. dies. Zbl. 45, 67) wird kurz beschrieben. Sie besteht aus einem elektronischen Rechenwerk (Röhrenschaltungen), aus der elektromechanischen Rechenmaschine 402—417 und aus weiteren Hilfseinrichtungen. Der elektronische Rechner ist mit einer Schalttafel versehen, die die Stöpselung von 60 Befehlen und deren automatischer Wiederholung in einer gegebenen Anzahl von Schritten ermöglicht. Im allgemeinen gehören diese Befehle zu verschiedenen Unterprogrammen, auf die in einem Hauptprogramm unter einer Kennnummer Bezug genommen wird. Das Hauptprogramm befindet sich auf Lochkarten, die in der Einheit 402—417 abgetastet werden. Auch numerische Daten lassen sich mit Hilfe der Lochkarten in das elektronische Rechenwerk einführen. Die durch Lochkartenbefehle erfaßbaren Adressen befinden sich in beschränkter Anzahl in der Einheit 402—417 und in den Hilfseinrichtungen. — Einige Anwendungsmöglichkeiten des CPC werden aufgezählt.

*H. Bückner.*

● **Couffignal, Louis: Les machines à penser.** (Collection l'homme et la machine No. 3.) Paris: Les Éditions de Minuit 1952. 153 p.

Der erste Teil des Buches gibt einen populären Überblick über das Gebiet der Rechenhilfsmittel. Die Eigenschaften der Hand-Rechenmaschinen werden im Rahmen einer historischen Übersicht skizziert, anschließend sind die wichtigsten Eigenschaften der Lochkartenmaschinen beschrieben, und es werden einige Angaben über programmgesteuerte Rechenmaschinen gemacht. Es folgt ein Kapitel über Integrieranlagen mit einigen Schaltungsbeispielen. In einem zweiten Teil sind verschiedene Betrachtungen angestellt, die zum Teil in das Gebiet der Kybernetik eingreifen. Zuerst wird ein Vergleich zwischen Rechenmaschinen und Nervensystem angestellt, wobei das Letztere notwendigerweise nur in seinen allereinfachsten Funktionen betrachtet werden kann; der nächste Abschnitt gibt eine ausgedehnte Einführung in die einfachsten Regeln des Aussagenkalküls der Logistik. Zum Schluß wird eine Liste von Fragen zusammengestellt, die im Zuge der Erforschung der Steuerungs- und Erinnerungsvorgänge im Nervensystem der Abklärung harren. — Das Buch ist für den Bedarf des breiten Publikums geschrieben und bringt für den Fachmann über die bereits bestehende Literatur hinaus nichts Neues. *Amb. Speiser.*

● **Andreev, P. P.: Mathematische Tafeln.** Moskau: Statistischer Staatsverlag 1952. 471 S. R. 7,75 [Russisch].

Die Sammlung enthält in 20 Tafeln die Werte von Funktionen, die bei mathematischen numerischen Rechnungen häufig Anwendung finden. Die Zahlenwerte sind mit einer wechseln-

den, den praktischen Bedürfnissen angepaßten Genauigkeit angegeben, die irrationalen in den wichtigeren Tabellen auf 4 bis 9 Dezimalstellen. Die Sammlung besteht aus zwei Hauptteilen. Jedem von ihnen geht eine Anleitung zur Benützung seiner Tafeln voraus. — Der erste Teil enthält die Quadrate und Kuben der Zahlen von 1 bis 10000, die Quadrat- und Kubikwurzeln dieser Zahlen und die Reziproken ihrer Quadratwurzeln. Außerdem sind für die Zahlen von 1 bis 999 die natürlichen Logarithmen und für die Zahlen von 1000 bis 10000 die Werte von  $\sqrt{10}n$  angegeben. Eine Ergänzung zu diesem Teil enthält einige besondere hierher gehörige Zahlenwerte auf 10 Dezimalen und die natürlichen Logarithmen der ersten Potenzen von 10 auf 7 Dezimalstellen. — Den Hauptinhalt des zweiten Teiles bildet eine Tafel der Reziproken der Zahlen von 1 bis 9999. Die dann folgenden Tafeln enthalten die Reziproken der Fakultäten, die ersten 10 Potenzen der Zahlen 2, 3 und 5, die Vielfachen von  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  und ihrer Reziproken, die 4. bis 10. Potenzen der Zahlen von 1 bis 99, die Potenzsummen der natürlichen Zahlen, die neunstelligen dekadischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 999, eine Tafel der Vielfachen von  $\pi$  und  $1/\pi$  und anderer wichtigen Verbindungswerte von  $\pi$ , die Fakultäten und ihre achtestelligen dekadischen Logarithmen, die Werte von  $e^x$  und  $e^{-x}$  und die Werte der Binomialkoeffizienten. Eine weitere Gruppe von Tafeln bezieht sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung: Es sind das die Werte des Laplaceschen (Gaußschen) Fehlerintegrals

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \text{ die Werte der Gaußschen Fehlerverteilungsfunktion } y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

und die Werte von  $S(t)$  (zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei kleinen Anzahlen von Beobachtungen) und von  $1 - r^2$  (zur Korrelationsrechnung). Den Schluß des zweiten Teiles bildet eine Gruppe von Tafeln zur Zinseszinsrechnung, nämlich je eine Tafel für Barwert- und Tilgungsberechnungen. — Ein Anhang zur Tafelsammlung bringt eine Zusammenstellung von Formeln, die den angeführten Tafeln zugrunde liegen. *W. Schmid.*

• **Staff of the Computation Laboratory: Tables of the error function and of its first twenty derivatives.** (Ann. Computation Laboratory Harvard Univ., vol. 23.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1952. XXVIII, 276 p. \$ 8,00.

Tabellen der Funktionswerte der Funktion  $\Phi^{(-1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  und ihrer 20 ersten Ableitungen. In der Tab. I sind  $\Phi^{(-1)}(x)$  und die ersten 5 Ableitungen für  $0 \leq x \leq 6,468$  tabelliert, in der Tab. II die Abl.  $\Phi^{(5)}(x)$  bis  $\Phi^{(10)}(x)$  für  $0 \leq x \leq 8,236$  mit den Intervallen 0,004. In der Tab. III befinden sich die Werte von  $\Phi^{(11)}(x)$  bis  $\Phi^{(15)}(x)$  für  $0 \leq x \leq 9,610$ , in der Tab. IV  $\Phi^{(16)}(x)$  bis  $\Phi^{(20)}(x)$  für  $0 \leq x \leq 10,928$  für Intervalle von 0,002. Die Werte sind auf 6 Stellen angegeben. In einer Einleitung sind die wichtigsten Formeln für  $\Phi^{(-1)}(x)$  und ihre Ableitungen im Zusammenhang mit den Hermiteschen Polynomen angegeben, dazu eine Übersicht über die wichtigsten Anwendungen dieser Funktionen in der Mathematik, Physik und Technik und schließlich eine Tabelle ihrer Nullstellen. *W. Saxer.*

**Godwin, H. J.: A method for the evaluation of**

$$\int_0^\infty x^m \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) dt \right)^n dx.$$

Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 109—115 (1952).

Für das im Titel genannte Integral  $I_{m,n}$ , das im Zusammenhang mit der Fehlerkurve auftritt, wird die Reihendarstellung

$$I_{m,n} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{m,v} \frac{n! (m+2v)!}{(n+m+2v+1)!} \text{ mit } \gamma_{m,v} = \frac{P(m, m+2v, 0)}{(m+2v)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(m+2v+1)/2}$$

hergeleitet, wobei die  $P(m, r, x)$  Polynome in  $x$  darstellen, die durch  $P(m, 0, x) = x^m$ ,  $P(m, r, x) = rx P(m, r-1, x) + \frac{d}{dx} P(m, r-1, x)$  definiert sind. Für die Koeffizienten  $\gamma_{m,v}$  wird unter Verwendung der Resultate von H. G. Eggleston [Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 476—492 (1951)] über die Entwicklungskoeffizienten analytischer Funktionen mit algebraisch-logarithmischen Singularitäten die asymptotische Darstellung  $\gamma_{m,v} \sim 2^{(m+1)/2} \{\log(m+2v)\}^{(m-1)/2}$  gewonnen. Die praktische Berechnung des Integrals nach dieser Methode gestaltet sich um so gün-



stiger, je größer  $n$  ist. Für kleine Werte von  $n$  wird noch eine zweckmäßige Modifikation angegeben. — Die Arbeit enthält 9- bis 10-stellige Tafeln von  $I_{m,n}$  für  $m = 0, 1, 2$  und  $n = 1, 2, \dots, 20$ , sowie 9- bis 15-stellige Tafeln der Koeffizienten  $\gamma_{0,v}$  ( $v = 0, 1, \dots, 20$ ) und  $\gamma_{1,v}, \gamma_{2,v}$  ( $v = 0, 1, \dots, 10$ ). F. Lösch.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Kawada, Yukiyo:** On the fundamental notions of the probability theory. Math. Japonicae 2, 103—116 (1952).

Eine Variante der Kolmogorovschen Theorie mit näherer Beleuchtung einiger, von der letzteren nur skizzierten Fragen. Sie geht von der Booleschen Algebra der wahrscheinlichen Ereignisse  $E_a$  aus mit einer — zunächst endlich additiven — Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion über dieser Algebra. Die eindimensionale Zufallsveränderliche  $X$  wird dann als eine naheliegende Familie der  $E_a$  aufgefaßt. Den Anschluß an die Kolmogorovsche Theorie bildet schließlich eine „Darstellung“ der Familie  $X = \{X_\lambda\}$  von Zufallsveränderlichen durch ein Wahrscheinlichkeitsfeld mit einem bereits abzählbar additiven Wahrscheinlichkeitsmaß; d. h. eine Zuordnung von über diesem Feld meßbaren Funktionen zu den Veränderlichen der Familie mit gewohnter Festsetzung der Verbindungsverteilung einer endlichen Anzahl dieser Veränderlichen. Nach Definition der elementaren Operationen mit diesen Veränderlichen wird die Invarianz dieser Definitionen gegenüber der gewählten Darstellung gezeigt. Die Methode schmiegt sich an die Slutskysche Definition der Zufallsfunktionen an. T. Szentmártony.

**Chinčín, A. Ja.:** Über Klassen äquivalenter Ereignisse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 713—714 (1952) [Russisch].

Verf. bemerkt, daß jede Klasse äquivalenter Ereignisse als bedingtes Bernoullisches Schema interpretiert werden kann [d. h.: es gibt eine Menge von Hypothesen,  $X = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), so daß, durch dieselben bedingt, die Ereignisse voneinander unabhängig und gleichwahrscheinlich ( $p = x$ ) sind]. — Diese Bemerkung ist jedoch nicht neu [siehe z. B. die vom Verf. zitierte Abhandlung des Ref., Atti Accad. naz. Lincei, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 4, 86 (1930)]. B. de Finetti.

**Morlat, Georges:** Sur une généralisation de la loi de Poisson. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 933—935 (1952).

Stellen sich Ereignisse zufällig nach Ablauf solcher Zeitintervalle ein, deren Länge eine  $\chi^2$ -Verteilung mit der Dichte  $c e^{-u} u^{\gamma-1}$  besitzt, dann ist nach Verf. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von  $n$  Ereignissen während der Zeit  $T$  gleich

$$\frac{1}{\Gamma(m\gamma)} \int_0^T e^{-y} y^{m\gamma-1} \left\{ 1 - \frac{y^\gamma \Gamma(m\gamma)}{\Gamma[(m+1)\gamma]} \right\} dy.$$
 Bei ganzem  $\gamma$  reduziert sich dies auf

$\sum T^n e^{-T} / n!$  von  $n = m\gamma$  bis  $(m+1)\gamma - 1$ , also auf die gewöhnliche oder gruppierte Poissonsche Verteilung. Dieser Fall ist übrigens der Sonderfall  $p_1 = \dots = p_{\gamma-1} = 0$ ,  $p_\gamma = 1$  folgenden Satzes: Außerhalb einer monotonen Folge der  $t_k$  sei  $Z(t) = 0$  und für  $t = t_k$  gleich 1 bzw. 0 mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$  bzw.  $1 - p_i$ , wenn  $Z(t_{k-1}) = \dots = Z(t_{k-(i-1)}) = 0$  und  $Z(t_{k-i}) = 1$  ist. Die Verteilungsdichte der Intervalllängen zwischen zwei 1-Werten von  $Z$  ergibt sich dann gleich

$$e^{-u} \sum_{n=1}^{\infty} (1-p_1) \cdots (1-p_{n-1}) p_n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}.$$
 Die betrachteten einfachsten Vorgänge

bilden besonders einfache Beispiele der Erlangschen regenerativen Vorgänge. T. Szentmártony.

**Goodman, Leo A.:** On the Poisson-gamma distribution problem. Ann. Inst. statist. Math. 3, 123—125 (1952).

Es sei bei identisch verteilten nichtnegativen Zufallsveränderlichen  $X_i$  und

positiv ganzem  $x$  die Zufallsveränderliche  $N_x = 0$  bzw.  $n$  je nachdem  $X_1 > x$  bzw.  $X_1 + \dots + X_n \leq x$  und  $X_1 + \dots + X_{n+1} > x$  ist. Dafür, daß bei positivem  $\alpha$  die Veränderliche  $N_x$  nach dem verallgemeinerten Poissonschen Gesetz  $P\{N_x \leq n\}$

$= \sum_{k=0}^{(n+1)\alpha-1} \frac{(\alpha x)^k}{k!} e^{-\alpha x}$  verteilt sei, ist die Gamma-Verteilung  $G(x) = 0$  bzw.

$\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\beta-1} e^{-\alpha t} dt$  der  $X_i$  für  $x \leq$  bzw.  $\geq 0$  bekanntlich hinreichend. Verf.

beweist — einfacher als S. Nabeya (dies. Zbl. 41, 248) für den Fall  $\alpha = 1$  —, daß diese Bedingung bei stetig verteilten  $X_i$  und  $\alpha \leq 2$  auch notwendig ist.

T. Szentmártony.

Navarro Sagrista, Sebastian: Über eine Verallgemeinerung der Pearson-Kurven auf den zweidimensionalen Fall. *Trabajos Estadist.* 3, 273—314 (1952) [Spanisch].

In questo lavoro sono studiate qualche generalizzazioni della legge normale della probabilità in due variabili, come soluzioni di certe equazioni a derivate parziali che costituiscono le più immediate estensioni di quella a cui soddisfa la suddetta legge di distribuzione normale. Il metodo eseguito è dal tutto analogo a quello, ben noto, che conduce alla conosciuta determinazione delle curve di Pearson come integrali delle equazioni differenziali che generalizzano la corrispondente alla legge normale di una sola variabile. La trattazione è piuttosto analitica, e contiene il calcolo degli soliti elementi che si deducono di una legge di distribuzione: momenti, regioni di uguale probabilità, coefficiente di correlazione, linee di regressione, etc.

J. M<sup>a</sup>. Orts.

Tortrat, M. A.: Sur la divisibilité des lois convexes de probabilité. *Bull. Soc. math. France* 80, 47—60 (1952).

According to G. Polya (this Zbl. 38, 287), a real, continuous, even and convex function on  $(-\infty, \infty)$  such that  $y(0) = 1$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$  is the characteristic

function of a distribution function which is symmetric with respect to  $x = 0$  and which is with even density. The author calls a probability law as „convex“ if its characteristic function  $y(x)$  enjoys the above properties, and he discusses, in terms of the corresponding characteristic functions  $y(x)$ , the problem of the divisibility in the class of the „convex“ laws. It is proved that the divisibility of the law corresponding to  $y(x)$  implies the conditions: the difference quotient  $\Delta y' / \Delta x$  is  $> 0$  on every interval where  $y(x)$  is different from 0. It is also proved that the law corresponding to  $y(x)$  is infinitely divisible if  $\text{Log } y(x)$  is convex from sufficiently large  $x$  to  $\infty$ .

K. Yosida.

Hammersley, J. M.: On a conjecture of Nelder. *Compositio math.* 10, 241—244 (1952).

Die Vermutung, nach welcher die Determinante der Informationsmatrix

$\int_0^\infty \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} e^{-x} dF(x)$  nichtnegativer Zufallsveränderlichen ihr Maximum für  $F(x) = 0$

bzw.  $\frac{1}{2}$  bzw. 1 bei  $x < 0$  bzw.  $0 \leq x < 2$  bzw.  $x \geq 2$  und nur für diese Verteilungsfunktion erreicht, bestätigt Verf. für Verteilungsfunktionen mit rationalen Sprüngen.

T. Szentmártony.

Rényi, A.: On projections of probability distributions. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 3, 131—142 (1952).

Ausgangspunkt ist ein Satz von Radon [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 59, 262—277 (1917)]:  $G$  sei ein beschränktes zweidimensionales Gebiet und das Integral über die stetige Funktion  $f(x, y)$  verschwinde längs jeder „Sehne“ von  $G$ . Dann ist  $f(x, y) = 0$ . [Satz R.] Der Satz wurde neuerdings wieder entdeckt [Steinhaus, *Colloq. math.* 2, 161 (1951); Wazewski und Szarski, *Ann. Soc. Polonaise Math.* 20, 389—390 (1947)] und in Zusammenhang mit anderen Problemen gebracht [Bang, dies. Zbl. 39, 311; 44, 378 und die soeben erschienene Arbeit von Mikusinski und Ryll-Nardzewski, *Studia math.* 13, 62—

68 (1953), wo eine den Untersuchungen von Radon verwandte Aussage zum Beweis des Faltungssatzes von Titchmarsh für beliebig viele Veränderliche verwendet wird]. Wir fügen noch hinzu, daß die Arbeit von Radon schon früher die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat [Mader, Math. Z. **26**, 646—652 (1927), John, dies. Zbl. **8**, 346; vgl. noch Funk, Math. Ann. **74**, 278—300 (1913)]. Verf. zeigt, daß man Satz *R* verallgemeinern und erweitern kann, indem man ein Ergebnis von Cramér-Wold, dies. Zbl. **15**, 168 heranzieht, welches hier so formuliert wird: Eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eindeutig bestimmt durch die Kenntnis aller ihrer linearen Projektionen durch den Ursprung. Die Verwendung der charakteristischen Funktion zum Beweis des Verf. geht auf Cramér-Wold zurück. Es sei bemerkt, daß im Zusammenhang mit den Problemen von Radon der Gebrauch der Fouriertransformierten schon bei John (l. c.) auftritt. — Eine diskrete Massenverteilung in der Ebene mit  $n$  diskreten Massenpunkten ist eindeutig bestimmt durch ihre Projektionen auf  $(n+1)$  beliebige Gerade durch den Ursprung. Diesen Satz hat Verf. für den Fall der Gleichverteilung bewiesen und im allgemeinen Fall vermutet. Die Vermutung wurde durch Hajos bestätigt und der elegante Induktionsbeweis hier wiedergegeben. Sehr einfach wird gezeigt, daß die Kenntnis der Projektion auf  $n$  Geraden nicht genügt. Es folgt ein ähnlicher Satz für  $n$  gleichverteilte Massen im  $R_3$ .

L. Schmetterer.

**Mattila, Sakari: On biorthogonal expansions of the conjugate random functions.**

Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. **143**, 8 S. (1952).

Es seien — bei  $p+q=pq$  —  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei, ihren Normen  $\|x\| = +[E(|x|^p)]^{1/p}$ ,  $\|y\| = +[E(|y|^q)]^{1/q}$  nach stetige und insofern konjugierte oder korrelierte Zufallsfunktionen, daß es zu jedem  $x$  (bzw.  $y$ ) mindestens ein im Sinne  $m_{xy}(s, t) = F[x(s)y(t)] \neq 0$  nichtorthogonales  $y$  (bzw.  $x$ ) gibt. Dabei sei  $m_{xy}(s, t)$  vollständig insofern, als im gemeinsamen Definitionsbereich  $(a, b)$  von  $x, y$ :

$$\int_a^b m_{xy}(s, t) h(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b m_{xy}(s, t) h(s) ds \quad \text{für alle } a \leq s, t \leq b \quad \text{nur für } h(t)$$

bzw.  $h(s) = 0$  verschwinden soll. Verf. beweist dann, daß bezüglich der vollständigen orthonormalen Systeme  $\{\varphi_\mu(t)\}$  und  $\{\psi_\nu(t)\}$  von stetigen reellen Funktionen  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  die Zufallsveränderlichen  $z_\mu$  bzw.  $w_\nu$  als Fourier-Koeffizienten mit Pettisschen Integralen über  $(a, b)$  und den biorthogonalen Beziehungen

$$E(z_\mu w_\nu) = \frac{1}{\rho_{\mu\nu}} \delta_{\mu\nu} \quad \text{mit } \delta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 \quad \text{für } \mu \neq \text{bzw.} = \nu \quad \text{dann und nur dann}$$

$$\text{besitzen, wenn } \varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^b m_{xy}(s, v) \psi(v) dv \quad \text{und} \quad \psi_\nu(t) = \lambda_\nu \int_a^b m_{xy}(u, t) \varphi(u) du$$

$$\text{sind. Es ergibt sich auch, daß die Entwicklungen } x(t) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu e^{i\lambda_\nu t}, y(t) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu e^{-i\lambda_\nu t}$$

gemäß  $m_{xy}(s, t) = m_{xy}(s - t)$  stationär korrelierter Zufallsfunktionen biorthogonal sind. Sind diese Funktionen auch stationär mindestens von der Ordnung 2, dann und nur dann sind auch die Folgen in sich orthogonal. T. Szentmártony.

**Morlat, Georges: Sur une classe de fonctions aléatoires.** C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1364—1366 (1952).

Es bezeichne  $x(t)$  eine Zufallsfunktion, welche in aufeinanderfolgenden unabhängigen Intervallen von der Länge  $u$  bzw.  $v$  mit den Verteilungsfunktionen  $F(u)$  bzw.  $G(v)$  den Wert 1 bzw. 0 annimmt. Es wird der Grenzwert  $\mathcal{E}(t)$  von  $[\xi_1(t) + \dots + \xi_n(t)]/\sqrt{n}$  bei  $n$  unabhängigen Realisationen  $\xi_i(t)$  von  $\xi(t) = [x(t) - p]/\sqrt{p(1-p)}$  mit  $p = E(u)/[E(u) + E(v)]$  betrachtet. Verf. behauptet, daß  $\mathcal{E}(t)$  bei jedem festen  $t$  eine  $(0, 1)$ -normale Verteilung besitzt und mit der Wahrscheinlichkeit 1 zwar stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Die Kovarianz  $\rho(h) = E[\mathcal{E}(t)\mathcal{E}(t+h)]$  wird sowohl allgemein, als auch für halbnormale  $F(u)$ ,  $G(v)$  mit demselben Erwartungswert insbesondere berechnet. Im letzten Fall ergibt sich  $\rho(h) = e^{-2h/\tau}$ .

T. Szentmártony.

**Karhunen, Kari: Zur Interpolation von stationären zufälligen Funktionen.** Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. **142**, 8 S. (1952).

$$\text{Es sei } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \quad \text{rein indeterministisch, also} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F'(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty$$



mit  $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} F'(\lambda) d\lambda = E \left| \int_{-\infty}^{\lambda} dZ(\lambda) \right|^2$ . Man betrachte nun in dem zu  $x(t)$  gehörenden linearen Raum die Unterklasse  $N_2(x; a, b)$  der durch  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dZ(\lambda)$

darstellbaren  $z$  mit  $E z x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(\lambda) F'(\lambda) d\lambda = g(t) = 0$  für alle  $t$  außerhalb  $(a, b)$ , und es sei  $h = \frac{1}{2}(b-a)$  sowie  $m = \frac{1}{2}(a+b)$ . Dann beweist Verf.,

daß  $f(\lambda) F'(\lambda) = e^{im\lambda} G(\lambda)$  mit der ganzen Funktion  $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h e^{i\lambda w} g(t+m) dt$

$= o(e^{h|w|})$  ist, ferner daß sich  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\lambda)|^2}{F'(\lambda)} d\lambda =$  bzw.  $\frac{2\pi}{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\lambda)|^2 d\lambda \leq E|z|^2 < \infty$

ergibt. Umgekehrt kann zu der Klasse  $E(h, F)$  solcher ganzen Funktion  $f$  und so  $z$  definiert werden, daß zwischen  $E(h, F)$  und  $N_2(x; a, b)$  als Hilbertschen Räumen eineindeutige Beziehung besteht. Enthält  $N_2(x; a, b)$  nur das Nullelement, so wird  $x(t)$  über  $(a, b)$  interpolierbar genannt, weil dann jedes  $x(t)$  für  $a < t < b$  Element der geschlossenen Hülle von  $\{x(t), t \leq a \text{ oder } t \geq b\}$  ist. Dann gibt es ein größtes Interpolationsintervall mit der Länge  $2 \sup h$ , genommen über alle  $h$ , für die  $E(h, F)$  kein Element  $\neq 0$  enthält. Diese Sätze werden an drei Beispielen illustriert. Ein viertes Beispiel veranschaulicht den folgenden Satz. Die Projektion des Elementes  $z$  des zu  $x(t)$  gehörenden linearen Raumes auf den Unterraum der geschlossenen

linearen Hülle von  $\{x(t), t \leq a \text{ oder } t \geq b\}$  ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( f(\lambda) - e^{im\lambda} \frac{G(\lambda)}{F'(\lambda)} \right) dZ(\lambda)$ . Für  $z = x(t)$  mit  $a < t < b$  ergibt sich so insbesondere die Interpolation von  $x(t)$  über  $(a, b)$ . T. Szentmártony.

**Ostrowski, A. M.:** Two explicit formulae for the distribution function of the sums of  $n$  uniformly distributed independent variables. Arch. der Math. 3, 451—459 (1952).

Der Verf. gibt einen neuen Beweis und auch eine andere Darstellung für die Verteilungsfunktionen  $F(\sigma)$  der folgenden Verteilung:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  seien  $n$  unabhängige Variable mit der Rechteckverteilung  $|\xi_v| \leq \alpha_v, \alpha_v > 0, v = 1, 2, \dots, n$ .  $F(\sigma)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $(1) \xi_1 + \dots + \xi_n \leq \sigma$ . Der Verf. benutzt die folg. Bezeichnungen:  $x_{\dagger} = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ;  $S_M^{\dagger} f = S^n f(M) = f(M - \eta)$  (Verschiebungsoperator). Gemäß diesen Bezeichnungen beweist er das folg. Ergebnis:

$F(\sigma) = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \prod_{v=1}^n (1 - S^{2\alpha_v}_{\dagger}) (\alpha + \sigma)_{\dagger}^n$ . Daneben bestimmt er die Wahrscheinlichkeit  $F^*(\sigma)$ , daß Ungl. (1) erfüllt, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $\max_{v=1, \dots, n} \frac{|\xi_v|}{\alpha_v} = 1$ . W. Saxer.

**Lévy, Paul:** Loi faible et loi forte des grands nombres. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1186—1188 (1952).

Es bezeichne  $S_n$  mit dem Zentralwert (Median)  $m_n$  die  $n$ -te Teilsumme unabhängiger Zufallsveränderlicher  $X_k$  mit den Zentralwerten  $m(X_k) = 0$  sowie  $M_n = \max |X_v|$  bei  $v \leq n$ , ferner  $\{a_n\}$  eine Folge mit  $0 < a_n \uparrow$  und schließlich  $U_n = o_s(V_n)$  bzw.  $o_s(V_n)$ , daß  $U_n/V_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  schwach bzw. stark gegen Null strebt. Verf. untersucht die Beziehungen zwischen  $1_s) S_n - m_n = o_s(a_n)$  und  $2_s) M_n = o_s(a_n)$ , bzw.  $1_s) S_n - m_n = o_s(a_n)$  und  $2_s) M_n = o_s(a_n)$ . Die Ungleichung  $P\{|S_n - m_n| > l\} \geq \frac{1}{6} P\{M_n > 2l\}$  ergibt  $1_s \rightarrow 2_s$  bzw.  $1_s \rightarrow 2_s$  und somit die Notwendigkeit von  $2_s$  zum schwachen bzw. von  $2_s$  zum starken Gesetz der großen Zahlen. Was die Umkehrung anbelangt, unterscheidet Verf. in — nicht klar ersichtlicher Weise — drei Fälle bezüglich des asymptotischen Verhaltens von  $S_n$ . In zwei Fällen können die  $a_n$  so bestimmt werden, daß weder  $2_s$  die Gültigkeit der Bedingung  $1_s$ , noch  $2_s$  jene von  $1_s$  nach sich zieht. Im dritten „nichtlaplaceschen“ Fall ergibt sich, daß  $2_s \rightarrow 1_s$  und bei  $m(X_k) = o(a_k)$  sogar die Äquivalenz von beiden. Im dritten Fall ist übrigens bei gemeinsamer Verteilungsfunktion  $F(x)$  der

$|X_k|$  die Bedingung  $\int_0^x y^2 |dF(y)| \leq c x^2 F(x)$  notwendig und hinreichend für  $1_s = 2_s$ . Erfüllen aber die verschiedenen Verteilungsfunktionen der  $|X_k|$  die letzte Integralungleichung mit gleichem  $c$ , dann ist bei  $m(X_k) = o(a_k)$  wieder  $1_s = 2_s$ . *T. Szentmártony.*

**Freudenthal, Hans:** A limit free formulation of the weak law of large numbers. *Indagationes math.* 14, 427—432 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 427—432 (1952).

Eine neue Ableitung des 1936 von W. Feller gefundenen allgemeinsten schwachen Gesetzes der großen Zahlen in folgender Fassung. Es bezeichne  $x_i^{M_i}$  die außerhalb der Intervalle  $M_i$  auf Null verstümmelten unabhängigen Zufallsveränderlichen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ist  $L$  ein beliebiges Intervall der Länge  $l$  und  $0 < \vartheta \leq 1$ , so bezeichne  $L^\vartheta$  das zu  $L$  konzentrische Intervall der Länge  $\vartheta l$ . Gibt es dann  $n$  Intervalle  $M_i$  von der Länge  $l$  mit  $P_n = \sum_{i=1}^n P\{x_i \notin M_i\} < \varepsilon_1$  und  $V_n = \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i^{M_i})$

$< \varepsilon_2 l^2$ , dann gibt es auch ein Intervall  $L$  von der Länge  $l$  mit  $P\left\{\sum_{i=1}^n x_i \notin L^\vartheta\right\} < \varepsilon_1 + 4 \varepsilon_2 \vartheta^{-2}$ . Ist umgekehrt für ein solches  $L$  die letzte Wahrscheinlichkeit kleiner als  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1/13$ , dann gibt es  $n$  Intervalle  $M_i$  von der Länge  $m = 3l$  so, daß  $P_n < 2\varepsilon$ , und für je  $n$  Intervalle  $M_i$  der Länge  $m \geq 3l$  mit  $P_n < 2\varepsilon$  gilt  $V_n < 5 l^2/3 + 33 \varepsilon m^2$ . *T. Szentmártony.*

**Freudenthal, Hans:** Gambling with a poor chance of gain. *Indagationes math.* 14, 433—438 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 433—438 (1952).

Es wird gezeigt, daß für  $0 < a_n \uparrow \infty$  die Zufallsveränderlichen  $(x_i)$  bei  $P\{x_n = 0\} = 1 - 1/a_n$  sowie  $P\{x_n = a_n\} = 1/a_n$  und so mit dem Erwartungswert 1 (und nichtbeschränktem Streuungsquadrat) dann und nur dann dem schwachen Gesetz der großen Zahlen  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 1\right| < \varepsilon\right\} = 1$  genügen, wenn  $a_n = o(n)$

ist. Das Spiel, bei welchem mit dem spielweisen Einsatz 1 der Spielausgang durch  $a_n$  mit obigem  $P\{x_n\}$  dargestellt wird, erweist sich somit bei  $a_n = o(n)$  und nur in diesem Fall als „gerecht“. *T. Szentmártony.*

**Chung, Kai Lai:** On the renewal theorem in higher dimensions. *Skand. Aktuarietidskr.* 1952, 188—194 (1952).

Als erster Schritt zu einer mehrdimensionalen Erneuerungstheorie gelingt es dem Verf. durch wesentliche Benützung eines Gedankens von Kolmogorov folgenden Satz zu beweisen. Es seien  $V_1, V_2, \dots$  unabhängige Zufallsvektoren mit der Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_r)$  im  $r$ -dimensionalen Raume  $R^r$ , und es bezeichne  $C(+)$   $U$  eine durch den Vektor  $U$  verschobene kompakte Menge  $C$  in  $R^r$ . Dann ist der Grenzwert des bedingten Erwartungswertes

$$\lim_{|U| \rightarrow \infty} E\left\{n \left| \sum_{k=1}^n V_k \in C(+U) \right.\right\} = 0,$$

wenn bei  $j = 1, \dots, r$  mindestens ein  $m_j = \int \dots \int x_j dF \neq 0$  ist.

*T. Szentmártony.*

**Blomqvist, N.:** On an exhaustion process. *Skand. Aktuarietidskr.* 1952, 201—210 (1952).

Es werden  $m$  Versuche durchgeführt, von denen jeder aus höchstens  $n$  Einzelexperimenten  $E_1, \dots, E_n$  besteht. Bei jedem  $E_j$  ist  $p = 1 - q$  die konstante Wahrscheinlichkeit für Ereignis  $S$ . Versuch 1 wird durchgeführt, entweder bis zu demjenigen  $E_j$ , welches zum ersten Mal  $S$  zeitigt, oder, falls  $S$  nicht eintritt, bis zu  $E_n$ ; im ersten Fall wird  $E_j$  gestrichen und Versuch 2 in ähnlicher Weise ohne  $E_j$  durchgeführt, etc. Verf. bestimmt kombinatorisch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $S$  in genau  $x$  der  $m$  Versuche eintreffe, zu

$$P(x) = q^{(m-x)(n-x)} \cdot \prod_{k=m-x+1}^m (1-q^k) \cdot \prod_{k=n-x+1}^n (1-q^k) \prod_{k=1}^x (1-q^k),$$

ferner deren Grenzverteilungen für festes  $n, m \rightarrow \infty, m p = \lambda$  (Binomialverteilung) u. a. Durch Betrachtung entsprechender stochastischer Prozesse, welche auf Markoff-Ketten beruhen, lassen sich die Ergebnisse deuten und mit denen anderer Autoren in Verbindung bringen. Schließlich werden, der Pascalschen Fragestellung entsprechend, die exakte und asymptotische Verteilung der zur Ausschöpfung aller  $n E_j$  erforderlichen Anzahl  $M$  von Versuchen analysiert, deren kumulative Verteilungsfunktion  $P(n)$  ist, und mittels charakteristischer Funktionen die Mittelwerte geeignet transformierter Grenzverteilungen berechnet. *M.-P. Geppert.*

**Nisida, Tosio:** On the inverse function of Poisson process. *Math. Japonicae* **2**, 135—142 (1952).

Leichter Beweis des folgenden, von P. Lévy 1948 (dies. Zbl. **34**, 226) intuitiv festgestellten Satzes: Bei dem Poissonschen Vorgang  $P\{X(t) - X(s) = n\} = [\lambda(t-s)]^n e^{-\lambda(t-s)} / n!$  für  $s < t$  und natürliches  $n$  besitzt  $T(n) = \text{Min}\{t; X(t) = n\}$  bei  $X(0) = 0$  die Gamma-Verteilung mit der Dichte 0 bzw.  $\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} / (n-1)!$  für  $t \leq$  bzw.  $> 0$ , und bei  $0 = n_0 < n_1 < \dots$  besitzen die unabhängigen  $T(n_i) - T(n_{i-1})$  dieselben Verteilungsfunktionen wie die entsprechenden  $T(n_i - n_{i-1})$ . Neun Bemerkungen über  $T(n)/n$ , unter welchen vielleicht  $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} T(n)/n = 1/\lambda\} = 1$  die bemerkenswerteste ist, beschließen die Betrachtungen. *T. Szentmártony.*

**Dolph, C. L. and M. A. Woodbury:** On the relation between Green's functions and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction. *Trans. Amer. math. Soc.* **72**, 519—550 (1952).

Part I. Let, in the operator  $L_t(y) = \sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(n-k)}(t)$ , the coefficients  $a_k(t)$  be  $C^{(n-1)}$  on  $(-\infty, \infty)$  with  $a_0(t) \neq 0$ , and let  $M_t(y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k [a_k(t) y(t)]^{(n-k)}$  be the formal adjoint of  $L_t(y)$ . As is well known, the solution of  $L_t(y) = f(t)$ ,  $y^{(k)}(t_0) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) is given by  $y(t) = \int_{t_0}^t R(t, s) f(s) ds$ , where the one-dimensional Riemann function  $R(t_0, s)$  is defined as the unique solution of  $M_s[R(t, s)] = 0$  satisfying the conditions  $[\partial^k R(t_0, s) / \partial t^k]_{s=t_0} = 0$  or  $= (-1)^{n-1} / a_0(t_0)$  according as  $k < n-1$  or  $k = n-1$ . Thus the solution of the (formal) equation  $L_t(y) = \xi'(t)$ , where  $\xi(t)$  denotes the Wiener process, may be given by the process  $y(t) = \int_{-\infty}^t R(t, v) d\xi(v)$  (choosing  $t_0 = -\infty$ ). The covariance of this process is computed as  $r(t, s) = \int_{-\infty}^s R(t, v) R(s, v) dv$  or  $= \int_{-\infty}^t R(t, v) R(s, v) dv$  according as  $t \geq s$  or  $t \leq s$ , and it is proved that  $r(t, s)$  satisfies the self-adjoint equation  $M_t L_t(y) = 0$  for  $t \neq s$  in each one of its variables  $t$  and  $s$ . — Part II. The integral equation  $f(t) = \int_{-\infty}^T r(t, s) dw(s)$  is solved by  $w'(t) = L_t(f(t))$ , if the covariance  $r(t, s)$  is a solution of  $L_t(y) = (p y)' + q y = 0$  for  $t \neq s$  possessing the saltus  $\left[ \frac{\partial r(s + \varepsilon, s)}{\partial t} - \frac{\partial r(s - \varepsilon, s)}{\partial t} \right]_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{p(s)}$ . A more general equation  $f(t) = \int_0^T [z(t, s) + r(t, s)] dw(s)$ , where  $z(t, s)$  is also a known covariance, is discussed in order to apply in Part III. — Part III. Let  $x_m(t)$  be a continuous process (message) of second order with the covariance  $z(t, s)$ , and let  $x_n(t)$  be another continuous process (noise) of second order, independent of  $x_m(t)$ , with the covariance  $r(t, s)$  and such that the expectation  $E(x_n(t)) = 0$ . The linear prediction of  $x_m(t)$  at a future time  $t_1 > T$  from the observation of  $x(t) = x_m(t) + x_n(t)$  in the past  $t \leq T$  be taken as  $x_p(t_1) = \int_0^{t_1} x(t) d_t w(t, t_1)$ . The author treat the problem of minimizing the  $E((x_p(t_1) - x(t_1))^2)$ , subject to the unbiased condition that  $E(x_p(t_1)) = E(x_m(t_1)) = \sum_{k=0}^n a_k g_k(t)$  identically in the unknown parameters  $a_k, g_k(t)$  being known continuous functions.

*K. Yosida.*



Anderson, T. W. and D. A. Darling: Asymptotic theory of certain „goodness of fit“ criteria based on stochastic processes. *Ann. math. Statistics* **23**, 193—212 (1952).

Denote with  $F_n(x)$  the empirical cumulative distribution of a random sample of size  $n$  taken from a population which is subject to a given continuous cumulative distribution  $F(x)$  and put

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \psi[F(x)] dF(x), \quad K_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \sqrt{n} |F_n(x) - F(x)| \sqrt{\psi[F(x)]},$$

where  $\psi(x)$  is some preassigned weight function. It is a fundamental problem in the theory of testing hypothesis to find the limit probabilities:

$$a(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{W_n^2 \leq z\}, \quad b(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{K_n \leq z\}.$$

The special case in which  $\psi(x) \equiv 1$  has been already solved by N. V. Smirnov (this *Zbl.* **18**, 412) and A. Kolmogorov (this *Zbl.* **6**, 174) and other authors. After J. L. Doob's idea (this *Zbl.* **35**, 89) the author shows

$$a(z) = \Pr \left\{ W^2 = \int_0^1 y^2(u) \psi(u) du \leq z \right\}, \quad b(z) = \Pr \left\{ K = \sup_{0 \leq u \leq 1} |y(u)| \sqrt{\psi(u)} \leq z \right\},$$

where  $y(u)$ ,  $0 \leq u \leq 1$  is a Gaussian process such that

$$E \{y(u)\} = 0, \quad E \{y(u) y(v)\} = \min(u, v) - uv.$$

In making use of the theory of eigenfunction-expansions it is proved that the characteristic functions of  $W^2$  is expressed as

$$E \{e^{i t W^2}\} = \int e^{i t z} da(z) = \sqrt{h(1, 0)/h(1, z_i t)},$$

where  $h(u, \lambda)$  is the solution of  $h''(u) + \lambda \psi(u) h(u) = 0$  with the initial conditions:

$$h(0, \lambda) = 0, \quad \partial h(u, \lambda)/\partial u|_{u=0} = 1.$$

In the special cases in which  $\psi(t) \equiv 1$  (Smirnov's case) and  $\psi(t) = t(1-t)$ , the function  $a(z)$  is obtained explicitly and a numerical table for the first case is given. Next  $b(z)$  is determined as the diffusion probability of Wiener process with some absorbing barriers. The author presents the concrete expressions of  $b(z)$  for some special cases including the above Kolmogorov's case. *K. Itô.*

Yosida, Kôzaku: On the integration of diffusion equations in Riemannian spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 864—873 (1952).

In Erweiterung einer Minakshi-Pleijelschen elementaren Konstruktion (1949) werden durch Verfeinerung von Parametrix-Betrachtungen drei Sätze über zeitlich homogene Zufallsvorgänge bewiesen. 1. In einem kompakten Riemannschen Raum  $R$  mit der Determinante  $g(x)$  des Fundamentaltensors gibt es zu jedem unendlich oft differenzierbaren  $f(x)$  eine einzige Lösung von  $f_t(x, t) = b^{ij}(x) f_{x^i x^j}(x, t) + a^i(x) f_{x^i}(x, t)$  für  $t \geq 0$  mit  $f(x, t) \Rightarrow f(x)$  bei  $t \downarrow 0$ ,  $\min_x f(x) \leq f(x, t) \leq \max_x f(x)$  und  $\max_x f(x, t) = \max_x f(x)$  bei  $f(x) \geq 0$ . 2. Zu jedem in  $R$  unendlich oft differenzierbaren  $h(x)$  gibt es eine einzige Lösung von

$$g(x)^{1/2} h_t(x, t) = [g(x)^{1/2} b^{ij}(x) h(x, t)]_{x^i x^j} - [g(x)^{1/2} a^i(x) h(x, t)]_{x^i}$$

für  $t \geq 0$  mit  $\lim_{t \downarrow 0} \int_R |h(x, t) - h(x)| dx = 0$ ,  $\int_R |h(x, t)| dx \leq \int_R |h(x)| dx$  sowie

$h(x, t) \geq 0$  mit  $\int_R h(x, t) dx = \int_R h(x) dx$  für  $h \geq 0$ , bei  $dx = g(x)^{1/2} dx^1 \dots dx^m$ .

In beiden Fällen ist  $b^{ij}(x) \xi_i \xi_j$  positiv definit in  $R$  und bei  $x \rightarrow \bar{x}$  wird  $\bar{a}^i(\bar{x}) = \partial \bar{x}^i / \partial x^k a^k(x) + \partial^2 \bar{x}^i / \partial x^k \partial x^s b^{ks}(x)$ . Der dritte Satz ist eine Erweiterung des zweiten auf das durch einen glatten Rand abgeschlossene  $R$ . *T. Szentmártony.*

Wasow, W. R.: A note on the inversion of matrices by random walks. *Math. Tables Aids Comput.* **6**, 78—81 (1952).

Consider a set of  $m$  points  $P_1, \dots, P_m$  and a particle of mass 1 starting a random walk at  $P_i$ , having probabilities  $p_{\nu\mu}$  of jumping from  $P_\nu$  to  $P_\mu$ , at the same time multiplying its mass  $V$  by  $v_{\nu\mu}$ . The probability of the random walk ending at  $P_\nu$  is

$$p_\nu = 1 - \sum_{\mu=1}^m p_{\nu\mu}. \quad \text{With this random walk we connect two random variables,}$$

defined as follows: (1)  $G_{ij} = V p_j^{-1}$  if the walk ends at  $P_j$  and  $= 0$  otherwise. (2)  $M_{ij}$  = total amount of mass carried through  $P_j$  on the several visits of the particle. Now let  $A$  be the matrix  $(p_{ij} v_{ij})$ ,  $B = I - A$  and  $B^{-1} = (\beta_{ij})$ . Then  $E(G_{ij}) = \beta_{ij}$  [shown by Forsythe and Leibler in *Math. Tables Aids Comput.* 4, 127—129, (1950)] and  $E(M_{ij}) = \beta_{ij}$  (shown, easily, in the present paper). To give some indication of which variable is preferable for the Monte Carlo method, the author proves that, if all  $v_{ij} = 1$ , and  $v_j$  is the probability of a particle which started at  $P_j$  never returning there, then  $\sigma(M_{ij}) \leq \sigma(G_{ij})$  if and only if  $p_j \leq v_j/(2 - v_j)$ . The practical value of this theorem is, as the author remarks, limited. *S. Vajda.*

McKinsey, J. C. C.: Some notions and problems of game theory. *Bull. Amer. math. Soc.* 58, 591—611 (1952).

Expository article.

*S. Vajda.*

Snell, J. L.: Applications of martingale system theorems. *Trans. Amer. math. Soc.* 73, 293—312 (1952).

Let  $F_t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) be an increasing collection of Borel fields and  $x_t$  a sequence of random variables measurable with respect to  $F_t$ . This sequence is a martingale if the expectations  $E\{x_t\}$  and the conditional expectations of  $x_t$  relative to  $F_s$ , written  $E\{x_t|F_s\}$  satisfy the conditions (a)  $E\{x_t\} < \infty$  for all  $t$ , (b)  $E\{x_t|F_s\} = x_s$  with probability one for  $s < t$ . If the  $=$  sign in (b) is replaced by  $\geq$ , then the sequence is a semimartingale and if instead of (a) it is only required that  $E\{x_t\}$  exists ( $\leq \infty$ ), then one speaks of a generalized (semi-)martingale. The author gives an interpretation of these concepts by considering a succession of games and then proceeds to prove a theorem which is suggested by the consideration that a fair (or favourable) game remains so even if a system is adopted of playing only some games. He studies convergence properties of semimartingales and generalizes a theorem due to Doob (this *Zbl.* 44, 338), concerning the expected number of upcrossings of  $x_t$  in a given interval. Finally he considers a game problem with applications to the theory of statistical decision functions, using methods suggested by a paper of Arrow, Blackwell and Girshik (this *Zbl.* 34, 75).

*S. Vajda.*

Gomm, Gerhart: Wahrscheinlichkeitsprobleme im Fernsprechverkehr. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 4, 183—204 (1952).

Verf. gibt auf 22 Schreibmaschinenseiten einen Überblick über die statistische Theorie der sogenannten „Gesprächsverluste“ I. in der „vollkommenen Gruppe“ a) für Besetzungssysteme, b) für Wartesysteme, c) bei beschränkter Teilnehmerzahl, d) bei Verzicht auf die Hypothese der Regellosigkeit des ankommenden Verkehrs, und II. in „unvollkommenen Gruppen“. Die Erlangischen Grundgleichungen werden hergeleitet und nebst einigen anderen Ansätzen diskutiert. Die Entwicklungen sind systematisch und übersichtlich, aber die Formeln werden zum Teil kompliziert, und es wäre von Interesse zu erfahren, wie weit die theoretischen Folgerungen durch die Erfahrung bestätigt werden. Im Literaturverzeichnis vermisste ich die Veröffentlichungen von Lubberger und Rückle und einige andere.

*P. Lorenz.*

Hällström, Gunnar af: Ein lineares Inselproblem der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. 123, 9 S. (1952).

Verf. stellt sich folgendes Problem: Wir betrachten von 1 bis  $n$  numerierte Elemente (Karten) in einem ungeordneten Haufen und  $n$  ebenso numerierte Plätze, die entweder einen geschlossenen Ring bilden (Ringfall) oder geradlinig nebeneinander liegen (Stabfall). Aus dem Haufen werden Karten gezogen und auf die Plätze gleicher Nummern gelegt. Nach Ziehung von  $m$  ( $< n$ ) Karten bilden diese auf dem Ring bzw. Stab  $k$  zusammenhängende Folgen (Inseln), die von leeren Zwischenräumen (Sunden) getrennt werden. Während der Gesamtziehung erreicht die Inselzahl einen Höchstwert, der von der jeweiligen zur Ziehung gehörenden Permutation der Elemente 1 bis  $n$  abhängt. Es handelt sich im folgenden um eine Schätzung des Mittelwerts (Erwartungswerts) dieses Höchstwerts.  $u(n)$  bezeichne im Ringfall,  $U(n)$  im Stabfall den Mittelwert des Verhältnisses zwischen Höchstzahl und Kartenzahl. Verf. beweist: Es ist  $u(2) = \frac{1}{2}$ ,  $u(3) = u(4) = u(5) = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4} < u(n) < \frac{1}{3}$  für  $n \geq 6$ . Es gilt außerdem:  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \gamma$ , wobei  $\gamma$  die untere Grenze der Zahlen  $U(n)$  bezeichnet und dem geschlossenen Intervall  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$  angehört.

*J. M<sup>a</sup>. Orts.*

Dufresne, Pierre: Problèmes de dépouillements. IV. Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal. *Gaz. Mat.*, Lisboa **13**, 3–6 (1952).

Suite des recherches sur le problème du scrutin (ce Zbl. **39**, 344–345). L'A. donne dix tables; les cinq premières sont celles de la fonction:  $f(x, y) = (x - 2y - p) \cdot \binom{x-p}{y} / (x-p)$ ,  $x$  variant de 1 à 11, pour  $p = 0, 1, 2, 3, 4$ . Les cinq autres sont celles de la fonction  $\binom{x}{y} - \binom{x}{y-p}$ ,  $x$  variant de 1 à 11, pour  $p = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Ces deux fonctions satisfont à l'équation aux différences:  $f(x, y) - f(x-1, y-1) + f(x-1, y)$ , ce qui justifie le titre du papier. Page 6, tableau inférieur à gauche, lire:  $f(9, 4) = 117$  au lieu de 127.

A. Sade.

Varma, R. S.: On the probability function in a normal multivariate distribution. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 361–362 (1952).

In der Ballistik ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, daß eine Beobachtung  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  innerhalb einer gegebenen Entfernung von einem Punkt  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  liegt. Sie wird durch ein kompliziertes Doppelintegral gegeben. Verf. gibt Auswertungen desselben mittels Reihenentwicklungen.

P. Lorenz.

### Statistik:

Lomnicki, Z. A.: The standard error of Gini's mean difference. *Ann. math. Statistics* **23**, 635–637 (1952).

C. Gini's „mean difference“  $g$  is defined as 
$$g = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |x_i - x_j|$$

where the values  $x_i$  are numbered as they appear in the sample, which is of size  $n$ , from a population with probability density  $f(x)$ , mean value  $\mu$ , variance  $\sigma^2$ . It is shown that the variance of  $g$ : 
$$\text{Var}(g) = \frac{1}{n(n-1)} [4(n-1)\sigma^2 + 16(n-2)J - 2(2n-3)\Delta^2],$$

where  $\Delta = E(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| f(x) f(y) dx dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) (2F(x) - 1) dx,$

$[F(x)$  cumulative distribution of  $f(x)]$  and  $J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} (x - y)(z - x) f(x) \cdot f(y) f(z) dx dy dz.$

H. Geiringer.

Gini, C.: Ulteriori considerazioni sull'asimmetria delle distribuzioni statistiche. *Metron* **16**, Nr. 3–4, 49–74 (1952).

Questo lavoro si collega ad un precedente articolo del Gini (*Metron* **15**, 1–2 (1950)). — L'A. mette in rilievo che gli indici di asimmetria fondati sul confronto delle ordinate di posto simmetrico rispetto alla mediana delle curve di frequenza presentano vari inconvenienti e non rispondono bene all'aspetto che si vuol misurare. — Più rispondenti allo scopo sono gli indici proposti dall'A. che si basano sul confronto tra le ordinate simmetriche della curva di graduazione corrispondente alla curva di frequenza data. — Nel corso della trattazione è fatta opportuna distinzione tra curva di frequenza dei valori effettivamente presentati e curva di frequenza dei valori possibili.

T. Salvemini.

Grundy, P. M.: The fitting of grouped truncated and grouped censored normal distributions. *Biometrika* **39**, 252–259 (1952).

Verf. betrachtet eine um den Erwartungswert  $\mu$  mit der Streuung  $\sigma$  normal verteilte solche Zufallsveränderliche  $x$ , für welche der Bereich  $-\infty < x \leq x_0$  sowohl in der Gesamtheit als auch bei den Stichproben nicht beachtet (die Gesamtheit verstümmelt, die Stichprobe zensuriert) wird und die übrigen Stichprobenwerte in die Mittelpunkte der aufeinanderfolgenden Intervalle von den Längen  $h_i$  mit den Häufigkeiten  $f_i$  gruppiert werden. Die dementsprechend adjustierten zwei ersten Momente der Stichproben ergeben sich dann approximativ als  $[q] -$



$\{[h^2 q] - [h^2 \mu]\}/(12 \sigma^2)$  bzw.  $[q^2] + \{[h^2] \sigma^2 + 2\mu [h^2 q] - [h^2 q^2]\}/(12 \sigma^2)$ , wo z. B.  $[q] = \sum f_i q_i / \sum f_i$  ist. Verf. bespricht die Genauigkeit dieser Näherungen und untersucht die Wirkung der Gruppierung auf die Informations- und Kovarianzmatrizen der Schätzungen von  $\mu$  und  $\sigma$ .  
T. Szentmártony.

**Kuppermann, Morton:** On exact grouping corrections to moments and cumulants. *Biometrika* 39, 429—434 (1952).

Es bezeichne  $\bar{\mu}_2$  bzw.  $\mu_4$  die auf die Mittelwerte bezogenen Momente zweiter bzw. vierter Ordnung, die sich aus der a) Rechtecks-, b) Dreiecks-, c) für  $0 \leq x \leq a$ :  $f(x) = 2(a-x)/a^2$  Halbdreiecks- und d) Parabelverteilung über  $-a \leq x \leq a$  sowie e) aus der Exponentialverteilung  $f(x) = a e^{-ax}$  für  $x \geq 0$  ergeben, wenn diese Verteilungen in die Mittelpunkte der aufeinanderfolgenden Teilintervalle von der Länge  $h$  gruppiert werden. Für die Momente zweiter bzw. vierter Ordnung der entsprechenden ungruppierten Verteilungen findet dann Verf. folgende Korrekturen: a)  $+ h^2/12$  bzw.  $+ h^2 \bar{\mu}_2/2 + h^4/80$ , b)  $- h^2/12$  bzw.  $- h^2 \bar{\mu}_2/2 + 31 h^4/240$  bei einer geraden Zahl von Teilintervallen, c)  $+ h^2(1 + h^2/a^2)/36$ , d)  $- h^2(1 - 2 h^2/5 a^2)/12$ , e)  $(1 - \frac{1}{4} a^2 h^2 \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2} a h)/a^2$ .  
T. Szentmártony.

**Cowden, Dudley J.:** The multiple-partial correlation coefficient. *J. Amer. statist. Assoc.* 47, 442—456 (1952).

Unter mehrfacher partieller Korrelation versteht Verf. die Korrelation zwischen der abhängigen und zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen, nachdem alle diese Veränderlichen vom Einfluß einer oder mehrerer weiterer Veränderlichen bereinigt sind. Verf. zeigt, daß es möglich ist, die bei Benutzung der „orthodoxen“ Rechenverfahren sehr mühsame und langwierige Berechnung von mehrfachen partiellen Korrelationskoeffizienten erheblich zu verkürzen, und zwar auf zweierlei Art. Die erste nennt er „abgekürzte Doolittle-Methode“, die zweite „Quadratwurzelmethode“. Anweisungen für eine „Bedeutsamkeitsprüfung“, geschichtliche Bemerkungen und Betrachtungen über Analogien mit der vielfachen Kovarianzanalyse vervollständigen die Untersuchungen.  
P. Lorenz.

**Bose, R. C. and T. Shimamoto:** Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. *J. Amer. statist. Assoc.* 47, 151—184 (1952).

„Partially balanced incomplete block designs“ were defined by Bose and Nair in a paper of that title published in *Sankhya* 4, 337—372 (1939). The author has found that all known designs of this form can be grouped into 5 types. He illustrates these types and remarks on the computational aspect of their analysis. Complete tables up to 10 replications will be published by the University of North Carolina.

S. Vajda.

**Whittle, P.:** On principal components and least square methods of factor analysis. *Skand. Aktuarietidskr.* 1952, 223—239 (1952).

An  $q$  Personen werden  $p$  Merkmale gemessen. Ziel der Faktor-Analyse ist, aus der  $(p, q)$ -Matrix  $X = (x_{ij})$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, q$ ) dieser Beobachtungen  $r$  Faktoren  $\beta_{jk}$  und entsprechende Gewichte  $\alpha_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) zu bestimmen, die unter gewissen Voraussetzungen und Nebenbedingungen  $x_{ij} = \alpha_{i1} \beta_{j1} + \dots + \alpha_{ir} \beta_{jr} + \varepsilon_{ij}$  erfüllen. Nach Skizzierung der wichtigsten einschlägigen Methoden (Hotellings Hauptkomponenten, Lawleys Methoden I und II, Young) bestimmt Verf. unter Annahme mit Mittelwert 0 und gleicher Varianz verteilter  $\varepsilon_{ij}$  nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate,  $U = \sum_i \sum_j \left( x_{ij} - \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \beta_{jk} \right)^2 = \text{Minimum}$ , normierte Schätzungen  $\alpha_{ik}$  und  $\beta_{jk}$  der Gewichte und Faktorenwerte mit Hilfe der Eigenwerte  $l_1, \dots, l_k$  der Matrix  $X \cdot X'$ . Die Vektoren  $a_k$  sind untereinander orthogonal, ebenso die  $b_k$ , und das Restquadrat reduziert sich durch Einführung derselben um  $\sum_i \sum_j x_{ij}^2 - U = \sum_{k=1}^r l_k$ .

Sodann behandelt Verf. den allgemeineren Fall beliebiger Varianzen der  $\varepsilon_{ij}$  und zeigt, daß dieser nur in 2 Spezialfällen zu gangbaren Lösungen führt: 1. relative Fehler-Varianzen bekannt, mittels Standardisierung auf konstante Fehler-Varianz (oben behandelt) zurückführbar („additiver“ Fall); 2. Fehlervarianzen jedes Maßes proportional zu seiner Varianz in der Population

(„multiplikativer“ Fall). Verf. referiert sodann die die Verteilungen von

$$s_1 = l_{r+1} \prod_{r+1}^p l_j \quad \text{und} \quad s_2 = \prod_{r+1}^p l_j \left[ (p-r)^{-1} \sum_{r+1}^p l_j \right]^{p-r}$$

betreffenden Ergebnisse von M. S. Bartlett und S. Wilks, auf denen sich Signifikanzteste für die Eignung einer  $r$ -Faktorenhypothese oder anderer Hypothesen aufbauen lassen. Schließlich werden asymptotische Darstellungen der Varianzen und Kovarianzen der Gewichte hergeleitet.

M.-P. Geppert.

● **Laadi, H. and O. Boivie: Lagged product sums of H. Wold's normal deviates.** Uppsala: University Institute of Statistics 1952. XI, 51 p. Skr.5,—.

Für die in 500 Spalten angeordneten, von H. Wold (Random normal deviates, Cambridge 1948; dies. Zbl. 36, 206) publizierten Zufallswerte einer normal verteilten Variablen tabellieren Verf. die verzögerten (lagged) Produktsummen

$$S_k = \sum_{j=1}^{50-k} x_j x_{j+k} \quad (k = 0, 1, \dots, 26).$$

An Hand dieser 27 · 500 Werte prüfen sie sodann die Zufälligkeit und Normalität der Ausgangswerte  $x$  mit Hilfe der beiden für Prüfung gegen die Alternativ-Hypothese eines autoregressiven Schemas erster Ordnung bzw. gegen die Hypothese  $x_i = \varepsilon_i + \alpha \cdot \varepsilon_{i-1}$  potentesten (most powerful) Testfunktionen  $D = S_1/S_0$  und  $D' = (S_1 + \alpha S_2 + \alpha^2 S_3 + \dots)/S_0$ , deren Verteilungen auf Grund der Nullhypothese durch Gram-Charlier-Reihen approximiert werden. Von den 500  $D$ -Werten sind nur 7, von den 500  $D'$ -Werten nur 9 signifikant mit  $P < 2\%$ . Ferner wird die empirische Verteilung der 500  $D$ - bzw.  $D'$ -Werte mit der auf der Nullhypothese beruhenden, entsprechenden theoretischen verglichen, einmal mit Hilfe von Kolmogoroffs  $\lambda$ -Test und einmal mit dem  $\chi^2$ -Test. Auch hier zeigt sich gute Übereinstimmung. Diese Resultate bestätigen diejenigen früherer Autoren, die die Zufälligkeit und Normalität von Wolds Zahlen mit Summen-, Quadratsummen-, Spannweiten-, Zeichen-, Absolutbetragsummen- und Produktsummentest geprüft hatten.

M.-P. Geppert.

**Lehmann, E. L.: Testing multiparameter hypotheses.** Ann. math. Statistics 23, 541—552 (1952).

It is shown that, apart from a trivial and practically useless exception, no unbiased tests exist of the hypothesis  $\theta_i \leq \theta_i^*$  ( $i = 1, \dots, s$ ;  $s > 1$ ). Under given conditions of monotonicity, certain types of minimax tests, such as tests of minimum bias, are derived and the type of results concerning two-sided tests is briefly discussed.

S. Vajda.

**Kruskal, William H. and W. Allen Wallis: Use of ranks in one-criterion variance analysis.** J. Amer. statist. Assoc. 47, 583—621 (1952).

Die Nullhypothese, daß  $C$  Stichproben von  $n_1, \dots, n_C$  Gliedern der gleichen Gesamtheit entstammen, prüft Verf. mittels der unter der Nullhypothese für große  $n_i$  asymptotisch mit  $C - 1$  F. G.  $\chi^2$ -verteilten Testgröße

$$H = \left\{ \frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^C \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1) \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{N^2 - N} \cdot \sum T \right\},$$

wobei nach Rangordnung aller  $N = \sum n_i$  zusammengeworfenen Glieder  $R_i$  die Summe der  $n_i$  Rangzahlen der  $i$ -ten Stichprobe bedeutet und  $T = (t-1)t(t+1)$  in der üblichen Weise je  $t$  gekoppelten Rängen Rechnung trägt. Es folgen Erörterungen über die Potenz des Kriteriums, seine Konsistenz, seine Eignung für das Behrens-Fisher-Problem; ferner seine Beziehungen zu und Vergleich mit einer Reihe verwandter Kriterien anderer Autoren (u. a. R. A. Fishers Permutationsteste, Friedman, Wilcoxon, Festinger, Mann und Whitney, Haldane und Smith, Terpstra, Mosteller, R. A. Fisher und Yates' normalisierte Ränge, Wald und Wolfowitzs Run-Test, Westenberg). Neben der aus der asymptotischen Multinormalverteilung der  $R_i$  folgenden  $\chi^2$ -Näherung werden noch Approximationen

der exakten  $H$ -Verteilung durch unvollständige  $\Gamma$ -Verteilung auf Grund von Erwartungswert und Varianz und durch unvollständige  $B$ -Verteilung auf Grund von Maximum, Erwartungswert und Varianz betrachtet. *M.-P. Geppert.*

**Mittmann, Otfried M. J.:** Zur Beurteilung empirischer Funktionen. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 288—289 (1952).

$y_1, y_2, \dots, y_N$  seien aufeinanderfolgende Beobachtungen mit ganzzahligem Argument, die man zerlegen kann gemäß  $y_i = E(y_i) + z_i$ , wobei die  $z_i$  von  $i$  unabhängig sein mögen. Verf. entwickelt ein Kriterium, das zu prüfen gestattet, ob die Reihe der  $y_i$  noch mit der Hypothese reiner Zufallsmäßigkeit vereinbar ist, das auf eine Anwendung der  $\chi^2$ -Verteilung hinausläuft. Für den Fall, daß  $y$  eine Zufallsveränderliche mit stetigem Argument ist, gelangt er zur Definition einer oberen Grenze für die bei praktischen Rechnungen zu bildende Klassenzahl, damit die Annahme reiner Zufallsmäßigkeit der Beobachtungswerte noch vertretbar ist. *P. Lorenz.*

**Waerden, B. L. van der:** Order tests for the two-sample problem and their power. *Indagationes math.* **14**, 453—458 (1952) = *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, Ser. A **55**, 453—458 (1952).

Consider two samples of sizes  $g$  and  $h$  respectively from two normal populations of equal variance. It is required to test the equality of their means against the one-sided alternative that the mean of the first is the larger. For small  $g$  and  $h$  van der Vaart has shown [*Nederl. Akad. Wet.*, *Proc.*, Ser. A **54**, 1 (1951)] that Wilcoxon's test [*Biometrics Bull.* **1**, 80 (1945)] is only slightly less powerful than Student's test. The author shows now that this is not necessarily so when  $g$  or  $h$  or both are large. He constructs therefore a „ $X$ -test“ based on the statistic

$X = \sum_{i=1}^g \frac{r_i}{(g+h+1)}$ , where  $r_i$  is the rank of any item in the first sample. He

gives two examples where this test is more powerful than that of Wilcoxon and he mentions that in a forthcoming paper it will be proved that for  $g$  and  $h$  large the distribution of  $X$  under the Null-hypothesis is nearly normal, that the mean is

zero and that the variance is  $\frac{gh}{g+h+1} \sum_{i=1}^{g+h} \psi\left(\frac{i}{g+h+1}\right)^2$  where  $\psi$  is the inverse

of the normal distribution.

*S. Vajda.*

**Buch, Kai Rander:** A note on sentence-length as random variable. *11. Skand. Mat.-Kongr.*, Trondheim 1949, 272—275 (1952).

Verf. übt berechtigte Kritik an dem unzureichenden Versuch von C. B. Williams [*Biometrika* **31**, 356—361 (1939)], auf Grund von je 600 Satzlängen der Autoren Chesterton, Shaw und Wells nachzuweisen, daß die Satzlänge zur Unterscheidung zwischen ihnen genüge. Vergleich von zwei 600-gliedrigen Stichproben mit Hilfe des Smirnoff-Tests ergibt überzufällige Verschiedenheit der Satzlänge desselben Autors in zwei zeitlich getrennten Werken.

*M.-P. Geppert.*

**Chernoff, Herman:** A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *Ann. math. Statistics* **23**, 493—507 (1952).

When testing two hypotheses  $H_0$  and  $H_1$  against each other, one sometimes has a choice between sampling one or another variable, and the question of their relative efficiency arises. Assume that a variable  $x$  has completely specified distributions under  $H_0$  and  $H_1$ , and consider tests with critical regions of form  $S_n \geq k$ , where  $S_n$  is the sum of the observations on  $x$ . Then there exists a number  $\varrho$  between 0 and 1 with the following property: Two samples of observations on the variables  $x^{(1)}$  and  $x^{(2)}$ , of sizes  $n_1$  and  $n_2$  (both large), yield the same error probabilities if  $n_1 |\log \varrho_1| = n_2 |\log \varrho_2|$ . There are interesting connections with measures of information and divergence between distributions.

*G. Elfving.*

**Bartlett, M. S.:** The statistical significance of odd bits of information. *Biometrika* **39**, 228—237 (1952).



The current tests for goodness of fit usually presuppose a sequence of independent and identical experiments. A more generally applicable tool is provided by the likelihood logarithm  $i_n = -\log p_n$ , where  $p_n$  is the probability, according to the nul hypothesis  $H$ , of the observed sequence  $e_1, \dots, e_n$  of events. The significance of an observed  $i_n$  may be judged by comparing it to its mean and standard deviation as determined by  $H$ . For the case of dependent events, a modified procedure is suggested: in  $i_n = -\log p(e_1) - \log p(e_2|e_1) - \dots$ , the means and variances of the 2nd, 3rd, etc., terms may under certain circumstances be replaced by the corresponding conditional means and variances, computed with the actual  $e_1, e_2, \dots$  for conditions. — The paper contains numerous interesting remarks of general scope.

*G. Elfving.*

Stange, K.: Ein Verfahren zur Beurteilung des Gütegrades von Mischungen. Ingenieur-Arch. 20, 398—417 (1952).

Verf. geht aus von der Vorstellung einer Mischung aus zwei körnigen Stoffen. Durch eine Stichprobe soll beurteilt werden, ob an der Entnahmestelle gut durchmischt war. Zugleich sollen die Fragen diskutiert werden, wie groß die Zahl der durch die Stichprobe erfaßten Körner mindestens sein muß, damit das zu bildende Urteil sinnvoll wird, und wie groß das Volumen der Stichprobe sein muß, wenn man auf die Zählung der Körner verzichtet. Verf. macht zunächst weitgehend vereinfachende Annahmen, von denen er sich im Laufe der Erörterungen nach und nach befreit, und nimmt weiter an, daß die Mischung mit Benutzung eines strengen Zufallsprozesses, z. B. der Ergebnisse von Roulettespielen, gebildet worden ist. Er setzt weiter voraus, daß die Zahl der Körner in der Mischung und in der Stichprobe sehr groß ist, und darf daher seinen Erörterungen die Gaußverteilung zugrunde legen. Es ist dabei nicht recht verständlich, warum er von einer „ausgearteten Verteilung“ spricht, auch erleichtert die unnötige Einführung der „Streuungsatrix“ das Verständnis nicht. Wichtig erscheint Ref. der Übergang von der Stichprobe bestimmter Teilchenzahl zu der Stichprobe bestimmten Volumens. Die Erörterungen werden dann auf Gemische aus drei Stoffen erweitert und durch eine größere Zahl guter Zeichnungen veranschaulicht.

*P. Lorenz.*

Bahadur, Raghu Raj and Leo A. Goodman: Impartial decision rules and sufficient statistics. Ann. math. Statistics 23, 553—562 (1952).

The paper provides certain improvements of earlier results by Bahadur (this Zbl. 38, 297). It is concerned with the attribution of weights (mixing proportions or randomization probabilities) to a finite number of populations when their distributions depend on unknown parameters, and the weights have to be attributed on the basis of samples from all of them.

*G. Elfving.*

Elfving, G.: Sufficiency and completeness in decision function theory. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 135, 9 S. (1952).

Let a set of  $m$  conditional probability functions  $p_i(y|x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) be given and define  $x$  to be a sufficient statistic for  $y$  if  $p_i(y|x)$  is independent of  $i$ . The author proves that this is equivalent to the fact that a finite class of non-sequential randomised decision functions dependent only on  $x$  is complete (in the sense of Wald's theory) relative to a finite class of such functions which depend on  $x$  and  $y$ , for any arbitrary loss function („uniformly complete“). *S. Vajda.*

Jensen, Arne: A short remark on the theory of random sampling and the theory of variance. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 195—200 (1952).

Verf. wendet den Grundgedanken der Varianzanalyse und der additiven  $\chi^2$ -Zerlegung an auf folgende zwei Stichprobenprobleme: Bestimmung von Konfidenzgrenzen des Mittelwertes einer  $N$ -gliedrigen Ausgangsgesamtheit auf Grund einer ihr entnommenen  $n$ -gliedrigen Stichprobe und Bestimmung der Konfidenzgrenzen des Mittelwertes der Variablen  $y$  in einer  $N$ -gliedrigen 2-dimensionalen Ausgangsgesamtheit mit bekanntem  $x$ -Mittelwert auf Grund einer ihr entnommenen Stichprobe von  $n$  Wertepaaren  $(x, y)$ . Vorausgesetzt wird hierbei, daß die endliche Ausgangsgesamtheit ihrerseits einer mit bekannten Parametern normal verteilten bzw. um eine bekannte Regressionsgerade normal verteilten Gesamtheit entstamme.

*M.-P. Geppert.*

Kiefer, J.: On minimum variance estimators. Ann. math. Statistics **23**, 627—629 (1952).

Bei  $x \in X$ ,  $\theta \in \Omega$  sei  $X$  eine Zufallsveränderliche mit der Dichte  $f(x; \theta)$  bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  und  $\lambda_1, \lambda_2$  seien zwei solche Maße über  $\Omega_\theta = \{h | \theta + \varepsilon \in \Omega\}$  mit  $E_i h = \int_{\Omega_\theta} h d\lambda_i(h)$  für  $i = 1, 2$ . Verf. zeigt, daß für eine erwartungstreue Schätzung  $t$  von  $\theta$  die Varianz  $E_\theta(t - \theta)^2$  größer oder gleich der oberen Grenze des Quotienten von  $(E_1 h - E_2 h)^2$  und

$$\int_x \frac{1}{f(x; \theta)} \left\{ \int_{\Omega_\theta} f(x; \theta + h) d[\lambda_1(h) - \lambda_2(h)] \right\}^2 d\mu$$

bezüglich der voneinander verschiedenen  $\lambda_1, \lambda_2$  ist. Zwei Beispiele zeigen, daß diese Ungleichung schärfer ist als die von C. Chapman und H. Robbins unlängst (dies. Zbl. **44**, 343) gewonnene bzw. eine (ohne Einschränkungen erzielte) nützlichere Gestalt besitzt, als die von E. Barankin (dies. Zbl. **34**, 230) gefundene.

T. Szentmártony.

Fraser, D. A. S. and Irwin Guttman: Bhattacharyya bounds without regularity assumptions. Ann. math. Statistics **23**, 629—632 (1952).

Die Methode, mit welcher D. G. Chapman und H. Robbins (dies. Zbl. **44**, 343) die Cramér-Rao'sche Ungleichung für die Varianz einer erwartungstreuen Parameterschätzung abgeleitet haben, wird ausgedehnt. Und zwar so, daß sich der von Bhattacharyya (dies. Zbl. **38**, 296) gefundenen unteren Grenze ähnliche ergeben ohne oder bei Vorhandensein von lästigen Parametern.

T. Szentmártony.

Raj, Des: On estimating the parameters of normal populations from singly truncated samples. Ganita **3**, 41—57 (1952).

Die Schätzung von Mittelwert  $m$  und Standardabweichung  $\sigma$  einer normal verteilten Ausgangsgesamtheit auf Grund einer in  $x_0 \equiv m - h\sigma$  gestutzten Stichprobe führt bei Anwendung der Momentenmethode nach K. Pearson und A. Lee [Biometrika **6**, 59—68 (1908)] bzw. der in diesem Falle damit äquivalenten Maximumlikelihood-Methode nach R. A. Fisher [Math. Tables **1**, 26—35 (1931)] auf die Funktionen

$$\psi_1 = \frac{\mu'_0 \mu'_2 - \mu'^2_1}{(\mu'_1 - h' \mu'_0)^2}, \quad \psi_2 = \frac{\mu'_0}{\mu'_1 - h' \mu'_0}$$

bzw.  $I_0/I_1$  und  $2I_0I_2/I_1^2$  mit

$$\mu'_p = (2\pi)^{-1/2} \int_{h'}^{\infty} t^p e^{-t^2/2} dt, \quad I_n = (2\pi)^{-1/2} (n!)^{-1} \int_{h'}^{\infty} (t - h')^n \cdot e^{-t^2/2} dt.$$

Zur Erleichterung und Verschärfung der Schätzungsmethode tabuliert Verf. diese bereits von anderen Verff. grob tabulierten Funktionen für  $h'$  in Schritten von 0,01. Zu diesem Zweck werden beiläufig einige die beteiligten Funktionen betreffenden Ungleichungen und Monotonitätseigenschaften bewiesen.

M.-P. Geppert.

Gupta, A. K.: Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample. Biometrika **39**, 260—273 (1952).

Verf. gibt — teilweise tabellarisch — eine Schätzung des Erwartungswertes  $\mu$  und des Streuungsquadrates  $\sigma^2$  einer Normalverteilung durch jene Werte an, für welche die Wahrscheinlichkeitsdichte der auf die Kenntnis der  $k$  kleinsten Elemente beschränkte, bezüglich der  $n - k$  größten Elemente also zensurierte  $n$ -gliedrige Stichprobe stationär wird. Für die verschiedenen  $k/n$  werden auch die asymptotischen Varianzen und Kovarianzen dieser Schätzungen tabuliert. Die Schätzwerte konvergieren zwar zu den wirklichen Werten, sie besitzen aber nur asymptotisch die kleinste Streuung (Effizienz) und sind nicht erwartungstreu (unbiased). Für  $3 \leq n \leq 10$  werden so für  $\mu$  und  $\sigma^2$  die Koeffizienten der  $k = 2, \dots, (n - 1)$ -gliedrigen besten Schätzungen aus den  $k$  kleinsten Stichprobenelementen angegeben.

Verf. vergleicht auch sein Verfahren mit jenem von A. Hald (1949), welches die einen vorgegebenen Wert übertreffenden Stichprobenelemente zensuriert.

*T. Szentmártony.*

**Moore, P. G.:** The estimation of the Poisson parameter from a truncated distribution. *Biometrika* **39**, 247—251 (1952).

Zur Abschätzung des Parameters  $\lambda$  einer auf die  $r + 1$  ersten Glieder verstümmelten Poissonschen Verteilung  $P\{X = m\} = \lambda^m e^{-\lambda}/m! = p_m$  wird die Identität  $\lambda = \frac{\sum_{m=0}^r m p_m}{\sum_{m=0}^{r-1} p_m}$  benützt. Diese ergibt mit den beobachteten Häufigkeiten  $n_0, \dots, n_r$  die Schätzung  $l = \frac{\sum_{m=0}^r m n_m}{\sum_{m=0}^{r-1} n_m}$  von  $\lambda$ . Verf. berechnet

Näherungswerte des Erwartungswertes und des Streuungsquadrates — also den Standardfehler — dieser Schätzung und vergleicht sie in einem konkreten Fall mit jenen, welche sich nach L. H. C. Tippet (1932) mit der umständlicheren Methode der maximalen Stichprobenwahrscheinlichkeit (likelihood) ergeben. Bei kleinen  $r$ -Werten zeigen sich bei den Standardfehlern zwischen den beiden Methoden beträchtliche Abweichungen.

*T. Szentmártony.*

**Tweedie, M. C. K.:** The estimation of parameters from sequentially sampled data on a discrete distribution. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **14**, 238—245 (1952).

Es liege eine auf  $N$  Gruppen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) verteilte Gesamtheit vor. Die Parameter  $\theta_1, \dots, \theta_R$ , von denen die  $\pi_i$  abhängen, sollen geschätzt werden auf Grund einer Sequenzstichprobe mit Zurücklegen. Verf. behandelt zunächst den (sowohl Bernoullis binomische als auch Pascals negativ binomische Verteilung als Spezialfälle umfassenden) einfachen Stichprobenplan, bei dem solange gezogen wird, bis genau  $\zeta$  Elemente aus den Gruppen  $1, \dots, k$  vorliegen. Aus der entsprechenden erzeugenden Funktion der Anzahlen  $x_1, \dots, x_N$  ( $x_1 + x_2 + \dots + x_N = n = \text{Zufallsvariable}$ ), in welchen die  $N$  Gruppen in der Stichprobe auftreten, werden deren Kovarianzen und asymptotische Multi-Normalverteilung für  $\zeta \rightarrow \infty$  bestimmt. Bei allgemeineren „linearen“ Stopppregeln, bei welchen die Ziehungen so lange fortgesetzt werden, als eine vorgegebene lineare Entscheidungsfunktion  $Z = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$  innerhalb bestimmter

Grenzen bleibt, wird zum gleichen Zweck eine von Wald stammende fundamentale Identität benutzt und ausgedehnt. Für die Informationsmatrix der Maximum-likelihood-Schätzung der Parameter  $\theta$  werden die Auswirkungen von Gruppenzusammenfassung und verschiedenen linearen Stopppregeln untersucht. Schließlich vergleicht Verf. sein Verfahren mit dem von F. J. Anscombe (dies. Zbl. **36**, 214) beschriebenen und wendet es beispielshalber auf einige Spezialfälle an.

*M.-P. Geppert.*

**Kiefer, J.:** Sequential minimax estimation for the rectangular distribution with unknown range. *Ann. math. Statistics* **23**, 586—593 (1952).

The problem indicated in the title is solved for cost function  $cn$  and loss function  $[(\theta - d)/\theta]^2$  where  $(0, \theta)$  is the distribution range and  $d$  the estimate of  $\theta$ . The solution turns out to be a fixed sample size procedure.

*G. Elfving.*

**Goodman, Leo A.:** Serial number analysis. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 622—634 (1952).

Aus  $p$  natürlichen Zahlen  $s + 1, s + 2, \dots, s + p$  wird eine  $n$ -gliedrige Stichprobe ohne Zurücklegen zufällig herausgegriffen, wobei  $s$  im Falle a) bekannt, im Falle b) unbekannt sei. Verf. beweist, daß im Falle a)  $e = g(n + 1)/(n - 1)$  mit  $g = \text{größte Zahl der Stichprobe}$ , im Falle b)  $f = d(n + 1)/(n - 1) - 1$  mit  $d = \text{Spannweite der Stichprobe}$  für  $p$  eine erwartungstreue Schätzung mit Minimalvarianz liefert. Auf der exakten Verteilung von  $g$  werden weiterhin Hypothesenprüfungen und Confidenzintervalle für  $p$  aufgebaut. Der Schätzungsparameter  $e$



wird verglichen mit dem von R. Ruggles und H. Brodie [J. Amer. statist. Assoc. **42**, 72—91 (1947)] angegebenen, ebenfalls erwartungstreuen, aber etwas weniger effizienten. Verf. illustriert seine Resultate an Stichproben aus Tabellen zufälliger Permutationen in W. C. Cochran und G. M. Cox (Experimental designs, New York 1950) und bestätigt hiermit die auch von deren Verff. nachgewiesene Zufälligkeit derselben.

M.-P. Geppert.

Sackmann, Louis A.: Mise en équation des résultats d'expériences. Lois empiriques linéarisées. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 689—691 (1952).

Sackmann, Louis A.: Mise en équation des résultats d'expériences. Nouvelles formules d'utilisation. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 783—784 (1952).

Verf. diskutiert ein Verfahren von Rufener, um eine Reihe von Meßwerten  $y$ , die von einer Veränderlichen  $x$  abhängen, durch eine Gleichung darzustellen. Das Verfahren geht davon aus, Funktionenpaare  $\varphi(x)$  und  $\psi(y)$  zu finden, für welche  $\Delta\psi/\Delta\varphi$  merklich konstant ist gegenüber den Meßfehlern, und führt über eine lineare Abhängigkeit (1)  $\psi(y) = A + B\varphi(x)$  zu einer expliziten Darstellung von  $y$  durch  $x$ . Der zweite Schritt ist die numerische Bestimmung der Konstanten. Verf. zeigt, daß aus der Annahme einer gleichbleibenden Streubreite der Meßfehler um die Kurve  $y = f(x, A, B)$  folgt, daß die Streubreite um die Gerade (1) veränderlich ist. Hierauf muß bei der Bestimmung der Konstanten  $A$  und  $B$  Rücksicht genommen werden. Das kann durch Gewichtung der quadratischen Abweichungen der Messungen von der gesuchten Geraden geschehen, wie Verf. in dem zu zweit genannten Aufsatz zeigt.

P. Lorenz.

Pizzetti, Ernesto: Dalle proporzioni continue alle progressioni. Metron **16**, Nr. 3—4, 27—40 (1952).

Si tratta di una particolareggiata analisi del processo di generalizzazione in progressione delle proporzioni a tre termini o proporzioni continue. Prese in considerazione tutte le possibili proporzioni continue si dimostra che dalla loro generalizzazione è possibile dedurre, oltre alle progressioni già note, solo alcuni altri tipi di progressioni di scarso interesse perché interpolabili con opportune progressioni geometriche; è interessante rilevare che, fra l'altro, si ritrova la cosiddetta „serie di Fibonacci“ — caratterizzata dalla proprietà che ogni termine è la somma dei due precedenti — che presenta una certa importanza in Statistica perché verificata dalle mode secondarie di alcune distribuzioni di caratteri vegetali. T. Salvemini.

### Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigation on inheritance. XII<sub>1</sub>, XII<sub>2</sub>. Probability of paternity. Proc. Japan Acad. **28**, 359—364, 365—369 (1952).

In previous papers cases (parts VII—IX, this Zbl. **47**, 386—387) were discussed where a man could prove his non-paternity against a child using hereditary characters of himself, of the child and perhaps of the child's mother, brothers, sisters etc. If a non paternity proof is impossible the problem remains to try to find a probability of paternity and non-paternity based on the knowledge of certain inherited characters. Again this may be considered on one hand using merely traits of father and child, on the other hand using likewise traits of a second child.

H. Geiringer.

Tricomi, Francesco G.: Distribuzione statistica dei batteri „duri a morire“. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **11**, 21—34 (1952).

Es wird angenommen: jede Mikrobe hat eine Wahrscheinlichkeit  $p$  „hart“ zu werden; diese Eigenschaft ist übertragbar; jede Mikrobe zerlegt sich nach einem festen Zeitraum in zwei. Gesucht wird die Häufigkeitsverteilung der „harten“ unter den  $2^m N$  Mikroben der  $m$ -ten Generation aus  $N$  nicht harten Stammeltern. — Die Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , daß  $n$  „harte“ Mikroben vorhanden sind, wird für kleinere

$n$  leicht rekursiv berechnet, für größere mittels einer neuen ganzen Funktion  $G(z) = \sum \frac{z^h}{h!(2^h - 1)}$  ausgedrückt. Biologische Experimente scheinen mit dieser Hypothese übereinzustimmen.

*B. de Finetti.*

**Tricomi, Francesco G.:** Una nuova funzione introdotta dalla batteriologia. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **11**, 35—46 (1952).

Die ganze Funktion  $G(z)$  der vorstehend besprochenen Abhandlung und darüber hinaus die verallgemeinerte Funktion  $G(z; a) = \sum \frac{z^h}{h!(a^h - 1)}$  sowie die verwandte Funktion  $P(u; a) = - \sum_{-\infty}^{+\infty} z a^h e^{z a^h} \quad (a^u = -z)$  werden hier in mathematischer Hinsicht untersucht. Es werden mehrere Eigenschaften angegeben; z. B.: 1. Beziehungen mit der berühmten Reihe  $\sum z^{c^h}$ ; 2.  $G(az) - G(z) = e^z - 1$ ; 3. für jedes  $c$  gibt es unendlich viele  $z$ , so daß  $G(z) = c$  (dasselbe für  $G', G''$ , usw.); 4. Periodizität von  $P(u)$ ; 5. für  $u$  reell,  $P(u) =$  praktisch eine Konstante [z. B., für  $a = 2$ ,  $|P(u) - 1,4427| < 0,0000143$ ]; 6. Asymptotisches Verhalten von  $P, G, G'$ , usw.

*B. de Finetti.*

**Whittle, P.:** Certain nonlinear models of population and epidemic theory. Skand. Aktuarietidskr. **1952**, 211—222 (1952).

Anknüpfend an die von J. E. Moyal (dies. Zbl. **39**, 216) verwendeten Begriffe der derivierten charakteristischen Funktion  $L$  und derivierten Momente, untersucht Verf. eindimensionale stochastische Prozesse nichtlinearer Form  $\partial\Phi/\partial t = L(\theta, \partial/\partial\theta, t)\Phi$ , deren in Reihenform gegebene Lösung mit Hilfe eines geeigneten Operators zur approximativen Bestimmung der Momente führt. Insbesondere wird das Verhalten von Mittelwert und Varianz untersucht. Fellers stochastisch-logistisches Bevölkerungswachstum und Bartlett's Infektionsmodell werden als Spezialfälle erörtert.

*M.-P. Geppert.*

• **Yntema, L.:** Mathematical models of demographic analysis. (Diss.) Leiden: J. J. Groen en Zoon, N. V., 1952. VIII, 78 p.

Verf. gibt zunächst einen Abriß der klassischen „uni-sexualen“ Bevölkerungstheorie mit der Integralgleichung  $B_f(t) = \int_0^\infty B_f(t-y) \varphi_f(y) dy$  für die weibliche Geburtenintensität zur Zeit  $t$ , die Nettofruchtbarkeit (d. h. die uni-sexuale Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt der Geburt, ein lebendes Kind gleichen Geschlechts zu haben)  $\varphi_f(y) = p_f(y) {}_fF_f(y)$ ,  $p =$  Erlebenswahrscheinlichkeit,  ${}_fF_f(y) =$  Wahrscheinlichkeit für eine  $y$ -jährige Frau, ein lebendes Mädchen zu gebären. Bei stabiler Bevölkerung ist  $B_f(t) = B_f(0) \cdot e^{\varrho_f t}$ , wo  $\varrho_f \leq 0$  die natürliche Wachstumsrate der weiblichen Bevölkerung ist. Entsprechend ist  $B_m(t) = B_m(0) \cdot e^{\varrho_m t}$  mit  $\varrho_m$  als Wachstumsrate der männlichen Bevölkerung. Einer Besprechung der Einwände gegen die uni-sexuale Theorie folgt eine Darstellung der „verbundenen“ Theorie von Pollard mit  $B(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty B(t-x-y) {}_m\varphi_m(x) {}_f\varphi_f(y) dx dy$  (die Verf. als (1,1)-Iteration der uni-sexualen Theorie auffaßt und zur  $(k,l)$ -Iteration erweitert) und der bisexualen Theorie von Karmel, der „Personen“ als Mittelwerte von Männern und Frauen einführt. Das arithmetische Mittel erweist sich dem geometrischen und dem harmonischen überlegen; Verf. nimmt die Nuptialitäts-Faktoren als Gewichte, d. h. die unisexuellen Heiratswahrscheinlichkeiten. Im 5. Teil gibt er numerische Beispiele aus Zahlen der niederländischen Bevölkerungsstatistik. Es ergibt sich, daß die verbundene und die bisexuale Wachstumsrate durch das einfache arithmetische Mittel der beiden uni-sexualen Raten sehr gut angenähert werden. In einem 4. Teil stellt Verf. u. a. fest, daß die Wachstumsrate der stabilen Bevölkerung, gegen die eine gegebene tendiert, als wahres Maß der natürlichen Zunahme einen retrospektiven Sinn hat, nicht aber prospektiv aufgefaßt werden kann. Er gibt eine Systematik weiterer charakteristischer Zahlen.

*H. Härlen.*

**Gini, C.:** La surface et le fond des problèmes démographiques internationaux. Metron **16**, Nr. 3—4, 101—112 (1952).

Il problema dei rifugiati (espulsi o fuggitivi) viene esaminato in questo lavoro dal punto di vista dello studioso. Già altre volte l'A. si era occupato — come può vedersi dalla bibliografia richiamata nel testo — dei fattori demografici nella evo-

luzione delle Nazioni e nella politica internazionale, così come nella determinazione delle guerre e delle rivoluzioni. — Il lavoro contiene molti richiami storici su altri trasferimenti ed esodi di popolazioni e sulle conseguenze che tali movimenti hanno determinato, soprattutto dal punto di vista demografico e produttivo. — Oggi questi movimenti sono determinati prevalentemente dalla spinta slava. Il Gini si sofferma a mettere in rilievo che se la circolazione degli uomini fosse libera e non ostacolata da coercizioni e impedimenti politici ne verrebbe un potenziamento produttivo. Le resistenze che alcuni popoli pongono al movimento spontaneo degli uomini è spesso, a lungo andare, causa di conflitti o di rivoluzioni o di decadenza. *T. Salvemini.*

**Sverdrup, Erling:** *Basic concepts in life assurance mathematics.* Skand. Aktuarietidskr. 1952, 115—131 (1952).

Nach wie vor gehen die Ansichten darüber auseinander, ob die Mathematik der Lebensversicherung auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage stehen darf oder muß (vgl. Ber. des 12. internat. Kongr. der Versicherungsmath., Luzern 1940). Ref. hält dafür, daß beide Betrachtungsweisen, d. h. einerseits die wahrscheinlichkeitstheoretische Fundierung und andererseits das einfache Übertragungsmodell, für den weitaus größten Teil der Lebensversicherungsmathematik gleichwertig sind und zum gleichen Ergebnis führen. Einzig in der Risikotheorie ist ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. ohne mathematische Statistik nicht auszukommen. — Verf. hält eine wahrscheinlichkeitstheoretische Basis der Mathematik der Lebensversicherung für nötig und besser und nennt dafür mehrere Gründe. Einmal lasse sich das Äquivalenzprinzip widerspruchsfreier darstellen; das „Gesetz der großen Zahlen“, das oft nur bildlich im Sinne einer Mahnung verwendet wird läßt sich auch formal in den Formelapparat einbeziehen. Ferner nennt Verf. die Unmöglichkeit, ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung zu entscheiden, ob eine Schwankung in der Sterblichkeit nur zufällig oder durch eine zeitliche Entwicklung effektiv bedingt ist. Schließlich wird auch die Risikotheorie als Grund für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie genannt. Die vorliegende Arbeit gibt vor allem eine strenge Formulierung des Äquivalenzprinzips auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis. *E. Zwinggi.*

**Richard, P.-J.:** *La représentation analytique des tables de mortalité.* Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 64, 177—268 (1952).

Verf. gibt eine klare, systematische und geschlossene Darstellung des Problems von Quiquet, die allgemeinste Form der Hypothese von Simson zu finden:  $N$  Leben auf  $n < N$  Leben zurückzuführen. Die einzigen Lösungen dieses Problems sind Quiquets Überlebensfunktionen  $l(x) = \exp\left[-\int \mu_x dx\right] = \exp\left[A + Bx + \sum e^{r_i x} f_i(x)\right]$ . Im letzten Kapitel der Arbeit gibt Verf. die Verallgemeinerung wieder, die Hochart vorgenommen hat: Überlebensfunktionen bei Selektion, also mit zwei unabhängigen Variablen. *H. Härten.*

**Roijsen, J. P. van und A. de Hullu:** *Ausgleichung der Sterbetafel G. B. M. 1947—1949 nach Makeham.* Verzekerings-Arch. 29, 130—137 (1952) [Holländisch].

Ausgleichung nach der Methode von Czuber mit  $x = 25$ ,  $t = 20$  ergibt  $c = 1,108274$ ,  $g = 0,999728$ ,  $s = 0,999235$ ,  $k = 96065,9$ . Verff. geben die versicherungstechnischen Grundwerte sowie die Kommutationswerte für einfache und verbundene gleichaltrige Leben zu 3% tabelliert an, sowie Vergleichsrechnungen für Barwerte und Prämien aufgeschobener und sofort beginnender Leibrenten nach der Original- und der ausgeglichenen Tafel: bis  $x = 80$  sind die Differenzen unerheblich, darüber hinaus die Barwerte der ausgeglichenen Tafel etwas zu niedrig. *H. Härten.*

**Hoek, U. H. van der:** *Einzelne Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Sterblichkeitsgesetz und der Anzahl der beobachteten Todesfälle einer offenen Gesamtheit.* Verzekerings-Arch. 29, 87—96 (1952) [Holländisch].

Verf. gibt neue Beweise 1. dafür, daß die Zahl der rechnungsmäßigen Toten einer offenen Gruppe mit angenommener Überlebensordnung  $l_{x+z}$  und den tatsächlich festgestellten Differenzen zwischen Ein- und Austritten  $r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , durch

$$D_z = 1 - \frac{l_{x+z}}{l_x} + R_z - l_{x+z} \int_0^z \frac{R_t}{l_{x+t}} dt$$



gegeben ist, 2. daß umgekehrt die Sterbeintensität (und damit das „Sterbe-gesetz“) sich als  $\mu_{x+z} = D'_z / (1 + R_z - D_z)$ ,  $D'_z = dD_z/dt$  aus den tatsächlichen Toten  $D_z$  und aus  $R_z$  ergibt, also

$$l_{x+z} = l_x \exp \left[ - \int_0^z \frac{D'_t}{1 + R_t - D_t} dt \right].$$

Für das 1. Problem gibt Verf. außerdem den früheren Beweis von F. Schuh [Arch. voor Verzekeringwetenschap 11, 1—22 (1910) und 12, 379—399 (1912)] wieder. Zum 2. Problem stellt er in dem Beweis von F. Insolera [Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 62, 611—621 (1927)], wiedergegeben durch A. Linder (Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln, Bern 1934), einen Fehler fest.

H. Härten.

Wit, G. W. de: Eine Anwendung von Pearsons  $\chi^2$ -Kriterium. Verzekerings-Arch. 29, 138—145 (1952) [Holländisch].

Siegenbeek van Heukelom, der Gesellschaftsarzt der „Nationale Levens-verzekering Bank“ in Rotterdam, hatte seit 1. 1. 1913 den gesamten Zugang der Gesellschaft nach den vier Gruppen A. Versicherungen mit als normal angenommener Sterblichkeit, B. Versicherungen mit Anomalien, die noch keinen Prämienschlag benötigten, C. Versicherungen mit erhöhter Prämie, die von der Gesellschaft selbst gehalten wurden, D. Anomale, die an die holländische Versicherungsgesellschaft für Versicherung Anomaler „de Hoop“ abgegeben wurden, kartenmäßig gesammelt. Das Kartenmaterial ging bei der Bombardierung von Rotterdam verloren. Zusammenstellungen über das Ergebnis von 25 Beobachtungsjahren wurden jedoch gerettet. Verf. hat Teilauswertungen mit Hilfe des  $\chi^2$ -Tests vorgenommen und gefunden, daß die Unterschiede zwischen den Gruppen A und B an der 5 %-Grenze liegen (bei Auswertung der 30 Altersjahrgänge von 31 bis 60 etwas unterhalb dieser Grenze, bei Auswertung desselben Materials in Gruppen von 5 Jahren etwas oberhalb); die Unterschiede können also noch als zufällig angesehen werden. Die Unterschiede zwischen den Gruppen A und C, A und D, B und C, B und D, C und D sind dagegen als statistisch gesichert anzusehen.

H. Härten.

Beard, R. E.: Some further experiments in the use of the incomplete gamma function for the calculation of actuarial functions. J. Inst. Actuaries 78, 341—353 (1952).

Verf. gleicht die modifizierte Kurve der Sterbefälle  $\mu_t l_t - \kappa l_t$ , wo  $\kappa$  eine Konstante ist (das Minimum von  $\mu_x$ ), durch eine Pearson-Kurve vom Typ III aus und erhält u. a.

$${}_t p_x = e^{-\kappa t} \frac{(\gamma + \kappa)(\omega - t - x)}{\int_0^{\omega - t - x} e^{-z} z^\gamma dz} \bigg| \frac{(\gamma + \kappa)(\omega - x)}{\int_0^{\omega - x} e^{-z} z^\gamma dz}.$$

Damit ergibt sich erstens eine neue Methode der Extrapolation von Leibrententafeln: Für die Rentnerinnentafeln  $O^{af}$ ,  $a(f)$  und für die Schlußzahlen aus den englischen Erfahrungen 1921 bis 1948, von Verf. in die zwei Abschnitte bis 1935 und ab 1935 zerlegt, findet er, daß  $p$  und  $a = p/(\gamma + \kappa)$  als konstant angenommen werden können, während das Grenzalter  $\omega$  linear steigt und  $\kappa$  in geometrischer Progression abnimmt. Mit dem Ansatz  $p = 11,0$ ,  $a = 31,75$ ,  $\omega = 115,15 + 0,05 s$  und  $\kappa = 0,0077 \cdot 2^{-0,02 s}$ , mit  $s$  = Differenz von Geburtsjahr und 1860, erhält er Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q_x$ , die für die Jahre 1878, 1911/12, 1936 gut mit denen der Tafeln  $O^{af}$ ,  $a(f)$  und den Schlußzahlen 1921 bis 1948 übereinstimmen. Für 1950 und 1980 ergibt sich ebenfalls gute Übereinstimmung mit den bisherigen Extrapolationen. Für die Rentnertafeln  $O^{am}$ ,  $a(m)$  und die Schlußzahlen aus den Erfahrungen 1921 bis 1948 Männer findet Verf. gute Übereinstimmung, wenn das Alter um 0,05 (Geburtsjahr - 1786), höchstens um 4 und wenn  $\kappa$  um 60% erhöht wird. (Ab Zugangsjahr 1950 Erhöhung von  $\kappa$  nur um 20%.) — Zweitens wendet Verf. seine Methode auf verbundene Leben an und erhält z. B.

$${}_t p_{xy} = \frac{e^{-2\kappa t} \frac{(\gamma + \kappa)(\omega - t - x)}{\int_0^{\omega - t - x} e^{-z} z^\gamma dz} \frac{(\gamma + \kappa)(\omega - t - y)}{\int_0^{\omega - t - y} e^{-z} z^\gamma dz}}{\frac{(\gamma + \kappa)(\omega - x)}{\int_0^{\omega - x} e^{-z} z^\gamma dz} \frac{(\gamma + \kappa)(\omega - y)}{\int_0^{\omega - y} e^{-z} z^\gamma dz}},$$

so daß die Funktionen für zwei verbundene Leben mit Hilfe einer Pearson-Kurve III. Typs wie die für Einzelleben gerechnet werden können. Verf. gibt eine Tafel der ersten und zweiten Momente für  $p = 10,2$  und errechnet daraus  $\omega$  und  $a$ . (Es genügt der eine Wert  $p = 10,2$  für die Approximation der Werte für verbundene Leben mit beliebigen Sterbetafeln.) Weiter gibt Verf. eine Tabelle der  $\omega$  und  $a$  für verschiedene Kombinationen von 3 verbundenen Leben, bei denen mit  $p = 10,2$  und mit  $3\pi$  zu rechnen ist.

H. Härten.

Jansen, J. H. C.: Gleichgewichtslinien in der Sozialversicherung. Verzekerings-Arch. 29, 97—114 (1952) [Holländisch].

Nach kurzem Abriß der technisch wichtigsten Bestimmungen des holländischen Invaliden-Versicherungs-Gesetzes (Invaliditeitswet: Beitrittsalter 14 bis 35, Beitragszahlung durch den Arbeitgeber bis zu einer bestimmten Lohngrenze, Weiterversicherungsmöglichkeit, beitragsfreie Versicherung, Grund- und Steigerungsbeträge der Renten) berichtet Verf. über die von Lindner bei der „Rijksverzekeringsbank“ eingeführte Methode, die künftigen Beitragseingänge abzuschätzen. Die erste Methode der Übergangswahrscheinlichkeiten (von der Gruppe A der regelmäßigen Beitragszahler zu der Gruppe B der sogenannten ruhenden Versicherungen und umgekehrt), abgestuft nach erreichten Altern, ergab schon bei der zweiten 5-Jahres-Bilanz 1929 Schwierigkeiten, weil diese Übergangswahrscheinlichkeiten von der Bestandsdauer abhängig sind. Lindner ging deshalb von der Annahme aus, daß das Verhältnis der Gruppen A und B dem der Aktiven zu den Nichtaktiven in der Gesamtbevölkerung gleicht; er macht also nicht nur Annahmen über bevölkerungstheoretische Rechnungsgrundlagen, sondern auch über ökonomische (Beschäftigungsstand). Das Verhältnis der Versichertenzahl der Gruppe A im Alter  $x+n$ , die vor  $n$  Jahren der Gruppe A oder der Gruppe B angehörten, zur Zahl der  $(x+n)$ -jährigen Aktiven der Bevölkerung ist  $a_{(x)+n}^{k+n}$ ; entsprechend das der  $(x+n)$ -jährigen Versicherten der Gruppe B zu den gleichaltrigen Aktiven  $b_{(x)+n}^{k+n}$ . Im Gleichgewichtszustand, der — stationäre Verhältnisse vorausgesetzt — erreicht wird, wenn die Einrichtung 51 Jahre besteht (niedrigstes Beitragsalter 14, Altersrente ab 65), entfallen die oberen Indizes  $k+n$ .  $a_{(x)+n}$  wird schrittweise für  $n = 1, 2, \dots$  gerechnet. Für alle Alter gilt  $a_{(x)+n} + b_{(x)+n} = a_x + b_x$ , für  $x \geq 35$  ist dieser Ausdruck konstant. Die Gleichgewichtslinien  $a_x$  und  $a_x + b_x$  sind für die Bilanzen Ende 1929, 1934 und 1939 tabelliert. Für  $x \geq 35$  ist  $a_x + b_x$  etwa 0,85; d. h. nur 15% der holländischen Bevölkerung sind bis zum 35. Lebensjahr nicht — wenigstens vorübergehend — Lohnempfänger (mit höchstem Jahreslohn 3000,— hfl.) gewesen. H. Härten.

Philip, G. C. and W. I. S. Robson: Valuation of group pension schemes. Trans. Fac. Actuaries 21, 61—111 (1952).

Gruppenversicherungsverträge, durch die Firmen für ihre Belegschaften Pensionen versichern, unterscheiden sich in der Regel so stark in den ihnen zugrunde liegenden Beitrags- und Leistungssystemen, daß sie der Versicherer zur Vereinfachung der jährlich von ihm vorzunehmenden Deckungsrückstellungsberechnung nicht zusammenfassen kann. Es ergibt sich damit das Problem, die für jeden Vertrag vorzunehmende Rückstellungsberechnung so rationell wie möglich zu gestalten. Mit der vorliegenden Arbeit soll eine Diskussion dieses Problems, das durch die starke Zunahme des Gruppenversicherungsgeschäftes an praktischer Bedeutung gewonnen hat, eingeleitet werden. — Nach Einführung in die Problemstellung werden zunächst die über den jeweils versicherten Personenkreis zur Verfügung stehenden technischen Daten und die Wahl des Bezugszeitpunktes für die Berechnung erörtert. Für Leistungssysteme, welche unter Anrechnung bzw. Nichtanrechnung der beim Abschluß des Vertrages bereits zurückgelegten Dienstzeit mit der fernerer Dienstzeit steigende Pensionen mit oder ohne Rückgewähr von verzinslich bzw. unverzinslich angesammelten Beitragsteilen beim vorzeitigen Tode der Versicherten vorsehen, werden die Formeln für die Brutto- und Nettobeiträge und -rückstellungen zusammengestellt. — Im Anschluß daran wird für eine näherungsweise Berechnung der Rückstellungen, bei der ohne ins Gewicht fallende Genauigkeitsverluste der Arbeitsaufwand erheblich verringert wird und nicht mehr technische Daten verwendet werden, als für den Abschluß des Vertrages erforderlich sind, das Verfahren von Trachtenberg vorgeschlagen. Seine Handhabung und die mit ihm zu erzielende Genauigkeit wird abschließend an einem Zahlenbeispiel gezeigt. — Die Arbeit wird durch die auszugsweise Wiedergabe ihrer Diskussion in der Fakultät ergänzt. G. Friede.

Rijkers, H.: Sur la dette latente et les droits individuels des assujettis à un régime obligatoire d'assurances sociales. Assoc. roy. Actuaire Belges, Bull. 56, 15—26 (1952).

Wird angenommen, daß in einem Versichertenbestand, welcher Personen vom tiefsten Eintrittsalter  $z$  bis zum Rücktrittsalter  $s$  umfaßt, statt der individuellen Prämie  $P_x$  die dem Alter  $z$  entsprechende Prämie  $P_z$  bezahlt wird, so entsteht der „latente Fehlbetrag“. Die Abgeltung des latenten Fehlbetrages wird dargestellt unter der Voraussetzung, daß von der vollen Leistung der Bruchteil  $P_z/P_x$  durch das Anwartschaftsdeckungsverfahren gedeckt wird, während für den Rest  $1 - P_z/P_x$

oder für die Abtragung des für den Eröffnungsbestand vorhandenen Eintrittsdefizites ein Umlageverfahren gilt. Formal ergibt sich eine Zuschlagsprämie zu  $P_z$ , welche für den Fall des stationären Versichertenbestandes näher untersucht wird.  
E. Zwinggi.

Franckx, E.: La méthode de Jecklin pour le calcul des réserves. Assoc. roy. Actuaire Belges, Bull. 56, 61—68 (1952).

Die *F*-Methode von Jecklin zur näherungsweisen Berechnung des Deckungskapitals in Beständen setzt voraus, daß sich die Einzelreserve ganz oder über Intervalle durch eine gleichseitige Hyperbel wiedergeben lasse. Ergänzend zu einem von Jecklin gegebenen Kriterium leitet der Verfasser eine graphische Methode ab, die im Einzelfall zu entscheiden erlaubt, ob die Annahme des hyperbolischen Verlaufs zulässig ist oder nicht. Außerdem wird eine Verfeinerung der Methode von Jecklin angegeben, welche eine Verbesserung der numerischen Ergebnisse bedeutet.

E. Zwinggi.

Fraisse, Jean: Remarques sur le calcul des réserves mathématiques. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 63, 23—92 (1952).

Aus der Rekursionsformel  ${}_kV + P = v \cdot q_{x+k} + v \cdot p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V$  für die Reserve  $V$  nach  $k$  bzw.  $k+1$  Jahren irgendeiner Versicherung mit fester Todesfall-Leistung und gleichbleibender Jahresprämie  $P \geq 0$ , Todesfälle Ende Jahr angenommen, ergibt sich mit  $B = P + i/(1+i)$  für die Risikosummen  $r_{x+k}$  und  $r_{x+k+1}$ :  $r_{x+k+1} D_{x+k+1} = r_{x+k} D_{x+k} - B \cdot D_{x+k}$  und daraus rekursiv  $r_{x+n} D_{x+n} = r_{x+k} D_{x+k} - B \cdot (D_{x+k} + D_{x+k+1} + \dots + D_{x+n-1}) = r_{x+k} D_{x+k} - B(N_{x+k} - N_{x+n-1})$ . Für die Versicherung auf  $n$ -jährige Dauer ist also  $r_{x+k} D_{x+k} - B N_{x+k} = A$  eine charakteristische Konstante für alle  $k$ . Das ermöglicht die summarische Berechnung der Risikosummen und damit der Reserven für einen nach erreichten Altern gegliederten Bestand — analog zur Altenburgerschen Hilfszahlenmethode. (Für Versicherungen mit variabler Prämie oder variabler Summe erhält  $A$  noch ein drittes Glied mit der Doppelsumme  $S_{x+k}$ .) Verf. zeigt, daß die allgemeine Form  $A$  ein einheitliches Nomogramm für die mathematischen Reserven, Einmal- und laufende Prämien, lebenslängliche und abgekürzte Rentenbarwerte und für die wichtigsten versicherungstechnischen Transformationen gestattet. Er benutzt seine Darstellung ferner u. a. zur Verallgemeinerung der Meierschen Ko-Methode für Reservenberechnung ohne Gruppenbildung.

H. Härten.

Lefèvre, J.: Application de la théorie collective du risque à la réassurance „Excess-loss“. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 160—187 (1952).

Die Berechnung der Rückversicherungsprämie nach dem System „Excess-loss“ erfolgt überwiegend empirisch oder dann unter der vereinfachenden Annahme, die Schadenverteilung folge der Normalkurve. Die exakte Berechnung der Rückversicherungsprämie kann aber nur über die „kollektive Risikotheorie“ geschehen. Der Verfasser gibt zuerst eine genaue Darstellung des Systems „Excess-loss“ und anschließend die Prämienberechnung aus der individuellen und kollektiven Risikotheorie. Sodann werden zwei Schadenverteilungen angenommen; die erste, mehr theoretischer Art, setzt für die Schadenhöhe  $p(z) = e^z$ , die zweite basiert auf dem effektiven Verlauf in Beständen von Kapitalversicherungen. Beide Beispiele werden vollständig durchgerechnet; das Ergebnis zeigt, daß die Annahme, die Schadenhäufigkeit folge der Normalverteilung, nur zu groben Näherungen führt.

E. Zwinggi.

Lefèvre, J.: Formules de calcul des fonctions d'Esscher en théorie collective du risque. Assoc. roy. Actuaire Belges, Bull. 56, 27—33 (1952).

Vorerst werden die Formeln von Esscher der kollektiven Risikotheorie verallgemeinert; die darin auftretenden Funktionen lassen sich nur schwer ziffernmäßig ermitteln, so daß sich eine Umformung aufdrängt. Das Ergebnis stellt sich in Form



einer leicht auszuwertenden Rekursionsformel dar, so daß die Berücksichtigung von Funktionen 7. Grades statt wie bisher 3. Grades keine Mühe verursacht.

*E. Zwinggi.*

**Krijger, C. G.: Versicherung anomaler Risiken.** Verzekerings-Arch. **29**, 115—129 (1952) [Holländisch].

Verf. zeigt erstens, daß eine gleichbleibende additive Übersterblichkeit (Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeiten  $q_x$  um konstantes  $\gamma$ ) ausgeglichen werden kann, indem der Rechnungszinsfuß  $i$  durch  $(1 + i) \cdot e^\gamma - 1$  ersetzt wird. Er zeigt ferner, daß es bei Sterblichkeitsverlauf nach Makeham zu jedem Paar  $\varepsilon_x, \varepsilon_{x+t}$  von vorgegebenen Übersterblichkeiten in den Altern  $x$  und  $x + t$  eine konstante additive Übersterblichkeit  $\gamma$  und eine Alterserhöhung  $k$  gibt. Dabei hält er — im Gegensatz zu Jecklin [Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. **53**, 57—77 (1953)] — Werte von  $\gamma < 0$  und von  $k < 0$  für sinnlos und gibt deshalb entsprechende Grenzen für das Verhältnis  $\varepsilon_x/\varepsilon_{x+t}$  bei verschiedenen Kombinationen  $x, t$ . Verf. stellt weiter fest, daß aus  $\varepsilon_{x+t} = \varepsilon_{x+t'}$  konstante multiplikative (prozentuale) Übersterblichkeit folgt. Schließlich gibt er für solche prozentualen Übersterblichkeiten (zwischen 10% und 500%, bis 50 % steigend um je 10%, dann bis 300% um je 25%, schließlich um je 50%) eine Tabelle der zugehörigen Alterserhöhungen  $k$  und der Erhöhung des Rechnungszinsfußes, die dem zugehörigen  $\gamma$  entspricht.

*H. Härten.*

**Champernowne, D. G.: The graduation of income distribution.** Econometrica **20**, 591—615 (1952).

Verf. hatte 1937 (Econometrica **5**, 379—381) Kurven  $y = A/[\cosh(Bx - C) - D]$  zur Ausgleichung von Einkommensverteilungen vorgeschlagen, also mit 4 Parametern. Er gibt ihnen jetzt die Form  $\Phi(x) = n/[\cosh\{\alpha\gamma(x - x_0)\} + \lambda]$ ,  $\gamma = 1/\log e$ , also symmetrisch in bezug auf  $x_0$ , den Medianwert vom Logarithmus des Einkommens (income-power,  $x = \log t$ ). Integration von  $f(t) = \Phi(x) \cdot dx/dt$  ergibt, je nachdem ob  $|\lambda| < 1$ ,  $\lambda = 1$  oder  $\lambda > 1$ , Formeln für  $F(t)$ , die Zahl der Einkommen  $> t$ , mit den Parametern  $t_0$  = Medianwert der Einkommen,  $N$  = Gesamtzahl der Personen mit Einkommen,  $\alpha$  = Pareto-Konstante für das Maß der Ungleichheit in der Verteilung der höheren Einkommen. Ein vierter Parameter, welcher der Verteilungskurve asymptotischen Verlauf zur Pareto-Kurve  $\log y - \beta - \alpha \log t$  ermöglicht, ist mit Hilfe von  $\beta$  zu bestimmen. In verschiedenen Beispielen zeigt Verf. die Bestimmung der Parameter aus den Pareto-Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  und aus zwei gegebenen von den folgenden Daten:  $N$ ,  $t_0$ , arithmetisches Mittel  $t$  oder andere Mittelwerte des Einkommens, Beobachtungswerte  $F(t_1)$  und  $F(t_2)$  für zwei bestimmte Einkommen. Die Kurven geben eine gute Näherung für die Einkommen über dem Medianwert, während für darunterliegende Einkommen alle bekannten Näherungen ungenau sind. Eine bessere Anpassung für diese Fälle ist mit Hilfe eines fünften „Schiefheits“-Parameters  $\sigma$  auf Kosten einfacher ökonomischer Interpretation möglich;  $t_0$  ist dann nicht mehr Medianwert, sondern die Stelle größter Einkommensdichte, das arithmetische Mittel der Einkommen ist nicht mehr ohne weiteres darstellbar, die Symmetrie in bezug auf  $x_0$  bzw.  $t_0$  wird aufgehoben.  $\sigma$  ist das Verhältnis der Personenzahl mit Einkommen über  $t_0$  zur Zahl der Personen mit Einkommen unter  $t_0$ . In einem Beispiel (Vereinigten Staaten 1947) ist  $\sigma = 0,5439$ . Verf. gibt Beispiele der Ausgleichung nach verschiedenen Formeln.

*H. Härten.*

**Tinbergen, J.: Four alternative policies to restore balance of payments equilibrium.** Econometrica **20**, 372—390 (1952).

Verf. vergleicht vier Möglichkeiten, gestörtes Gleichgewicht der Zahlungsbilanz in einer geschlossenen Gruppe von Ländern mit hohem Beschäftigungsstand wieder herzustellen: 1. diskriminierende Zölle und Importsubsidien, 2. diskriminierende Zölle, 3. nicht diskriminierende Zölle, 4. Währungsabwertung. Dabei macht er vereinfachende Annahmen: a) In einem Makro-Modell führt jedes Land  $i$  in jedes andere Land nur eine Ware  $x_i$  aus, Rohmaterial wird nicht eingeführt; b) In einem Mikro-Modell hängt die Nachfrage nach einer Einfuhrware nur von ihrem Preis ab. Aus der Forderung, daß die gesamte Wohlfundsfunktion zum Maximum wird, ergibt sich: I. bei den Verfahren 1 und 4 wird der internationale Handel nicht beeinträchtigt, wohl aber bei 2 und 3. II. Die direkte Belastung der einzelnen Länder (die Minderung der zu ihrer Verfügung stehenden Gütermengen)

ist bei den ersten drei Verfahren gleich dem ursprünglichen Zahlungsdefizit, bei 4 höher; Verfahren 4 beschränkt den Konsum der zahlungsschwachen Länder also relativ stärker, ist aber wegen der Aufrechterhaltung des internationalen Handels 2 und 3 vorzuziehen (sofern die Störung nicht katastrophaler Art ist). III. Das Verfahren 1 käme praktisch nur in Frage, wenn die starken Länder bereit sind, den schwachen durch Einfuhrsubsidien zu helfen.

H. Härten.

● **Wold, Herman: Demand analysis. A study in econometrics. In association with Lars Jureén.** Stockholm: Almqvist & Wiksell; New York: John Wiley & Sons, Inc. 1952. XVI, 358 p.

Die vorliegende Monographie ist zugleich Lehrbuch (mit 127 Übungsaufgaben, teilweise neue Sätze enthaltend) und Forschungsbericht, besonders über die Arbeiten des Verfassers und seines statistischen Seminars. Die drei Hauptteile des Werkes enthalten: Teil II, teilweise erweitert und verbessert, den axiomatischen Aufbau der Paretoschen Präferenzentheorie, den Verf. früher gab, als Grundlage für die allgemeine Nachfragetheorie, besonders für die Lehre von den Nachfrage-Elastizitäten. Unter den Anwendungen ist die auf die Index-Theorie nach Konyus zu erwähnen. Teil III behandelt die Theorie der stationären (stochastischen) Prozesse als Grundlage der Zeitreihen-Analyse, wie sie Verf. in seiner Dissertation gab, und schließt mit einer Darstellung des Korrelogramm-Tests seines Schülers Whittle (Hypothesis testing in time-series analysis, Diss. Uppsala 1951). Teil IV gibt eine Darstellung der Regressionsanalyse mit dem Zerlegungssatz des Verfassers von 1938 für die stationären Prozesse in eine singuläre (deterministische) und eine reguläre (nicht deterministische) Komponente und mit einem neuen Satz über die rekursive Darstellungsmöglichkeit für jede Folge von Zeitreihen mit wohldefinierten Momenten erster und zweiter Ordnung. Diese Betrachtungen stehen in engem Zusammenhang mit dem zweiten Kapitel des einleitenden Teils I, in dem Verf. eine ausführliche und kritische Übersicht über die Ziele und Resultate seiner Monographie gibt, im zweiten Kapitel die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate in der Nachfrage-Analyse damit begründend, daß die kausale Interpretation ökonomisch-statistischer Beziehungen unproblematisch ist, weil kontrollierte Variable und „Effekt“-Variable deutlich unterschieden sind. Der letzte Teil V, von Lars Jureén und dem Verf., bringt Berechnungen auf Grund schwedischer Lebenshaltungskosten- und Marktstatistiken sowie — vorzugsweise auf letzteren fußend — eine Vorausberechnung des Verbrauchs an den wichtigsten Nahrungsmitteln in Schweden 1950, 1960 und 1970, ausgehend von den Statistiken für 1930 bis 1939. Die Vorausberechnung für 1950 wird mit den inzwischen erstellten Statistiken konfrontiert.

H. Härten.

**Roy, René: Les élasticités de la demande relative aux biens de consommation et aux groupes de biens.** *Econometrica* 20, 391—405 (1952).

Die Nachfrage-Elastizitäten für ein Konsumentenkollektiv sind analog denjenigen für einzelne Verbraucher zu bilden, wenn die Einkommensverteilung  $r_k = \theta_k r$  unelastisch ist,  $\lambda_k = \frac{dr_k}{r_k} : \frac{dr}{r} = 1$ ,  $r_k$  = Einkommen eines einzelnen Konsumenten,  $r$  das Kollektiveinkommen,  $\theta_k$  also unabhängig von  $r$ . Im allgemeinen Fall,  $\lambda_k \neq 1$ , sind bei  $n$  Gütern für  $n^2 + n$  Elastizitäten in bezug auf Preise und Einkommen nur  $n + 1$  Bedingungsgleichungen vorhanden, so daß  $n^2 - 1$  Elastizitäten empirisch bestimmt werden müssen. Für die  $n^2 + n$  individuellen Nachfrage-Elastizitäten (und bei  $\lambda_k = 1$ ) liegen wegen der Homogenität der Nachfragefunktion  $2n$  Bedingungsgleichungen vor, sind also noch  $n^2 - n$  empirische Bestimmungen nötig. In beiden Fällen ermöglicht die vom Verf. früher eingeführte „Hierarchie der Güter“ eine erhebliche Reduktion in der Zahl der empirisch zu ermittelnden Elastizitäten.

H. Härten.

**Holley, Julian L.: A dynamic model. I. Principles of model structure.** *Econometrica* 20, 616—642 (1952).

Die amerikanische Luftwaffe hat zur Vorausbeurteilung der Wirkung industrieller Mobilisierung Gedankenexperimente mit Hilfe von zwei Modellen M 91 und M 92 durchgeführt. Unter Abstraktion von den durch den Zweck bestimmten Besonderheiten stellt Verf. zwei Prototyp-Modelle P 91 und P 92 auf, P 91 ein diskretes, P 92 ein kontinuierliches Modell. In einem Produktionssystem von  $n$  Industrien  $j$  stellt jede genau ein Produkt  $j$  her.  $X_{ij}$  ist der Wert (Verkaufspreis) der Ware  $i$ , die in die Industrie  $j$  geliefert wird,  $X_{ij} = X'_{ij} + X''_{ij}$  (Zerlegung in die in laufender Rechnung und auf Kapitalkonto erworbenen Waren). Es ist  $\sum_i X_{ij} + H_j +$

$\Pi_j + D_j = \sum_k X_{jk} + F_j + \Delta J_j$ , worin  $H_i$  die Kosten für Rohmaterial und für Lieferungen von außerhalb des Produktionssystems einschließlich Löhne usw. sind,  $D_j$  die Abnutzung,  $\Pi_j$  der Gewinn,  $F_j$  (= final demand) Lieferungen nach außerhalb des Produktionssystems,  $\Delta J_j$  die Warenbestandszunahme ( $\leq 0$ ). Die linke Seite der Gleichung ist der Ausstoß  $X_j$  von  $j$ . Der Übergang vom statischen zum dynamischen Modell erfolgt im wesentlichen mit Hilfe des Begriffs „lead“ (= Vorhandzeit)  $l_{ij}$  des Bedarfs der Industrie  $j$  an der Ware  $i$ . Mit dem Prinzip der minimalen Lagerung erhält Verf. ein System von Gleichungen, das die mathematische Struktur von P 91 beschreibt und durch Iteration zu lösen ist. In P 92 wird angenommen, daß keine Lagerung stattfindet (also nicht minimale Lagerung). Ein entsprechendes Gleichungssystem wie für P 91 wird von Verf. aufgestellt, das jedoch nur eine Relation zwischen den Ausstoßen  $X_j(t)$  und den „final demands“  $F_j(t)$  darstellt. Eine Lösungsmethode nach G. B. Dantzig wird für den Fall skizziert, daß die  $F_j(t)$  als Polynome höchstens zweiten Grades gegeben sind.

H. Härten.

**Beckmann, Martin:** A continuous model of transportation. *Econometrica* 20, 643—660 (1952).

Die Transportkosten bei kontinuierlicher Verteilung der Produktionsstätten zum Minimum zu machen, bedeutet, ein Vektorfeld  $\Phi$  so zu bestimmen, daß  $\int_R k(x, y, |\Phi|) v(x, y) dx dy$  Minimum ist mit  $k(x, y, u) = \frac{\partial K(x, y, u)}{\partial u} > 0$ ,  $\frac{\partial k(x, y, u)}{\partial u} > 0$ ,  $v(x, y) > 0$ ,  $k, v$  abschnittsweise stetig und mit stetiger Ableitung,  $K$  = Transportkosten,  $v$  = Geschwindigkeit des Warenflusses. Für Regularitätspunkte gilt ein Analogon zur Stetigkeitsgleichung der Hydrodynamik. Für die „Effizienz“ eines Vektorfeldes ist notwendig und hinreichend, daß die Normaltrajektorien eine Familie von Isopotentialkurven bilden, deren Potential gleich den Transportkosten, gemessen längs den Feldlinien, ist. Das bedeutet: es gibt ein solches Preissystem, daß der Warenfluß zwischen zwei Punkten entlang Kurven geringster Transportkosten verläuft. Verf. beweist die Einzigkeit der Lösung.

H. Härten.

**Tobin, James:** A survey of the theory of rationing. *Econometrica* 20, 521—553 (1952).

Bericht über die verschiedenen ökonomischen Fragen betreffend Rationierung — die, im allgemeinen, als ein System mit mehreren Währungen betrachtet wird — und über die Gesichtspunkte anderer Autoren. Benehmen der einzelnen Verbraucher (grundsätzlich nach der Theorie von Samuelson und Graaf); kollektive Nachfrage; Vergleich zwischen vertauschbaren oder nicht vertauschbaren Rationen und anderen Maßnahmen.

B. de Finetti.

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

**Hjelmslev, Johannes:** Über die allgemeinen Grundlagen der Geometrie. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 3—12 (1952) [Dänisch].

Historische Darstellung der Entwicklung der Axiomatik der Geometrie von Euklid bis Hilbert und der Weiterentwicklung in des Verf. Arbeiten über die allgemeine Kongruenzlehre.

M. Zacharias.

**Kustaanheimo, Paul:** On the fundamental prime of a finite world. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I Nr. 129, 7 S. (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 39, 156) hat Verf. in die endliche Geometrie über  $GF_p$  eine Anordnung eingeführt durch die Bedingung, daß  $a > b$  genau dann gilt, wenn  $a - b$  ein quadratischer Rest in  $GF_p$  ist. Diese Anordnung ist nicht immer transitiv; sind aber  $q_1, q_2, \dots$  die ungeraden Primzahlen in ihrer natürlichen Anordnung und ist  $0 \neq p \equiv -y^2 \pmod{8q_1 \cdots q_k}$ , so bilden die Zahlen  $1, \dots, q_{k+1}$  eine transitiv geordnete „Euklidische Kette“ in  $GF_p$ . Nach dem Dirichletschen Satze über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen müssen für jedes zu  $8q_1 \cdots q_k$  teilerfremde  $y$  solche Primzahlen  $p$  existieren. Verf. fragt



nach dem kleinsten  $p$  für jedes gegebene  $k$ ; doch scheint es keine Ansätze für dieses zahlentheoretische Problem zu geben. Durch Rechnung erhält er für  $k = 6$ ,  $q_k = 17$ ,  $p = 5711$ ; für  $k = 7$ ,  $p > 10000$ . Die Zahlen  $8q_1 \cdots q_k$  wachsen asymptotisch wie  $e^{q_k}$ . Der Hintergrund des Problems ist folgende Hypothese: Der Raum der Physik ist eine endliche Geometrie über  $GF_p$ . Die klassische Physik spielt sich im Bereiche der Euklidischen Ketten ab; die Abweichungen im Intraatomaren und Supragallaktischen rühren vom Aufbrechen der Transitivität der Anordnungsrelation her. Unter dieser Annahme kann man erwarten, daß sich die Zahl  $q_{k+1}$  aus physikalischen oder astronomischen Messungen ergeben wird. Ist  $p$  die durch Lösung des aufgeworfenen Problems zu bestimmende Primzahl, so ist  $p^3$  die Anzahl der Punkte im Raume.

F. W. Levi.

**Hoffman, A. J.:** *Cyclic affine planes*. Canadian J. Math. 4, 295—301 (1952).

Eine affine Ebene, in der eine Affinität existiert, derart, daß die von dieser erzeugte zyklische Gruppe einen bestimmten Punkt festläßt und für alle anderen Punkte der Ebene transitiv ist, wird zyklisch genannt. Eine zyklische Ebene ist notwendig endlich. Mit den Möglichkeiten für die Anzahl  $n$  der Punkte einer Geraden beschäftigt sich die vorliegende Arbeit vornehmlich. Ihr Hauptergebnis ist der Nachweis, daß gewisse unendlich viele ganze Zahlen  $n$  hierfür bei einer affinen zyklischen Ebene nicht vorkommen können. Wesentliche Hilfsmittel der vorliegenden Untersuchung sind die affinen Differenzenmengen  $\{d_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , d. s. Mengen von Restklassen mod  $(n^2 - 1)$ , bei denen die Differenzen  $d_i - d_k$  ( $i \neq k$ ) genau die  $n^2 - n$  Restklassen mod  $(n^2 - 1)$  durchlaufen, welche nicht  $\equiv 0 \pmod{n+1}$  sind. Mittels besonders normierter affiner Differenzenmengen lassen sich die affinen zyklischen Ebenen kennzeichnen. — Eine Reihe von Sätzen über die wechselseitigen Beziehungen, in denen gewisse Eigenschaften der affinen zyklischen Ebenen zu solchen der affinen Differenzenmengen stehen, werden bewiesen und u. a. zur Herleitung des obigen Resultats benutzt. — Die Ergebnisse und Methoden sind Gegenstücke zu denen von M. Hall jr. über projektive zyklische Ebenen (dies. Zbl. 29, 225), welche letztere aber nicht endlich zu sein brauchen.

E. Sperner.

**Klingenberg, Wilhelm:** *Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen*. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 120—143 (1952).

An affine incidence plane is characterized by the three axioms: (I) through two different points there exists exactly one line, (II) there exist three non-collinear points, (III) to every line there exists through every point exactly one parallel. The author investigates the connections between certain theorems (called Schließungssätze) relevant to the development of an algebra of segments as given by Hilbert (Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1913) or Reidemeister (Grundlagen der linearen Geometrie, Berlin 1930). The main theorems concerned are: (i) The theorem of Desargues (D), the theorem of Pappus-Pascal (P), the central Reidemeister theorem (R) corresponding to the associative law, the theorem (Ay) which is obtained by a plane section of Reye's configuration, and the following theorem (A): if  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  are on  $g$  but not on  $h$ ;  $P_3, P_4, Q_3, Q_4$  on  $h$  but not on  $g$ ;  $P_1 \neq P_2, Q_1; P_3 \neq P_4; P_1 P_3 \parallel Q_1 Q_3; P_1 P_4 \parallel Q_1 Q_4; P_2 P_3 \parallel Q_2 Q_3$ ; then  $P_2 P_4 \parallel Q_2 Q_4$ . (ii) Certain specializations of these theorems. (iii) Theorems obtained from the projective forms of (i) by dualization and affine specialization. Of the many results the following may be mentioned: (A), (Ay) and (D) are equivalent; (P) implies (A) [and hence (D), Hessenberg's theorem].

F. A. Behrend.

**Bilo, J.:** *Quelques aspects de la géométrie projective quaternionienne*. Bull. Soc. math. Belgique 1951, 67—72 (1952).

Wie sehr das kommutative Gesetz der Multiplikation in geometrischen Fragen die Rechnungen vereinfacht, wird klar aus dem vom Verf. behandelten Gegenbei-

spiel der Koordinatentransformation des binären Gebietes in der Quaternionengeometrie. Verf. formuliert eine Bedingung für die Lösbarkeit der sich auf das Problem beziehenden Gleichungen.

J. C. H. Gerretsen.

● **Bompiani, E.: Metriche non-euclidee.** 1952. 243 p. poligraf.

Bei dem vorliegenden Werk handelt es sich um die vielfältigste Wiedergabe einer Vorlesung über nichteuklidische Geometrie, die Verf. im Studienjahr 1951/52 gehalten hat. Die Darstellung gründet sich auf die Cayley-Kleinsche Auffassung, die eine nichteuklidische Metrik durch Auszeichnung eines absoluten Gebildes 2. Grades in einem projektiven Raum einführt. Die Behandlung ist vorwiegend analytisch (homogene projektive, gelegentlich passend normierte Koordinaten benützend), bedient sich jedoch oft auch rein geometrischer Überlegungen, die mit Vorliebe zur Vorbereitung der Rechnung vorausgeschickt werden. Der Stoff ist in fünf große, zweckmäßig unterteilte Abschnitte gegliedert, die der elliptischen und hyperbolischen Geometrie der Ebene bzw. des Raumes sowie der quasielliptischen Geometrie gewidmet sind. — Im Rahmen der Betrachtung der elliptischen Ebene, deren Maßkegelschnitt in der Form  $\Omega = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  vorausgesetzt wird, werden zunächst die Abstands- und Winkeldefinition und das Fehlen von Parallelen gründlich besprochen, ferner der Kreis- und Bewegungsbegriff erklärt. Deutung der durch  $\Omega = 1$  normierten Koordinaten als kartesische Koordinaten im Raum führt auf die Interpretation der elliptischen Ebene auf der Kugel und wird zur Flächenberechnung des Dreiecks benützt. — Die anschließende Betrachtung der hyperbolischen Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  ist wesentlich umfangreicher, was nicht bloß an den notwendigen Fallunterscheidungen liegt, sondern in zahlreichen Ergänzungen und liebevollem Eingehen auf verschiedene Einzelheiten begründet ist. So werden die Grenzkreise (Horozykeln) ausführlich behandelt, wobei durch euklidische Deutung von Polarkoordinaten mit absolutem Zentrum die Pseudosphäre von Beltrami erhalten wird; eine andere Interpretation dieses Koordinatensystems führt auf die Poincarésche Halbebene, die zur Grundlage für das Studium der hyperbolischen Bewegungen gemacht wird. Im Rahmen der hyperbolischen Trigonometrie werden u. a. reguläre Polygone mit der Winkelsumme  $2\pi$  betrachtet, die dann später zur topologischen Konstruktion von geschlossenen und singularitätenfreien Flächen vom Geschlecht  $\geq 2$  ausgenützt werden, denen sich eine hyperbolische Metrik ohne Ausnahmepunkte aufprägen läßt; zur Vorbereitung wird zunächst noch die Ausbreitung der euklidischen Ebene auf einen Torus auseinandergesetzt. — Das umfangreichste Kapitel ist das nun folgende über den elliptischen Raum mit der Maßfläche  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ . Einführend werden gewisse Abstandsbestimmungen geometrisch und formelmäßig durchgeführt, wobei bereits verschiedentlich Plückerkoordinaten herangezogen werden. Überaus eingehend wird der Clifford'sche Parallelismus mit seinen Anwendungen behandelt, darunter die Darstellung der Bewegungen durch Zusammensetzung von Rechts- und Linksschiebungen und ihre analytische Beschreibung durch Quaternionenprodukte; auch die Abbildung des Strahlraums auf zwei Bildkugeln nach Fubini und Study findet hier ihren Platz. Ausführlich wird ferner auf das konforme Killing-Darbousche Modell des elliptischen Raumes eingegangen, das die Ebenen durch die Kugeln eines elliptischen Gebüsches versinnlicht. Als Einführung in die elliptische Differentialgeometrie wird schließlich ein Abriß der Raumkurventheorie mit den Ableitungsgleichungen und verschiedenen Deutungen der Krümmung und Torsion geboten. — Das Studium des durch das Maßgebilde  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  gekennzeichneten hyperbolischen Raumes beginnt wieder mit gewissen Abstandsfragen (u. a. zwischen windschiefen Geraden) und geht dann auf die allgemeine Bewegung ein, die in Drehungen um absolute Polaren zerlegt wird; auch kontinuierliche Bewegungsgruppen kommen dabei zur Sprache. Als konformes Raummodell dient diesmal hauptsächlich der Poincarésche Halbraum, der eine Abbildung des hyperbolischen Raumes auf die Möbiussche Ebene vermittelt und eine elegante Darstellung der Bewegungen gestattet. — Den Abschluß bildet dann der Grenzfall des quasielliptischen Raumes, dessen Maßgebilde in ein inzidentes Ebenen- und Punktepaar ( $x_0^2 + x_1^2 = 0$ ,  $u_0^2 + u_1^2 = 0$ ) ausgeartet ist. Die kinematische Abbildung des Strahlraumes nach Grünwald und Blaschke, die dieser Metrik ihre Bedeutung verleiht, findet gebührende Würdigung und wird auch in konstruktiver Hinsicht, speziell in Anwendung auf die Cliffordschen Flächen und die Bewegungsgruppe, diskutiert. — Es ist sehr zu begrüßen, daß diese inhaltsreiche Vorlesung, die sich durch musterhafte Klarheit und besondere Eleganz auszeichnet, demnächst gedruckt herausgegeben werden soll.

W. Wunderlich.

**Szász, Paul: Neue Bestimmung des Parallelwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln.** Acta Sci. math. 14, 247—251 (1952).

Nachdem Verf. die von Liebmann gegebene Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie der Ebene schon früher [Acta Sci. math. 14, 174—178 (1952)] vereinfacht hat, gelingt in dieser Note die Bestimmung des Parallelwinkels ohne Benützung der Streckentrigonometrie und der Gleichung des Grenzkreises.

F. Hohenberg.



**Meschkowski, Herbert:** Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie. *Elemente Math.* 7, 130—132 (1952).

Verf. beweist die trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, indem er das Poincarésche Modell benutzt und mittels einfacher Überlegungen an einem rechtwinkligen Dreieck in spezieller Lage die Formeln  $\cosh c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$  und  $\tanh a = \tanh c \cos \beta$  zum Vorschein bringt. Daraus lassen sich leicht alle weiteren Beziehungen für das rechtwinklige Dreieck ableiten. Verf. behauptet, daß die Ableitung der trigonometrischen Formeln aus dem Poincaréschen Modell bisher noch nicht dargestellt worden ist. Die Redaktion erwähnt die Abhandlung von H. Eves und V. E. Hoygatt (dies. Zbl. 43, 353). Ref. möchte hinzufügen: F. Schilling (dies. Zbl. 11, 170). Allerdings ist die Schillingsche Methode wenig elementar.

*J. C. H. Gerretsen.*

**Kelly, P. J. and L. J. Paige:** Symmetric perpendicularity in Hilbert geometries. *Pacific J. Math.* 2, 319—322 (1952).

Wenn in der Euklidischen Ebene ein beliebiges nirgends konkaves Oval gegeben ist, so definiert dies eine bestimmte Geometrie: die Punkte im Innern sind die Punkte der Geometrie und den Euklidischen Geraden entsprechen Geraden der Geometrie, insofern sie innere Punkte enthalten. Die Distanz  $h(a, b)$  zweier Punkte  $a, b$  wird in derselben Weise wie im Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie definiert [D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Anhang I, 7. Auflage. Leipzig u. Berlin 1930]. — Es sei  $p$  ein Punkt und  $\xi$  eine Gerade dieser Hilbertschen Geometrie. Ein Punkt  $f$  auf  $\xi$  heißt Fußpunkt des Lotes aus  $p$  auf  $\xi$ , wenn  $h(p, f) \leq h(p, x)$  für alle Punkte  $x$  auf  $\xi$ . Eine Gerade  $\eta$  heißt senkrecht zu  $\xi$ , wenn alle Punkte von  $\eta$  denselben Fußpunkt im erwähnten Sinne haben. Im allgemeinen darf man in dieser Definition  $\xi$  und  $\eta$  nicht vertauschen. Die Verff. beweisen den Satz: Die Hilbertschen Geometrien, in welchen die Relation des Senkrechtstehens zweier Geraden symmetrisch bezüglich dieser Geraden ist, sind hyperbolische Geometrien, d. h. das die Geometrie definierende Oval ist eine Ellipse.

*J. C. H. Gerretsen.*

## Elementargeometrie:

● **Lietzmann, W.:** Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie. München: Verlag R. Oldenbourg, 1952. 220 S. mit 157 Abb. und 1 Tafel. DM 19,50.

Das vorliegende Buch ist dem Versuch gewidmet, die Elementargeometrie des vierdimensionalen Raumes in propädeutischer Weise der Anschauung näherzubringen. Unter bewußtem Verzicht auf strenge Begründung wird getrachtet, möglichst rasch zu den vierdimensionalen Körperformen vorzudringen und von deren Aufbau eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen. Nach skizzenhafter Kennzeichnung der axiomatischen Methode wird daher gleich mit der Besprechung des Simplex und weiterer einfacher Polytope begonnen. Dieselben werden durch verschiedene ebene und räumliche Diagramme versinnlicht und zum Gegenstand abzählender Betrachtungen gemacht, die schließlich im Satz von Euler gipfeln. — Erst jetzt werden die Grundzüge einer analytischen Behandlungsweise (in inhomogenen kartesischen Normalkoordinaten) dargelegt, anschließend werden die verschiedenen Fälle von Parallelität und Orthogonalität im  $R_4$  auseinandergesetzt und die Formeln zur Längen- und Winkelmessung angegeben, zwischen- durch auch einige einfache Inhaltsberechnungen durchgeführt. Im Rahmen einer breiter angelegten Kapitelfolge über die regulären Polytope (die jedoch auf das schwierigere Hundert-zwanzig- und Sechshundertzell nicht näher eingeht) werden auch die Elemente einer darstellenden Geometrie mehrdimensionaler Räume gestreift; zur Veranschaulichung der Vielzelle dienen wiederum Diagramme (darunter die Schlegelschen), räumliche Netze und Serien räumlicher Parallelschnitte. — Im Zusammenhang mit den Drehungsvorgängen um eine Gerade bzw. eine Ebene werden auch einfache krumme Gebilde, wie Hyperzylinder, Hyperkegel und Hyperkugel besprochen und deren Inhaltsformeln abgeleitet. (Bei der  $180^\circ$ -Drehung eines Tetraeders um seine Basisebene, die es in sein Spiegelbild überführt, findet übrigens keine Umstülpung statt, wie auf S. 153 behauptet wird). Nach einigen Bemerkungen über Kugellagerungen und Raumpackungen und einer nicht recht begründeten Abschweifung zu Funktionen komplexer Ver-



änderlicher beschließen Hinweise auf nichteuklidische Geometrien und Ausblicke in die Raum-Zeit-Welt des Physikers das inhaltsreiche Buch. — Die Darstellung ist im großen und ganzen mehr beschreibend als beweisend und stützt sich vielfach auf einleuchtende Analogieschlüsse von geläufigen Sachverhalten im  $R_3$  — die, wo notwendig, ausführlich dargelegt werden — auf die entsprechenden Verhältnisse im  $R_4$ , gelegentlich auch gleich zum  $R_n$  weitergehend. Neues wird kaum gebracht, doch ist die Vielfalt der angeschnittenen Themen hervorzuheben, die, zusammen mit der Lebendigkeit des Vortrags, den Hauptvorteil des Buches ausmacht. Diese Vielfalt verbietet allerdings bei dem knappen verfügbaren Raum tieferes Eingehen auf Einzelheiten und ist daher auch Ursache des etwas flüchtigen Charakters des Werkes. Zweifellos wird dasselbe aber auf den Anfänger, für den es ja gedacht ist, außerordentlich anregend wirken und wohl auch in nichtmathematischen Kreisen manches zur Klärung verschwommener Vorstellungen beitragen können.

*W. Wunderlich.*

**Pipping, Nils:** *Drei geometrische Miniaturen.* Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 18, Nr. 10, 8 S. (1952).

Die erste Note beschäftigt sich mit einer Modifizierung der Näherungskonstruktion des Kreisumfanges von A. Heiseler (dies. Zbl. 3, 166). In dieser Note sind drei Zirkelöffnungen nötig. In der zweiten Note wird die Mascheronische Konstruktion des goldenen Schnittes (F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, Bd. II, Aufl. II 1923, S. 43) vereinfacht, so daß nur sieben (statt neun) Kreise nötig bleiben. Die dritte Note bringt eine etwas modifizierte Konstruktion der Verdoppelung des Würfels mit Hilfe der Kissoide.

*Gy. Sz.-Nagy.*

**Cavallaro, M. Vincenzo G.:** *Sur les points isodynamiques.* Anais Fac. Ci. Porto 36, 5—20 (1952).

Metrische Beziehungen der isodynamischen Punkte (d. h. der Schnittpunkte der Apollonischen Kreise) eines Dreiecks zu anderen merkwürdigen Punkten, z. B. den Brocardschen Punkten, dem Lemoineschen Punkt, den Brennpunkten der Steinerschen Inellipse, dem Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, sowie zu dem Brocardschen Winkel und den Steinerschen Winkeln.

*M. Zacharias.*

**Cavallaro, M. Vincenzo G.:** *Sur les triangles brosteinériens.* Anais Fac. Ci. Porto 36, 21—25 (1952).

Sind  $R$  der Umkreisradius,  $\sigma$  der Radius des Brocardschen Kreises,  $V$  der Brocardsche Winkel und  $V_1, V_2$  die Steinerschen Winkel des Dreiecks  $ABC$ , so ist  $(R - \sigma)/\sin 2V_1 = R/\sin 2V = (R + \sigma)/\sin 2V_2$ , d. h. das Dreieck mit den Seiten  $R - \sigma, R, R + \sigma$  hat die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel  $2V_1, 2V, 2V_2$ . Verf. nennt es das „Brosteinersche Dreieck“. Er gibt neue Formeln für die genannten Größen und einen neuen einfacheren Beweis des von ihm schon früher (dies. Zbl. 34, 383) bewiesenen obigen Satzes an.

*M. Zacharias.*

**Rangaswami Aiyer, K.:** *On a system of circles represented by a Steiner quartic surface.* Ganita 3, 103—109 (1952).

Utilizzando risultati di un suo precedente lavoro [questo Zbl. 22, 382] l'A. stabilisce rapidamente che il cerchio di contatto („contact circle“) di un punto  $P$  (e quindi anche del coniugato isogonale  $P'$ ) rispetto ad un triangolo  $\Delta$ , descrive — al variare di  $P$  nel piano — un sistema algebrico  $\infty^2$ , il quale (nello  $S_3$  dei punti immagine dei cerchi del piano) ha per immagine una superficie cubica  $I'$  con quattro nodi nei punti immagine dei cerchi inscritto ed exinscritti a  $\Delta$ . Reca quindi l'attenzione sul sistema che ha per immagine la superficie di Steiner  $I''$  reciproca di  $I'$  rispetto alla quadrica dei punti immagine dei cerchi di raggio nullo. — I cerchi che hanno l'immagine su  $I''$  sono poi i cerchi direttori delle coniche circoscritte a  $\Delta$ . Tali cerchi vengono denominati „orthocontact circles“, perchè se  $r$  è la retta polare di un punto  $P$  rispetto all'ellisse massima inscritta in  $\Delta$ , i cerchi di contatto delle „infocal conics“ [cfr. recensione cit.] tangenti ad  $r$  tagliano ortogonalmente il cerchio direttore della conica polare di  $P$  rispetto a  $\Delta$ .

*V. E. Galafassi.*

**Danielsson, Gösta:** *Proof of the inequality  $d^2 \leq (R + r)(R - 3r)$  for the distance between the centres of the circumscribed and inscribed spheres of a tetrahedron.* 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 101—105 (1952).

Pour bien comprendre le sens de cette Note, il est utile de rappeler que M. M. Gambier et Rowe ont montré (ce Zbl. 10, 74) que deux quadriques  $Q, Q_1$  quelconques admettent  $\infty^4$  tétraèdres  $ABCD$  inscrits dans  $Q$ , circonscrits à  $Q_1$ ; on peut choisir arbitrairement  $A$  sur  $Q$  (2 paramètres); la face  $BCD$  est alors astreinte à passer par un certain point  $A_1$  correspondant homographiquement à  $A$  sur une quadrique  $q$  liée à  $Q$  et  $Q_1$ , conjuguée par rapport à leur tétraèdre conjugué commun; on peut alors prendre pour plan  $BCD$  l'un quelconque des plans tangents à  $Q_1$  issus de  $A_1$  (1 paramètre); ce plan coupe  $Q, Q_1$  suivant deux coniques admettant  $\infty^1$  triangles  $BCD$  inscrits dans la première, circonscrits à la seconde. Mais il restera, pour chaque couple  $Q, Q_1$  certaines conditions délicates de réalité à discuter. — On donne une sphère  $(O)$  de centre  $O$ , rayon  $R$ , une sphère  $(I)$  de centre  $I$ , rayon  $r$ , située à l'intérieur de  $(O)$ ;  $OI = d$ . Pour qu'il existe des tétraèdres inscrits dans  $(O)$ , circonscrits à  $(I)$ , il ne peut exister de relation telle que  $d^2 = (R + r)(R - 3r)$  que Durrande avait signalée à tort (Encykl. der math. Wissensch. 3, 1, Leipzig 1920 p. 1059). L'A. indique l'inégalité  $d^2 \leq (R + r)(R - 3r)$  (qui est probablement exacte), mais que l'A. ne démontre que pour le cas où l'on veut trouver un tétraèdre  $ABCD$  tel que la face  $BCD$  touche  $(I)$  au point  $P$ , situé sur  $OI$  à la distance  $d + r$  de  $O$ ; le point  $A$  doit se trouver sur la section de  $O$  par un plan perpendiculaire à  $IO$  sur le prolongement de  $IO$ , à la distance  $R \cos v$ ,  $v$  étant l'angle défini par la relation

$$d^2 = (R + r)(R - 3r) - \frac{2R(R + r + d)(R - r - d)}{R - r + d} \sin^2 \left( \frac{v}{2} \right).$$

L'inégalité annoncée en résulte, du moins si le plan  $BCD$  touche  $(I)$  en  $P$ ; il est probable qu'elle est exacte sans restriction; mais je dois signaler qu'il faudrait lever l'objection suivante : si l'inégalité en jeu n'est pas vérifiée, il se pourrait que le point de contact de  $BCD$  avec  $(I)$  puisse se déplacer sur une certaine portion de  $(I)$  obtenue en supprimant de  $(I)$  une certaine calotte de pôle  $P$ . — De même si  $(O)$  et  $(I)$  sont sécantes, pour qu'il existe un tétraèdre inscrit dans  $O$ , admettant  $(I)$  pour sphère ex-inscrite, on doit avoir  $d^2 \leq (R - r)(R + 3r)$ . *B. Gambier.*

**Guitel, Geneviève:** Principes de classification dans l'étude des trièdres et des tétraèdres. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1274—1276 (1952).

Kennt man von einem Dreibein die totale Anzahl  $A$  der stumpfen Winkel, so läßt sich zugleich feststellen, wie diese zwischen den Seiten- und Flächenwinkeln verteilt sind. Diese Bemerkung gestattet eine eindeutige Einteilung der Dreibeine in 7 Klassen, je nachdem  $A = 0, 1, \dots, 6$  ausfällt. Es wird, ohne ausführliche Beweise, auf die Möglichkeit analoger Einteilungen der Tetraeder in 27 und der Vierbeine in 172 Klassen hingewiesen.

*L. Fejes Tóth.*

**Marmion, Alphonse:** Extension au simplexe de l'espace euclidien à  $n$  dimensions d'une propriété du triangle et du tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2040—2042 (1952).

Von T. Lemoyne [Nouv. Ann. de Math., IV. Sér. 4, 400—402 (1904)] stammt folgender Satz der Dreiecksgeometrie: Die Fußpunktkreise der Punkte einer Geraden bezüglich eines Dreiecks, also die Kreise, die durch die Fußpunkte der aus den Punkten der Geraden auf die Dreiecksseiten jeweils gefällten Lote gehen, besitzen einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Servais [Mathesis 36, 87—89 (1922)] verallgemeinert diesen Satz auf den dreidimensionalen Raum. Verf. gibt nun hierfür einen Beweis, der ohne weiteres auf den  $n$ -dimensionalen Raum ausgedehnt werden kann, was kurz durchgeführt wird. — Es sei bemerkt, daß der vom Verf. zur Beweisführung benutzte Satz „Drei paarweise orthogonale Tangentialebenen an drei konfokale Quadriken schneiden sich in den Punkten einer mit den Quadriken konzentrischen Kugel“ bereits bei H. F. Baker, Principles of Geometry, Bd. 3, p. 87 (Cambridge 1923) zu finden ist.

*H. R. Müller.*

**Debrunner, H.:** Translative Zerlegungsgleichheit von Würfeln. Arch. der Math. 3, 479—480 (1952).

Es wird gezeigt, daß zwei kongruente Würfel  $P$  und  $Q$  des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes translativ zerlegungsgleich vom Grad  $n \leq 5^{\binom{k}{2}}$  sind. Dies bedeutet, daß im Sinne der Elementargeometrie Zerlegungen dieser Würfel  $P = \sum_1^n P_v$ ,

$Q = \sum_1^n Q_v$  in Teilpolyeder  $P_v$  und  $Q_v$  bestehen, die paarweise translationsgleich sind,  $P_v \cong Q_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ). Der Beweis stützt sich auf eine von P. Glur und

H. Hadwiger (dies. Zbl. 43, 355) angegebene Zerlegung kongruenter Quadrate in translationsgleiche Teilpolygone, die als Projektion einer Zerlegung kongruenter  $k$ -dimensionaler Würfel in translationsgleiche Polyeder aufgefaßt werden kann. Da sich die Würfel in einer speziellen Drehung entsprechen und die allgemeinste Drehung durch  $\binom{k}{2}$  solcher spezieller Drehungen erzeugt werden kann, ergibt sich daraus die angegebene Schranke für den Grad der Zerlegung. *R. Inzinger.*

Sydler, J.-P.: *Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens.* *Elemente Math.* 7, 49—53 (1952).

Das Problem der Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder des gewöhnlichen Raumes ist noch ungelöst; die Frage, ob die bekannten Dehnschen notwendigen Bedingungen (zusammen mit der Volumgleichheit) auch hinreichend sind, ist offen geblieben. — Verf. erzielt einen erheblichen Fortschritt. Er betrachtet Polyeder  $S$ , welche die Dehnschen Bedingungen für eine bestehende Zerlegungsgleichheit mit einem Würfel  $W$  (symbolisch  $S \sim W$ ) erfüllen. An Stelle von  $S \sim W$  (Vermutung) beweist er  $S \sim R$ , wo  $R$  ein Polyeder bezeichnet, dessen Flächenwinkel alle mit  $\pi$  kommensurabel sind (polyèdre rationnel). Wesentlichste Folgerung: Sind  $A$  und  $A'$  zwei Polyeder, welche die Dehnschen Bedingungen für ihre Zerlegungsgleichheit  $A \sim A'$  erfüllen, so gibt es zwei Polyeder  $R$  und  $R'$  so, daß  $A + R \sim A' + R'$  — oder mit Verwendung einer vom Ref. (dies. Zbl. 40, 370) eingeführten Symbolik  $A \sim A' \pmod{R}$  — gilt. Das Problem reduziert sich mit diesem Ergebnis auf die Frage, ob ein „polyèdre rationnel“ stets mit einem Würfel zerlegungsgleich ist. In der Tat würde aus  $R \sim W$  folgen, daß Dehns Bedingungen notwendig und hinreichend für  $A \sim B \pmod{W}$  sind; tritt die Bedingung der Volumgleichheit hinzu, so ist diese Beziehung durch  $A \sim B$  zu ersetzen. — Die Beweisführung erfordert verschiedene elementargeometrische, aber recht subtile Polyederverwandlungen, deren Verfolgung im Detail nicht leicht fällt. *H. Hadwiger.*

Whyte, L. L.: *Unique arrangements of points on a sphere.* *Amer. math. Monthly* 59, 606—611 (1952).

Geschichtliche Bemerkungen bezüglich folgender Probleme: 1. Gesucht wird die stabile Gleichgewichtslage von  $n$  auf einer Kugel frei beweglichen Elektronen. 2. Gesucht wird diejenige Anordnung von  $n$  Punkten auf einer Kugelfläche, bei der der Mindestabstand sein Maximum erreicht. *L. Fejes Tóth.*

## Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Finikov, S. P.: *Analytische Geometrie.* Vorlesungen, gehalten am Moskauer Institut für Pädagogik. 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und Pädagogik des Ministeriums für Bildung der RSFSR 1952. 327 S. R. 7,50 [Russisch].

Das vorliegende Werk ist vorwiegend elementar gehalten und gut lesbar geschrieben. Der geometrische Standpunkt herrscht durchaus vor, was auch aus den vielen beigelegten Bildern hervorgeht. Etwa je die Hälfte des Buches ist der Ebene und dem  $R_3$  gewidmet, über den nicht hinausgegangen wird. Es werden jedoch sämtliche metrischen, affinen und projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte und Flächen 2. Grades behandelt, unter Benutzung der jeweils geeigneten Koordinatensysteme. *W. Burau.*

● Godeaux, Lucien et Octave Rozet: *Leçons de géométrie projective.* 2. éd. Liège: Sciences et Lettres 1952. 278 p.

Verff. gehen von den Verknüpfungs- und Stetigkeitsaxiomen aus und gewinnen die projektive Metrik mit Hilfe des Vierseitssatzes. Kegelschnitte erscheinen als Fixgebilde von Polaritäten, Flächen 2. Ordnung und gewundene Raumkurven 3. Ordnung werden durch projektive lineare Gebilde erzeugt. Besonders anschauliche und elegante Beweisgänge gewinnen die Verff. durch Heranziehung der Anordnungs-



begriffe. Verff. verbinden einen übersichtlichen geschlossenen Aufbau des Ganzen mit einem liebevollen Eingehen auf Einzel- und Besonderheiten auch metrischer und analytischer Art. Gegenüber der 1. Aufl. (1932) sind neu eine Sammlung von 89 sehr interessanten und instruktiven Übungsaufgaben. *O.-H. Keller.*

**Simonart, Fernand:** *Sur les déplacements dans le plan complexe.* Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 885—891 (1952).

In seiner „Funktionentheorie“ begründet Carathéodory die Theorie der Bewegungen in der euklidischen und nichteuklidischen Ebene, indem er die Ebene stereographisch auf eine Kugel projiziert und die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an Kreisen, die durch Ebenen durch einen festen Punkt ausgeschnitten werden, als Bewegung definiert. Zweck dieser Arbeit ist es, das gleiche, mit im wesentlichen gleichem Formelapparat, ohne die Hilfskugel, nur mittels der ebenen Kreisgeometrie zu leisten. *G. Lochs.*

**Norden, A. P.:** *Über eine Interpretation der komplexen affinen Ebene.* Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 187—194 (1952) [Russisch].

Es ist bekannt, daß man die Punkte der komplexen Ebene auf die eines affinen Raumes  $B_4$  abbilden kann, wenn man im Fernraum des  $B_4$  die Geraden einer elliptischen Kongruenz nur als Punkte rechnet. Verf. erläutert diese Übertragung auf den  $B_4$ , bei der man in jedem Punkt des  $B_4$  eine  $\infty^2$ -Schar sog. charakteristischer Ebenen auszuzeichnen hat, und zeigt, daß die 12-parametrische Gruppe der komplexen Affinitäten der Ebene auf die Gruppe der sog. „biaffinen Bewegungen“ im  $B_4$  abzubilden ist. In krummlinigen Koordinaten wird die Struktur durch den Tensor  $G_i^j$  mit  $G_k^i G_j^k = \delta_j^i$ ,  $G_k^k = 0$  beschrieben, und bikonform heißen solche Abbildungen des  $B_4$ , die die obige besondere Eigenschaft des Tensors  $G_i^j$  erhalten; diese bilden sich auf analytische Transformationen der komplexen Ebene ab. Weiterhin skizziert Verf. noch eine Kurven- und Flächentheorie im  $B_4$ . Eine besondere Rolle spielen dabei natürlich die charakteristischen Flächen, d. h. solche mit charakteristischen Tangentialebenen. Den nicht charakteristischen Flächen sind durch die Struktur des  $B_4$  zwei konjugiert komplexe Zusammenhänge aufgeprägt. *W. Burau.*

**Bagchi, Hari das and Manindra Chandra Chaki:** *Note on certain remarkable types of plane collineations.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. mat. fis., III. Ser. 6, 85—97 (1952).

Elementarer Beweis einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß eine ebene Kollineation  $n$  Punkte,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  zyklisch vertauscht: es müssen die Geraden, die drei aufeinanderfolgende jener Punkte  $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$  je mit allen  $n-1$  übrigen verbinden, drei projektive Gruppen bilden. *E. Togliatti.*

**Lalan, Victor:** *Sur une propriété caractéristique des transformations de Lorentz.* Bull. Sci. math., II. Sér. 76<sub>I</sub>, 167—170 (1952).

Verf. beweist den Satz: Für eine spezielle Lorentz-Transformation ist notwendig und hinreichend, daß eine lineare, homogene Transformation 1) die Form  $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$  invariant läßt, 2) stetig in die identische Transformation (Einheitstransformation) übergeführt werden kann, 3) für jeden Wert des Parameters eine symmetrische Matrix besitzt. *H. R. Müller.*

**Garnier, René:** *Sur une propriété caractéristique des transformations de Lorentz.* Bull. Sci. math., II. Sér. 76<sub>I</sub>, 170—171 (1952).

Es wird der von Victor Lalan aufgestellte Satz (s. vorsteh. Referat) mittels der Nicht-Euklidischen Geometrie bewiesen. *H. R. Müller.*

**Džavadov, M. A.:** *Die konformen Abbildungen in euklidischen und pseudo-euklidischen Räumen beliebiger Dimension als gebrochene lineare Abbildungen.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 653—656 (1952).

In Verallgemeinerung bekannter Studyscher Ergebnisse für den  $R_3$  und  $R_4$  gibt Verf. Darstellungen der konformen Transformationen eines euklidischen oder pseudo-euklidischen Raumes durch lineare Transformationen in bestimmten Algebren an. Dazu werden den Punkten des

$R_{2n-1}$  mit der Maßquadratik: (1)  $x_1^2 - x_2^2 + \dots - x_{2n-2}^2 + x_{2n-1}^2$  die rekursiv erklärten Matrizen (2)  $\begin{pmatrix} X^{(n-1)} & (x_{2n-2} + x_{2n-1}) E^{(n-1)} \\ (-x_{2n-2} + x_{2n-1}) E^{(n-1)} & -X^{(n-1)} \end{pmatrix}$  zugeordnet, wobei  $X^{(1)} = x_1$  und  $E^{(n-1)}$  die Einheitsmatrix von  $n-1$  Zeilen ist. Enthält (1) statt der Minuszeichen an bestimmten Stellen weitere Pluszeichen, so ist in (2) die entsprechende Variable mit  $i$  zu multiplizieren. Für den  $R_{2n}$  mit der Maßquadratik (3)  $x_1^2 - x_2^2 + \dots - x_{2n}^2$  werden den Punkten

die Matrizen  $X^{(n)} + e x_{2n} E^{(n)}$  zugeordnet, wobei  $e$  eine Algebräeinheit mit  $e^2 = 1$  ist. Bei Vorzeichenänderungen in (3) kommen wieder  $i$ -Faktoren an die entsprechenden Stellen. In allen diesen Fällen ergeben sich dann die konformen Transformationen der betr. Metrik in der Gestalt  $w = (A z + B)(C z + D)^{-1}$ , wozu beim  $R_{2n}$  noch  $w = (A \bar{z} + B)(C \bar{z} + D)^{-1}$  hinzukommt. Hierbei sind für die  $A, B, \dots, z$  die soeben definierten Matrizen zu setzen;  $\bar{z}$  entsteht aus  $z$ , wenn man  $e$  durch  $-e$  ersetzt. Hierin stecken die bekannten Spinorendarstellungen der Drehgruppen (s. E. Cartan, *Théorie des spineurs*, Paris 1938, dies. Zbl. 19, 363). W. Burau.

**Plans, Antonio:** Über die metrisch-affinen Invarianten der quadratischen Formen. *Gac. mat., Madrid* 4, 248—253 (1952) [Spanisch].

Di un fascio di coniche aventi in comune una coppia di diametri coniugati si studiano gli invarianti metrico-affini, cioè, secondo l'A., „gli invarianti affini che si esprimono in termini metrici“, cioè ancora gli invarianti rispetto alle affinità di un dato tipo, affinità dipendenti da due parametri e non formanti gruppo. — Si dimostrano alcuni „teoremi di Apollonio“, cioè, se  $F$  e  $F'$  sono due fasci, del tipo visto, che si corrispondono in una delle affinità, „quelle relazioni che intercorrono tra una qualunque conica di dato tipo affine di  $F$  e la sua trasformata in  $F'$ “.

M. Benedicty.

**Gambier, Bertrand:** Sur une propriété projective d'un couple de coniques. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 11, 337—341 (1952).

Concernant une question traitée par Terracini (ce Zbl. 44, 160), l'A. précise que, pour deux coniques admettant  $\infty^1$  quadrilatères de Poncelet inscrits dans une et circonscrits à l'autre, on trouve deux solutions au lieu de la seule indiquée par Terracini.

G. Ancochea.

**Blanchard, René:** Triangles inscrits et circonscrits à deux hyperboles équilatères concentriques. *Mathesis* 61, 193—199 (1952).

Wenn zwei konzentrische gleichseitige Hyperbeln  $\eta$  und  $\eta'$  so beschaffen sind, daß es Dreiecke  $T$  gibt, die  $\eta$  einbeschrieben und  $\eta'$  umbeschrieben sind, so ist der Umkreis eines Dreiecks  $T$  der konjugierte Kreis des Dreiecks  $T'$ , dessen Ecken die Berührungspunkte von  $\eta'$  mit den Seiten von  $T$  sind. Verf. beweist diesen von C. Convers [Nouv. Ann., IV. Ser. 20 (1922)] als Aufgabe 422 gestellten Satz, gibt die Konstruktion von  $T'$  bei bekanntem  $T$  an und untersucht die weiteren Eigenschaften der Figur.

M. Zacharias.

**Jensen, Henry:** Ein kleiner geometrischer Beweis. *Mat. Tidsskr. A* 1952, 77—78 (1952) [Dänisch].

Geometrischer Beweis des Satzes: Dreht man eine Gerade um eine Achse, welche die Gerade nicht schneidet und ihr nicht parallel ist, so entsteht ein Rotations-hyperboloid.

H. L. Schmid.

● **Wolkowitsch, D.:** Sur les applications de la notion de moment d'inertie en géométrie. (Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. CXXI). Paris: Gauthier-Villars 1952. 41 p.

Die Monographie nimmt sich zum Vorwurf, einige Kategorien von Sätzen über Flächen zweiter Ordnung, insbesondere konfokale Flächen zweiter Klasse und damit zusammenhängende Figuren, wie den Painvinschen Komplex, durch ständige Verwendung der Trägheitsmomentfiguren und Drallfiguren der Mechanik, insbesondere also des Trägheitsellipsoids und Drall-ellipsoids, der Begriffe Trägheitsradius und Drallradius und der aus der Mechanik bekannten Eigenschaften dieser Figuren und Begriffe herzuleiten, ein Verfahren, das tatsächlich ziemlich weit führt. Es kommen dabei in zwangloser Folge viele klassische Eigenschaften der konfokalen Flächen zweiter Klasse zur Sprache, die man meist auf andere Art begründet, und manches neue, ergänzende Ergebnis kann eingeflochten werden; Vorstudien dazu hat Verf. schon in einer Arbeit (dies. Zbl. 10, 225) niedergelegt. Sehr eingehend wird der quadratische Painvinsche Komplex

und seine Singularitätenfläche, die Fresnelsche Wellenfläche studiert. Dieser Komplex besteht bekanntlich aus allen Geraden, aus denen man an eine Fläche 2. Klasse Paare orthogonaler Tangentenebenen legen kann, ist also ein Grenzfall des Battaglinischen Komplexes. Zahlreiche Eigenschaften dieser Figuren, insbesondere auch viele Theoreme aus J. Richard, Thèse sur la surface des ondes de Fresnel, Châteauroux 1901, werden bewiesen. — Ref. findet es erfreulich, zu sehen, daß man sich auch heute noch der den Klassikern selbstverständlichen Haltung erinnert, Fragen, die der Geometrie und der Mechanik gemeinsam nützen, zu verfolgen und in ihrer wechselseitigen Förderung darzustellen.

K. Strubecker.

**Herrmann, Horst:** Matrizen als projektive Figuren. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 56, 6—20 (1952).

Verf. ordnet einem Simplex des projektiven  $P_n$  die Matrix zu, deren Spalten aus den projektiven Koordinaten der Eckpunkte (oder dual der Seiten) gebildet werden; jede Spalte dieser Matrix ist also nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Jedem Simplex entspricht mithin eine Klasse „äquivalenter“ Matrizen, aus der ein Repräsentant durch einzelne Normierung der Spalten herausgegriffen werden kann, wovon Verf. stets Gebrauch macht, um Simplexe in besonderer Lage durch ihre Matrizen zu charakterisieren. Es werden auf diese Weise Simplexpaare in perspektiver Lage, solche in „Reguluslage“ (Schläfli-paare genannt), ferner Möbius-paare gekennzeichnet, sowie einige Sätze darüber an Hand der zugeordneten Matrizen bewiesen.

E. Sperner.

**Srinivasiengar, C. N. and B. N. Mukherjee:** Normal linear complexes of a quadric surface. Math. Student 19, 108—112 (1952).

Die Arbeit geht aus von der bekannten Tatsache, daß die Fußpunkte der sechs Normalen aus irgendeinem Punkt  $P$  nach einer Fläche zweiter Ordnung auf einer Raumkurve dritter Ordnung liegen, die durch  $P$  und durch den Mittelpunkt der Fläche geht. Diese Kurve wird kurz Normalkubik von  $P$  genannt. Der lineare Komplex der Tangenten an diese Kubik wird als der normale Linienkomplex von  $P$  mit Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung bezeichnet. Die Verff. geben eine Reihe von Eigenschaften dieser Linienkomplexe an, wobei die Beweise meist weggelassen werden, da sie leicht zu führen sind. Die betrachteten geometrischen Gebilde werden in der üblichen Weise durch Punkt- bzw. Linienkoordinaten im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Sätze, deren Zusammenhang mit den zuerst von Reye untersuchten tetraedralen Komplexen leicht ersichtlich ist, werden zunächst für das dreiachsige Ellipsoid aufgestellt bzw. einsichtig gemacht und sodann für das einmantelige Hyperboloid, das elliptische Paraboloid und das Umdrehungs-ellipsoid modifiziert. Von besonderem Interesse ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein beliebiger Strahlenkomplex als normaler Linienkomplex mit Bezug auf ein Ellipsoid angesehen werden kann.

E. Löffler.

**Charrueau, André:** Formules matricielles relatives aux complexes linéaires et aux faisceaux de complexes linéaires. I. II. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 860—862, 931—933 (1952).

Fortsetzung einer Untersuchung über lineare Strahlenkomplexe und Büschel solcher (dies. Zbl. 46, 383). In der ersten der zwei vorliegenden Abhandlungen geht Verf. von den Matrizen zweier spezieller linearer Strahlenkomplexe aus, und berechnet diejenigen des Produktes einer beliebigen (geraden oder ungeraden) Anzahl von Strahlenkomplexen ihres Büschels. Es folgt dieselbe Rechnung im Falle, daß die zwei singulären Strahlenkomplexe des Büschels zusammenfallen. In der zweiten Abhandlung werden zwei beliebige Komplexe eines Büschels betrachtet, die den Nullsystemen  $T_1$  und  $T_2$  entsprechen, und es werden die Matrizen der Projektivitäten  $(T_1 T_2)^p$ ,  $(T_1 T_2)^p T_1$  ausgerechnet.

E. Togliatti.

**Baldassarri, Mario:** I sistemi algebrici di spazi e l'insieme dei loro spazi totali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 171—197 (1952).

Etant donné un complexe linéaire  $\mathfrak{K}_h$  de  $S_h$  d'un  $S_r$ , on dit qu'un  $S_t$  ( $t > h$ ) de  $S_r$



est total pour  $\mathfrak{S}_h$  quand  $S_h \in S_t$  implique  $S_t \in \mathfrak{S}_h$ . L'ensemble  $\Sigma_t$  des  $S_t$  totaux d'un complexe  $\mathfrak{S}_h$  est donné par l'intersection de  $\binom{r+1}{t-h}$  complexes  $\mathfrak{S}_t$  de  $S_r$ . L'A. traite le problème de déterminer combien de ces  $\mathfrak{S}_t$  sont indépendants dans le cas  $t = h + 1$  et il donne la solution au moyen du nombre des  $S_{r-1}$  totaux pour  $\mathfrak{S}_h$ . L'A. donne aussi la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de  $S_t$  totaux pour la variété d'intersection de  $q$  complexes linéaires  $\mathfrak{S}_h$ , ainsi que la dimension de la variété  $\Sigma_t$  correspondante.

G. Ancochea.

Coxeter, H. S. M.: Interlocked rings of spheres. Scripta math. 18, 113—121 (1952).

Es sei  $K$  eine durch drei feste Kugeln aufgespannte Kette von  $n$  Kugeln  $K_1, \dots, K_n$  mit der Eigenschaft, daß  $K_i$  sowohl die festen Kugeln, wie  $K_{i-1}$  berührt ( $i = 1, \dots, n$ ;  $K_0 = K_n$ ). Schließt sich  $K$  nach  $k$ -maligem Umlauf um die durch die festen Kugeln bestimmte Dupinsche Cyklide, so setzen wir  $p = n/k$  und nennen  $K$  eine  $p$ -Kette. Es handelt sich um die interessante Konfiguration, bei der je drei Kugeln einer  $p$ -Kette eine  $q$ -Kette aufspannen. Verf. gibt einen sehr schönen Beweis des Steiner-Kollrosschen Satzes (Kollros, dies. Zbl. 19, 321) nach dem in einer solchen Konfiguration  $1/p + 1/q = 1/2$  ausfällt. Der Beweis beruht auf der Betrachtung eines gewissen vierdimensionalen Polytops, des sogenannten rechtwinkligen Produktes von zwei regulären Sternpolygonen vom Symbol  $\{p\}$  und  $\{q\}$ . Diese Betrachtungen führen zu weiteren merkwürdigen Beziehungen.

L. Fejes Tóth.

Biarge, Julio Fernández: Zirkulare Kubiken. Gac. mat., Madrid 4, 238—247 (1952) [Spanisch].

È un'esposizione di eleganti proprietà metriche delle cubiche circolari, razionali o no. Molte di queste proprietà discendono, mediante interessanti particolarizzazioni, dal teorema: Se  $M_0, M_1, M_2; N_0, N_1, N_2$  sono due terne di punti allineati di una cubica circolare, condizione necessaria e sufficiente perchè  $M_1 M_2 N_1 N_2$  giacciono sopra una circonferenza è che la retta  $M_0 N_0$  sia parallela all'asintoto reale. — Nell'esposizione interviene il concetto di fuoco di una cubica circolare, definito come intersezione dei due asintoti complessi, e il concetto di assi del punto doppio, quando la cubica è razionale, come le bisettrici delle tangenti principali.

M. Benedicty.

Bagchi, Haridas e Manindra Chandra Chaki: Note on autopolar plane cubics. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 316—334 (1952).

È un semplice esercizio, in cui si parla delle  $\infty^1$  polarità che mutano in sè una cubica cuspidata. Si considerano inoltre talune particolari omografie e trasformazioni quadratiche che mutano in sè una cubica piana qualunque.

M. Benedicty.

Bagchi, Hari Das: Note on circular cubics and bicircular quartics. II. Math. Student 19, 122—123 (1952).

Due cubiche circolari hanno in comune, oltre ai punti ciclici, altri sette punti ed è noto che se di questi quattro sono conciclici i rimanenti tre sono allineati e viceversa; l'A. trasformando la coppia di cubiche con un'inversione deduce analoghe proprietà per una cubica e una quartica bicircolare oppure per una coppia di quartiche bicircolari, compresi i casi di degenerazione.

P. Buzano.

Tallqvist, Hj.: Über Örter gleicher Gesichtswinkel in bezug auf zwei Gegenstände. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 16, Nr. 7, 13 S. (1952).

In Fortführung älterer Untersuchungen des Verf. [Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 5 Nr. 11, 44 S. (1930) und dies. Zbl. 18, 420] werden die Punkte betrachtet, von denen aus unter gleichem Winkel gesehen werden: a) zwei Ellipsen mit gemeinsamer Achse (mit den Grenzfällen eines Kreises bzw. einer Strecke), b) zwei Parabeln mit gemeinsamer Achse, c) Parabel und Kreis bzw. Längs- bzw. Querstrecke in symmetrischer Lage bezüglich Parabelachse. — Mit acht Figuren als Beispielen.

M. Barner.

**Tallqvist, Hj.:** Auf zwei Kreise sich beziehende Probleme. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 16, Nr. 8, 10 S. (1952).

Mit Figuren diskutiert werden die Punktorte: Ort der Punkte, die konstantes Abstandsverhältnis bezüglich zweier Kreise haben. Ort der Punkte, von denen aus zwei Kreise unter dem Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gesehen werden, so daß gilt:  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , bzw. so daß gilt  $\alpha = 2\beta$ . Weitere Aufgaben derselben Art werden genannt. Vgl. hierzu dies. Zbl. 18, 420 und 43, 359.

*M. Barner.*

**Tallqvist, Hj.:** Einige auf eine Gerade und einen Kreis sich beziehende Aufgaben. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 16, Nr. 9, 13 S. (1952).

Zusammenstellung von Aufgaben, die vom Verf. zum Teil bereits (dies. Zbl. 43, 359) behandelt wurden. Hier werden mit Figuren eingehend diskutiert die Punktorte: a) Ort konstanter Summe bzw. Differenz der Abstände von Kreis und Gerade. b) Ort konstanter Summe der Quadrate der Abstände von Kreis und Gerade, die sich nicht schneiden. c) Ort der Punkte, von denen aus ein Kreis unter gleichem bzw. doppeltem Winkel gesehen wird wie eine Strecke, deren Mittelsenkrechte durch den Kreismittelpunkt geht.

*M. Barner.*

**Tallqvist, Hj.:** Geometrische Örter bei einem Kegelschnitt. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 16, Nr. 10, 11 S. (1952).

Für Ellipse, Hyperbel und Parabel werden die Gleichungen der geometrischen Örter aufgestellt: a) Ort konstanten Abstandes zwischen Pol und Polare. b) Ort konstanter Tangentenlänge. c) Ort konstanten Normalabstandes (Parallelkurven). — Für jeden der neun betrachteten Punktorte ist eine Figur als Beispiel gegeben.

*M. Barner.*

**Sonnenschein, J.:** Points de courbure nulle sur la conchoïde d'une ellipse. Mathesis 61, 84—87 (1952).

Es wird bewiesen: Es gibt dann und nur dann eine Konchoide der Ellipse bezüglich deren Mittelpunkt (außerhalb der Ellipse), die Wendepunkte besitzt, falls gilt:  $a/b \geq 2 + \sqrt{3}$  ( $a, b$  die Halbachsen der Ellipse).

*M. Barner.*

**Ströher, Wolfgang:** Der Kreidekreis. Element Math. 7, 132—135 (1952).

Beim Zeichnen eines Kreises an der Tafel mit Hilfe des üblichen Kreidezirkels wird sich das Kreidestück ständig verkürzen. Verf. beantwortet die Frage, was für eine Kurve der so erhaltene „Kreidekreis“ eigentlich ist und findet allgemeine Zykloiden, wenn man voraussetzt, daß die Verkürzung des Kreidestückes proportional zum beschriebenen Bogen ist.

*J. C. H. Gerretsen.*

**Bagchi, Haridas e Biswarup Mukherji:** Note on certain remarkable types of curves, surfaces and hyper-surfaces. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 395—405 (1952).

È un esercizio di Geometria analitica: in un  $S_{n+1}$  euclideo una forma  $F$  d'ordine pari  $2m$  interseca l'iperpiano improprio secondo l'assoluto contato  $m$  volte se e solo se è costante il prodotto delle distanze da un punto fisso  $O$  dei punti d'incontro di  $F$  con una retta variabile per  $O$ . Segue una banale generalizzazione di un teorema di Robert sulle intersezioni della  $F$  con un'ellisse.

*M. Benedicty.*

**Niče, V.:** Les surfaces strophoidales du 3<sup>e</sup> ordre. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 113—120 (1952).

L'A. indique comment on obtient les surfaces  $\Sigma$  spéciales de degré 3 admettant un cône circonscrit, de degré 2, le long d'une certaine conique tracée sur  $\Sigma$ . Soit une conique  $c$  et deux points  $A, B$  non situés dans le plan ( $c$ ) de  $c$ ; la droite  $AB$  coupe ( $c$ ) en  $C$ ; soit  $C_1$  le conjugué de  $C$  par rapport à  $A$  et  $B$ ,  $t$  étant la polaire de  $C$  par rapport à  $c$ ; le plan  $P(C_1, t)$  est le plan polaire de  $C$  par rapport à chacune des quadriques  $Q$  assujéties à contenir  $A, B, c$ . On prend un point  $S$  qui n'est ni sur  $AB$ , ni dans ( $c$ ), ni dans  $P$ ; une droite quelconque  $D$  issue de  $S$  coupe  $P$  en un point  $\alpha$ , pôle de ( $c$ ) par rapport à une certaine quadrique  $Q_\alpha$  contenue dans la gerbe ( $Q$ );  $D$  et  $Q_\alpha$  se correspondent homographiquement et leurs points communs engendrent une surface  $\Sigma$  de degré 3 telle que le cône de sommet  $S$  et base  $c$  lui soit circonscrit le long de  $c$ ; les deux cônes de sommet  $A$  ou  $B$ , de base  $c$  se coupent suivant une seconde conique  $c_1$  située dans le plan  $P$ ;  $c_1$  joue par rapport à  $\Sigma$  et  $S$  le même rôle que  $c$ . L'A. suppose ensuite que  $c$  soit

l'ombilicale,  $A$  et  $B$  étant quelconques;  $C$  est le point à l'infini de  $AB$ ,  $C_1$  le milieu de  $AB$ ,  $P$  le médiateur de  $AB$ ; la gerbe des quadriques  $Q$  est celle des sphères issues de  $A$  et  $B$ ;  $S$  étant un point quelconque, on associe à une droite  $D$  quelconque issue de  $S$  la sphère passant par  $A$ ,  $B$  et ayant pour centre le point où  $D$  remonte  $P$ ; les points communs à cette droite et la sphère associée engendrent une surface d'ordre 3,  $\Sigma$ , se raccordant le long de l'ombilicale avec la sphère de rayon nul centrée en  $S$ . Chaque section plane de  $\Sigma$  est circulaire, et admet  $S$  pour foyer quadruple si le plan passe par  $S$ . Le foyer quadruple de chaque section plane de  $\Sigma$  est la projection normale de  $S$  sur ce plan. Si un plan pivote autour d'une droite  $D$ , le lieu des foyers quadruples des sections planes de  $\Sigma$  ainsi obtenues est un cercle passant par  $S$ , le point diamétralement opposé à  $S$  étant sur  $D$ ; les foyers quadruples des sections de  $\Sigma$  par les plans qui pivotent autour d'un point  $M$  sont sur la sphère dont  $MS$  est un diamètre. Si  $A$ ,  $B$  sont réels,  $\Sigma$  est bipartite. Si  $A$ ,  $B$  coïncident avec un point réel, ce point est un point double de  $\Sigma$ . L'A. indique de nombreuses propriétés de  $\Sigma$  dans ce cas. Si  $A$ ,  $B$  sont des points imaginaires conjugués,  $\Sigma$  est réelle, mais, cette fois, unipartite. Le travail est rédigé en français par un auteur qui n'a pas suffisamment la pratique de cette langue.

B. Gambier.

**Underwood, R. S.: Functions of  $n$  variables in extended analytic geometry.** Amer. math. Monthly 59, 453—460 (1952).

Verf. bemüht sich darum, Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen im  $R_3$  zu veranschaulichen [vgl. dazu seine früheren Arbeiten: Amer. math. Monthly 52 (1945) und dies. Zbl. 35, 57]. Der Grundgedanke ist bei drei unabhängigen Veränderlichen folgender: Man gehe von der Funktion  $U = f(x, y, z)$  zu  $U = f(x, Y, x - X)$  oder ähnlichen Bildungen über und deute dies als eine vom Parameter  $x$  abhängige Flächenschar im  $(X, Y, U)$ -Raum. Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach  $x$  erhält man  $x$  als Funktion von  $X$  und  $Y$ , was eingesetzt, zu einer Fläche  $U$  in Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  führen kann, in deren Inneren die Flächenscharen liegen. Dies gestattet Anwendungen auf Untersuchungen von Maxima und Minima, wofür Beispiele gegeben werden.

W. Burau.

### **Algebraische Geometrie:**

**Villa, M.: Transformations ponctuelles et transformations cremoniennes.** Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 41—68 (1952).

L'A. espone i più recenti sviluppi e lo stato attuale della teoria delle trasformazioni puntuali e cremoniane. — Nella prima parte Egli tratta il problema della approssimazione, con trasformazioni cremoniane, di una trasformazione puntuale tra due piani o tra due spazi di dimensione maggiore di 2 nell'intorno di una coppia regolare di punti corrispondenti. Come è noto tale approssimazione è possibile fino ad un ordine comunque elevato. — Nella seconda parte l'A. tratta della approssimazione di una trasformazione puntuale tra due piani nell'intorno di una coppia di punti corrispondenti a jacobiano nullo con trasformazioni cremoniane oppure, quando ciò non sia possibile, con trasformazioni razionali non cremoniane. — Nella terza parte l'A. espone vari risultati che riguardano le trasformazioni cremoniane, ed in particolare: il teorema che riguarda la impossibilità di ottenere una qualunque trasformazione cremoniana tra due spazi ad  $n$  dimensioni (con  $n \geq 3$ ) come prodotto di trasformazioni (pure cremoniane) di dato ordine, teoremi che danno la caratterizzazione delle reti omalooidiche di curve nel piano e di superfici nello spazio, e quelli che riguardano le trasformazioni cremoniane tra piani affini conservanti le aree. — Il lettore viene informato dei problemi rimasti aperti e delle idee direttive delle dimostrazioni di molti tra i teoremi citati, e trova a sua disposizione un indice bibliografico molto ampio, accurato ed aggiornato.

C. F. Manara.

**Fabricius-Bjerre, Fr.: An elementary (6,1)-transformation.** Mat. Tidsskr. B 1952, 1—13 (1952).

Von einem Punkte  $P$  der Ebene eines Kegelschnittes  $K$  werden an  $K$  die Tangenten und in deren Berührungspunkten die Normalen zu  $K$  gezeichnet. Die beiden Normalen scheiden sich in  $P'$  und die rationale Transformation  $P \rightarrow P'$  ist Gegenstand der Untersuchung, die rechnerisch durchgeführt wird. An Literatur werden Arbeiten von Bauer, Berzolari, Clebsch, Laguerre und Scott angeführt.

R. W. Weitzenböck.

**Tibiletti, Cesarina: Un teorema fondamentale della geometria algebrica.** Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 111—125 (1952).

Verf. bespricht verschiedene Fassungen und Erweiterungen des Noetherschen



Fundamentalsatzes und referiert über die eigenen diesbezüglichen Arbeiten (dies. Zbl. 44, 354, 45, 103, 104). Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist angeschlossen.

*W. Gröbner.*

**Fusa, Carmelo:** Alcune proprietà dei sistemi lineari di curve piane algebriche. Arch. der Math. 3, 465—469 (1952).

In den ersten zwei Seiten dieser Note wird eine einfache und im Grunde bekannte Bemerkung über Linearsysteme algebraischer Kurven in der Ebene bewiesen. Die letzten drei Seiten sind eine wörtliche Wiederholung einer schon gesprochenen Note des Verf. (dies. Zbl. 47, 396—397).

*F. Conforto.*

**Gauthier, L.:** Quelques travaux récents concernant la classification des courbes algébriques. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège du 9 au 12 juin 1952, 29—39 (1952).

Darstellung der Untersuchungen von J. Drach und P. Lévy-Bruhl über die projektiven Modelle einer algebraischen Kurve des Geschlechts  $p$ . Ein Modell von Drach ist eine ebene Kurve, des Geschlechts  $p$ , mit höchstens drei gewöhnlichen mehrfachen Punkten in den Ecken  $A, B, C$  eines Dreiecks. Solche Modelle gestatten eine vollständige Klassifikation der algebraischen Kurven des Geschlechts  $p$  auf Grund ihrer Gonalityeigenschaften nur für  $p = 2, 3, 4$ ; für  $p \geq 5$  kann man die Kurve des Geschlechts  $p$  mit allgemeinen Moduln durch ein Modell von Drach nicht mehr erreichen. Das Modell von Lévy-Bruhl besteht aus einer kanonischen Kurve des Geschlechts  $p$ , durch welche eine algebraische Fläche hindurchgeht, deren Ordnung zwischen  $p - 2$  und  $2p - 4$  liegt. Ein solches Modell gestattet eine vollständige Klassifikation der Kurven des Geschlechts  $p$  bis  $p = 10$ ; die Klassifikation wird hier für  $p = 8$  ausführlich dargestellt. Es bleibt die Frage offen, ob jede kanonische Kurve auf einer Fläche höchstens  $(2p - 4)$ -ter Ordnung liegt.

*E. Togliatti.*

**Caputo, Michele:** Sulla configurazione delle curve algebriche sgheembe dei primi ordini dotate di  $d \geq 0$  punti doppi situate sopra quadriche. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 111—125 (1952).

Vengono considerate le curve algebriche sgheembe (reali, anzi dotate di parte reale) degli ordini 4, 5, 6 e situate su quadriche a punti iperbolici o parabolici od ellittici. Limitando l'indagine alle curve dotate di soli nodi (anzi di soli nodi reali ed a rami reali) si introduce una ripartizione in tipi affidata, oltre che all'ordine, a taluni caratteri della parte reale. — Utilizzando noti risultati di A. Harnack, D. Hilbert, M. Piazzolla Beloch ed alcune proposizioni che l'A. stesso stabilisce, si perviene ad una elencazione di tipi possibili dei quali si accerta la effettiva esistenza con ricorso a procedimenti di piccola variazione.

*V. E. Galafassi.*

**Chisini, O.:** Courbes de diramation des plans multiples et tresses algébriques. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 11—27 (1952).

Conférence faisant le point de la question des plans multiples, avec présentation plus développée de la théorie des tresses due à l'A.; exposé de quelques résultats récents obtenus par ses élèves. [O. Chisini, ce Zbl. 8, 220; 16, 414, Sulla costruzione a priori delle trece caratteristiche, Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. 33, 353—366 (1952); Dedò, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 83, 227—258 (1951); C. Tibiletti, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 249—259 (1952)].

*B. d'Orgeval.*

**Predonzan, Arno:** Sui monoidi  $V_{k-1}^n$  di  $S_k$  situati sulla forma generale  $F_{r-1}^n$  di  $S_r$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 335—344 (1952).

Es wird folgendes bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von linearen Unterräumen  $S_k$  eines linearen projektiven  $S_r$  ( $1 \leq k \leq r - 1$ ), die die allgemeine Hyperfläche  $F_{r-1}^n$  ( $n \geq 2$ ) des  $S_r$  in einem Monoid  $M_{k-1}^n$  [Hyperfläche des  $S_k$  mit einem  $(n - 1)$ -fachen Punkte] schneiden, ist: A)  $r \geq k +$

$\frac{1}{k+1} \left[ \binom{n+k-2}{k} - k \right]$  wenn  $n > 2$ . B)  $r \geq k+1$  wenn  $n = 2$ . Im Falle A) gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die  $M_{k-1}^n$  auf der  $F_{r-1}^n$  in endlicher Anzahl vorhanden sind. Im Falle B) sind die  $M_{k-1}^n$  auf der  $F_{r-1}^n$  immer in unendlicher Anzahl. Gibt es auf der  $F_{r-1}^n$  unendlich viele  $M_{k-1}^n$ , so bilden diese  $M_{k-1}^n$  ein algebraisches System  $\Sigma$ , das im Falle A) irreduktibel im Rationalitätsbereich der Koeffizienten der  $F_{r-1}^n$  ist und die Dimension  $(k+1)(r-k) - \binom{n+k-2}{k} + k$  hat; im Falle B) ist das System  $\Sigma$  (birational äquivalent mit dem System der  $S_k$  eines  $S_r$  und daher) rational und von der Dimension  $(k+1)(r-k)$ . — Der Beweis des Verf. stützt sich wesentlich auf das Prinzip der Abzählung der Konstanten und auf die Korrespondenz zwischen den  $M_{k-1}^n$  der  $S_k$  des  $S_r$  und den  $F_{r-1}^n$  des  $S_r$ , wobei eine  $M_{k-1}^n$  und eine  $F_{r-1}^n$  als korrespondent zu bezeichnen sind, wenn die  $F_{r-1}^n$  die Mannigfaltigkeit  $M_{k-1}^n$  enthält. *F. Conforto.*

**Morin, Ugo:** Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie del quarto ordine dell' $S_6$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 406—409 (1952).

Die allgemeine Hyperfläche  $V_{r-1}^n$  eines linearen Raumes  $S_r$  ist bekanntlich unirational (d. h. parametrisch darstellbar mittels rationaler Funktionen von  $r-1$  Parametern) wenn  $r$  genügend groß ist. Es entsteht so (für jedes  $n$ ) die schwierige Frage des minimalen Wertes  $r_0^{(n)}$  von  $r$ , so daß  $V_{r-1}^n$  (dann und nur dann) unirational ist, wenn  $r \geq r_0^{(n)}$ . Für  $n = 3$  ist bekanntlich  $r_0^{(3)} = 3$ . Für  $n = 4$  und  $r \geq 7$  ist die  $V_{r-1}^n$  unirational. Da eine allgemeine Kurve vierter Ordnung in einem  $S_2$  und eine allgemeine Fläche vierter Ordnung in einem  $S_3$  nicht unirational sind, könnte daher  $r_0^{(4)} = 4$ , oder 5, oder 6, oder 7, sein. Verf. zeigt, daß man nicht  $r_0^{(4)} = 7$  haben kann. In der Tat beweist der Verf. daß die  $V_5^4$  des  $S_6$  unirational ist. Um den endgültigen Wert von  $r_0^{(4)}$  zu bestimmen, hätte man nur noch die  $V_4^4$  des  $S_5$  und die  $V_3^4$  des  $S_4$  in bezug auf die Unirationalität zu prüfen. Der Beweis der Unirationalität der  $V_5^4$  des  $S_6$  gelingt dem Verf. durch geschickte Anwendung eines Satzes von Predonzan (s. vorstehendes Referat) und eines Resultates von Baldassarri (dies. Zbl. **38**, 318, erstes Referat). *F. Conforto.*

**Guazzone, Stefano:** Sulle ipersuperficie di  $S_k$  e di ordine  $s$  che appartengono alla ipersuperficie generale di ordine  $n$  di  $S_r$  ( $r > k$ ). Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 243—251 (1952).

Die Frage der linearen Räume einer beliebig gegebenen Dimension  $k-1$ , die auf einer allgemeinen algebraischen  $F_{r-1}^n$  des Raumes  $S_r$  liegen können, ist von U. Morin, B. Segre, A. Predonzan beantwortet worden. Als Verallgemeinerung betrachtet hier Verf. die Mannigfaltigkeiten  $F_{k-1}^s$ , mit  $2 \leq s \leq n-s$ , die auf einer allgemeinen Hyperfläche  $F_{r-1}^n$  liegen können. Man findet, daß  $F_{r-1}^n$  eine  $F_{k-1}^s$  nur dann enthalten kann, wenn  $\delta = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-s}{k} + \binom{k+s}{k} - 1 \geq 0$  ist. Ist  $\delta = 0$ , so enthält  $F_{r-1}^n$  nur eine endliche Anzahl von  $F_{k-1}^s$ ; ist  $\delta > 0$ , so bilden die auf  $F_{r-1}^n$  liegenden  $F_{k-1}^s$  ein System mit der Dimension  $\delta$ , welches in dem von den Koeffizienten der  $F_{r-1}^n$  definierten Rationalitätsbereich irreduzibel ist. Der Beweis ist eine Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl auf die algebraische Korrespondenz zwischen einer  $F_{r-1}^n$  und einer  $F_{k-1}^s$ , deren erste die zweite enthält. *E. Togliatti.*

**Guazzone, Stefano:** Su certe sezioni spaziali di varietà intersezioni complete di due forme di  $S_r$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 293—302 (1952).

Die allgemeinste Schnittmannigfaltigkeit  $V_{r-2}^{n(n-1)}$  einer  $F_{r-1}^n$  und einer  $F_{r-1}^{n-1}$  des Raumes  $S_r$  kann eine  $F_{k-1}^{n-1}$  eines Raumes  $S_k$  nur dann enthalten, wenn  $r+1 \geq k + \frac{1}{k+1} \binom{n+k}{k}$  ist. Die im Beweise angewendeten Verfahren sind denjenigen der vorstehend besprochenen Abhandlung ganz ähnlich. Es handelt sich um eine

Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl auf diejenige algebraische Korrespondenz, welche eine  $F_{k-1}^{n-1}$  und eine unserer  $V_{r-2}^{n(n-1)}$  als entsprechend betrachtet, wenn die zweite die erste enthält.  
E. Togliatti.

**Vaccaro, Giuseppe: Esame di singolarità superficiali. I. Superficie algebriche d'ordine  $n$  con punti  $(n-2)$ -pli inflessionali.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 373—378 (1952).

Ein  $(n-2)$ -facher Punkt  $O$  einer algebraischen Fläche  $F^n$  des dreidimensionalen Raumes heißt ein  $(n-2)$ -facher Schmiegunbspunkt, wenn jede Gerade, die  $F^n$  in  $O$  berührt, mit  $F^n$   $n$  zusammenfallende Punkte gemein hat. Verf. betrachtet hier eine  $F^n$ , die einen solchen Punkt  $O$  aufweist, und diskutiert die Möglichkeiten weiterer mehrfacher Punkte von  $F^n$ . Der Grundgedanke der Diskussion ist die Bemerkung, daß  $F^n$  durch eine harmonische Homologie, mit  $O$  als Zentrum, in sich verwandelt wird; die Ebene  $\omega$  der Homologie bildet, zusammen mit dem Berührungskegel von  $F^n$  in  $O$ , die erste Polare von  $O$  selbst in bezug auf  $F^n$ ;  $\omega$  wird die harmonische Ebene von  $O$  genannt. Es wird zunächst der Fall eines weiteren Doppelpunktes auf  $F^n$  betrachtet; dann der Fall eines  $s$ -fachen Punktes; und schließlich derjenige eines zweiten  $(n-2)$ -fachen Schmiegunbspunktes. Immer muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der neue mehrfache Punkt auf  $\omega$  liegt oder nicht. Im Falle  $n=3$  findet man eine Bedingung dafür, daß eine Fläche  $F^3 \infty^1$  Eckardtsche Punkte enthält, die eine Gerade bilden; dazu ist notwendig und hinreichend, daß  $F^3$  zwei solche Punkte enthält, derart daß keiner auf der harmonischen Ebene des anderen liegt.  
E. Togliatti.

● **Hodge, W. V. D. and D. Pedoe: Methods of algebraic geometry. Vol. II, Book III: General theory of algebraic varieties in projective space. Book IV: Quadrics and Grassmann varieties.** Cambridge: At the University Press 1952. 1X, 394 p. 42 s. net.

Après le 1<sup>re</sup> volume paru en 1947 contenant des préliminaires algébriques et la notion d'espace projectif (livres I et II) vient ce second volume qui expose la théorie générale des variétés algébriques dans l'espace projectif (livre III) et l'étude des quadriques et des variétés de Grassmann (livre IV). Ainsi, nous n'aborderons pas encore les questions fondamentales de la théorie arithmétique et de la géométrie birationnelle des variétés algébriques qui ont été réservées pour un volume III, les AA. ayant constaté, sans doute à regret, que la place n'était pas trop grande pour les matières traitées ici. Le but recherché, et atteint, est de couvrir avec toute la rigueur voulue les besoins de la géométrie algébrique classique (sur le corps des complexes), ce qui nécessite pourtant l'introduction des corps de caractéristique nulle (algébriquement fermés ou non). — Les AA. donnent d'abord (pages 1 à 87) les idées générales de: variété algébrique, réductible, irréductible, absolument irréductible, point générique d'une variété irréductible, dimension, ordre, point simple, espace tangent. Pour ces notions, ils utilisent avec bonheur la forme associée de Chow et Van der Waerden, baptisée forme de Cayley pour des raisons historiques justifiées (équation projetant  $V_d$  d'une variété linéaire générique de dimension  $n-d-2$ ). — Les deux chapitres suivants sont consacrés à la théorie des correspondances algébriques (pages 88 à 139) et des multiplicités d'intersection des variétés algébriques (pages 140 à 201). Pour les correspondances algébriques, les AA. utilisent les variétés de C. Segre et la notion de produit direct de variétés algébriques due à F. Severi; leur théorie des multiplicités d'intersection est moins générale que celles de A. Weil, O. Zariski ou C. Chevalley, mais elle est suffisante pour la géométrie algébrique classique et en particulier pour la théorie de l'équivalence et la théorie de la base, traitées aux sections 9 à 11 (pages 180 à 201). — Dans le livre IV se trouvent rassemblées les principales propriétés des quadriques (pages 202 à 308); comme illustration des méthodes générales, tandis qu'au dernier chapitre est présentée une étude un peu moins connue des variétés de Grassmann et des variétés de Schubert, avec applications à la géométrie énumérative. — En conclusion, les AA. ont voulu faire un exposé facile à lire: clarté, explications complètes, choix des méthodes, illustration des théories générales. Ils y ont réussi, sans pouvoir éviter l'inconvénient d'une certaine longueur. Ils ne cachent pas, dans une note bibliographique, tout ce qu'ils doivent aux travaux de B. L. Van der Waerden, A. Weil, O. Zariski et C. Chevalley pour la partie algébrique, et à F. Severi et aux géomètres italiens pour les notions géométriques. En adaptant ces travaux et en y ajoutant leurs propres idées, ils ont fait un livre très utile sur les premières notions générales de géométrie algébrique.  
L. Lesieur.



**Gaeta, Federico:** Quelques progrès récents dans la classification des variétés algébriques d'un espace projectif. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 145—183 (1952).

Verf. gibt eine zusammenfassende Übersicht über seine aufschlußreichen Untersuchungen zur Klassifikation von algebraischen Mannigfaltigkeiten (AM), insbesondere Raumkurven, welche in irreduzible, nicht mehr erweiterungsfähige, algebraische Systeme oder kurz „Familien“ eingeordnet werden können, für die gewisse neu eingeführte Invarianten (invariants syzygétiques) kennzeichnend sind. Die Ergebnisse sind beschränkt auf AM von endlichem Residual (dies. Zbl. 40, 230), das sind perfekte AM der Dimension  $r-2$  eines  $S_r$ . Die von Severi angeregte Untersuchung, welche ursprünglich mit klassischen Methoden und auf irreduzible, singularitätenfreie AM eingeschränkt geführt worden war, brachte erst dann ein Ergebnis von zufriedenstellender Einfachheit und Allgemeinheit, nachdem der Begriff der AM im idealtheoretischen Sinne übernommen und die Syzygientheorie der  $H$ -Ideale (Gröbner, dies. Zbl. 31, 201; 33, 127) angewendet worden war. Der Begriff der AM als „cycle“ (A. Weil, van der Waerden) hat zwar den Vorteil, daß hier die Bedeutung eines „algebraischen Systems von AM“ völlig geklärt ist, aber den Nachteil, daß der Satz: „Eine Hyperfläche geht durch eine gegebene AM (cycle)“ sinnlos ist. — Jede perfekte Raumkurve vom Residual  $\rho$  ist als Matrixideal einer homogenen Matrix mit  $\rho+1$  Zeilen und  $\rho+2$  Spalten darstellbar; sie gehört einer Familie an, deren „invariants syzygétiques“ im wesentlichen durch die  $2\rho+2$  unabhängigen Gradzahlen der Elemente der Matrix bestimmt sind. Das läßt sich unmittelbar auf perfekte  $V_{r-2}$  des  $S_r$  verallgemeinern ( $r=2$ , dies. Zbl. 43, 361). Die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf  $V_{r-1}$  des  $S_r$  wird angedeutet. W. Gröbner.

**Néron, A.:** La théorie de la base pour les diviseurs sur les variétés algébriques. Centre Belge Rech. math. 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 119—127 (1952).

Let  $V$  be an arbitrary normal variety and let  $G$  be the free abelian group of  $V$ -divisors; let  $G_a$  and  $G_l$  be the subgroups of  $G$  which are defined respectively by algebraic and linear equivalences. The restrictions to the rational divisors over a field  $K$  will be denoted such as  $G_a(K)$ ,  $G_l(K)$  etc. The author gives an outline of the purely algebraic proof, which is valid for arbitrary characteristic, of Severi's theorem which asserts that the „algebraic homology group“ (over integers)  $G/G_a$  has a finite set of generators. The essential part of the proof is carried out by the classical method of „infinite descent“. It seems that the author has been much influenced by Weil's thesis in which the similar result for the factor group  $G_a(K)/G_l(K)$  where  $V$  is a curve and  $K$  a finite algebraic number field is proved by the same method. The author derives also a generalization of Weil's theorem for an arbitrary finitely generated extension  $K$  of the prime field, which determines the range of validity of Weil's theorem. Thereby Weil's original theorem is used in the proof when  $K$  is of characteristic 0. J. Igusa.

**Nollet, L.:** Introduction des courbes quasi irréductibles d'une surface algébrique. Application à la régularité de certains systèmes linéaires. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 211—223 (1952).

Nach einer Einleitung über die verwendeten Grundbegriffe definiert Verf. für zwei Kurven  $A, B$  einer irreduziblen singularitätenfreien algebraischen Fläche das Symbol  $(A, B)$ , das in gewöhnlichen Fällen die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Kurven bedeutet (virtuelle Schnittpunktzahl). Dann heißt eine Kurve  $C$  „quasi irreduzibel“, wenn  $(C, X) \geq 0$  ist für jede Kurve  $X$ . Unter anderen Konsequenzen leitet Verf. den Satz ab, daß jedes pseudo- $\nu$ -kanonische (d. h. dem  $\nu$ -kanonischen System  $\nu K$  arithmetisch äquivalente) lineare System regulär ist für  $\nu \geq 3$  ( $p^{(1)} > 1$ ). W. Gröbner.

**Andreotti, A.:** Les problèmes de classification dans la théorie des surfaces algébriques irrégulières. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 111—118 (1952).

Let  $F$  be an algebraic surface of irregularity  $q \geq 1$  with the period matrix  $\omega$  of the Picard differentials of the first kind on  $F$ , then  $\omega$  determines an abelian variety  $V_q$  (the „Albanese variety“ of  $F$ ). Moreover  $F$  is transformed to a subvariety  $\Phi$  of  $V_q$ .

by a function  $\varphi$  on  $F$ . The classification problem consists of two parts: the nature of  $\varphi$  and the classification of  $\Phi$ . Since  $\Phi$  generates  $V_q$ , it is either a curve or a surface both of irregularity  $q$ . The first case is rather exceptional and  $F$  has the structure of the fibre-system over  $\Phi$ . The second case is also divided into two cases according as  $\varphi$  is birational or not. They are actually possible and the condition such that  $\varphi$  is birational is stated. The author states also that the algebraic extension of the function-field on  $\Phi$  is abelian. He draws one consequence whose generalization can be proved from another aspect. The rest of the note is rather „experimental“ and is devoted to the classification of  $\Phi$ . This part is similar to the classification of the space curves, the ambient space being here the abelian variety  $V_q$ . *J. Igusa.*

**Rosati, Mario:** Sopra le funzioni abeliane pari e le varietà abeliane di rango due. *Rend. Mat. e Appl., V. Ser.* **11**, 28—61 (1952).

$K$  sei ein Körper Abelscher Funktionen des Geschlechtes  $p$ ,  $W_p$  die zugehörige Picardsche Mannigfaltigkeit. Die Punktepaare der  $W_p$ , die in einer Spiegelung (Transformation erster Gattung) konjugiert sind, werden dargestellt durch eine Abelsche Mannigfaltigkeit  $V_p$  des Ranges 2, die in einer Korrespondenz  $[1, 2]$  mit der  $W_p$  steht. Hat die Spiegelung die Gleichung  $u' = u \pmod{\omega}$ , was man immer durch eine geeignete birationale Transformation erreichen kann, so leuchtet ein, daß der Körper der rationalen Funktionen auf  $V_p$  dem Körper der geraden Funktionen von  $K$  isomorph ist. Dieser Körper wird vom Verf. eingehend untersucht. — Die Riemannsche Matrix  $\omega$  wird in der Krazerschen Normalform vorausgesetzt:  $\omega = ||2\pi i \cdot A^{-1} A||$  ( $A = \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p \rangle$ ), d. h.  $A$  eine ganzzahlige Diagonalmatrix mit  $\delta_1 = 1$  und  $\delta_{i-1} | \delta_i$  für  $i = 2, 3, \dots, p$ ;  $A$  komplex symmetrisch mit negativ definitem Realteil). Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist dann eine sogenannte prinzipale Matrix für  $\omega$ ; und jede zugehörige Zwischenfunktion ist eine  $\Theta_{l\delta_p}(u)$ . Jede gerade Funktion aus  $K$  erscheint dann als Verhältnis von zwei  $\Theta_{l\delta_p}(u)$  desselben Typus, die beide gerade oder ungerade sind. Solche  $\Theta_{l\delta_p}(u)$  sind außerdem Lösungen eines gewissen Systems von Funktionalgleichungen; und solcher Systeme  $S(l, h)$  gibt es,

für jedes  $l \geq 1$ , genau  $2^{2p}$ , in Abhängigkeit von einer charakteristischen Matrix  $R = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_p \\ s_1 & \dots & s_p \end{pmatrix}$  des Typus  $(2, p)$ , wobei die  $r_i, s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) unabhängig voneinander 0 oder 1 sein dürfen. Verf. erledigt vollständig die Aufgabe der Bestimmung aller  $\Theta_{l\delta_p}(u)$ , die einem System  $S(l, h)$  ( $l \geq 1, 1 \leq h \leq 2^{2p}$ ) genügen. Solche  $\Theta_{l\delta_p}(u)$  bilden ein lineares System  $|L|$  der Dimension  $\delta$  (wobei  $\delta = l^p \frac{\delta_p}{\delta_1} \frac{\delta_p}{\delta_2} \dots \frac{\delta_p}{\delta_p}$ ). In jedem System  $|L|$  existieren zwei lineare Systeme

$|L'|, |L''|$ :  $|L'|$  besteht aus geraden,  $|L''|$  aus ungeraden Funktionen. Für die Dimensionen  $\delta'$  und  $\delta''$  von  $|L'|$  und  $|L''|$  gilt  $\delta' + \delta'' = \delta$ . Die Dimensionen  $\delta'$  und  $\delta''$  sind abhängig von  $\delta$ , von der Matrix  $R$  und von der Anzahl der ganzen Zahlen  $\delta_p / \delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), die gerade sind. Verf. gibt die genauen Ausdrücke der  $\delta'$  und  $\delta''$  in allen möglichen Fällen. Hieraus eröffnet sich die Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit  $V_p$  genau zu studieren. Die  $V_p$  ist oberflächlich regulär (d. h. ohne Picardsche Integrale erster Gattung) und jede Hyperfläche auf  $V_p$  kann durch Nullsetzen einer  $\Theta_{l\delta_p}$  dargestellt werden. Aus den Resultaten des Verf. kann man auch alle projektiven Bilder der  $V_p$  gut beherrschen. Im Falle  $p = 1$  war natürlich alles bekannt. Im Falle  $p = 2, \delta_1 = \delta_2 = 1$ , hat die  $V_p$  als projektives Bild die bekannte Kummer'sche Fläche; im Falle irgendeines  $p$ , mit  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_p = 1$ , eine Wirtingersche Mannigfaltigkeit. Der Fall  $p = 2, \delta_2 \neq 1$  wurde von Remy, Traynard und M. P. Beloch betrachtet, die verschiedene projektive Bilder der  $V_p$  näher untersucht haben. Verf. gibt darüber eine genaue Bibliographie. Mit der Untersuchung des Verf. wird der allgemeinste Fall betrachtet und erledigt, so daß alle früheren Resultate sich jetzt naturgemäß in die Theorie des Verf. einordnen.

*F. Conforto.*

**Conforto, Fabio:** Introduzione elementare alla geometria симплектика. Univ. Politec. Torino, *Rend. Sem. mat.* **11**, 93—109 (1952).

Vortrag, gehalten am 29. April 1952 am mathematischen Seminar der Universität Turin; er enthält eine Darstellung der Grundbegriffe der Theorie der symplektischen Transformationen von C. L. Siegel mit Berücksichtigung der Ergebnisse, die in diesem Gebiete vom Verf. und von B. Segre erhalten worden sind. Eine systematische Darstellung dieser Theorie findet sich in einem Buch des Verf. (*Funzioni abeliane modulari*, Bd. I, Roma 1952). Hier erinnern wir nur, daß eine symplektische Matrix eine Matrix  $T$  mit  $2p$  Zeilen und Spalten der Form  $\begin{pmatrix} DB \\ CA \end{pmatrix}$  ist,

wo  $A, B, C, D$  Matrizen der Ordnung  $p$  bedeuten, die den Bedingungen (1):  $DB_{-1} = BD_{-1}$ ,  $CA_{-1} = AC_{-1}$ ,  $DA_{-1} = BC_{-1} = U$  unterworfen sind. Alles das hat zur Folge, daß die Matrizentransformation  $Z' = (ZC + D)^{-1}(ZA + B)$  eine symplektische Transformation ist, d. h. jede symmetrische Matrix  $Z$  in eine ebenfalls symmetrische Matrix  $Z'$  verwandelt. Die Matrizen  $T$  bilden eine Gruppe  $G$ . Die entsprechenden Transformationen ergeben im Raume [mit  $\frac{1}{2}p(p+1)$  Dimensionen] der symmetrischen Matrizen  $Z$  eine endliche kontinuierliche Gruppe von Cremonaschen Verwandtschaften. Die Elemente der Gruppe  $G$  können in einem Raume mit  $4p^2$  Dimensionen auf die Punkte einer gewissen algebraischen Mannigfaltigkeit  $V$  abgebildet werden. Diese wird von den Gleichungen (1) dargestellt und zerfällt für  $p \geq 2$  in zwei Teile.

*E. Togliatti.*

### Vektor- und Tensorrechnung:

● Dubnov, Ja. S.: Grundzüge der Vektorrechnung. Teil II: Lineare Funktionen eines Vektors. Vektoranalysis (Theorie der Felder). Einführung in die Tensorrechnung. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 415 S. R. 10,35 [Russisch].

Teil I, Vektoralgebra, Elemente der Vektoranalysis, Moskau-Leningrad 1950, dies. Zbl. 41, 484. Das vorliegende Buch enthält die Universitätsvorträge des Verf. über die Vektorrechnung. Nach Absicht des Verf. soll das Buch auch für die wissenschaftlich arbeitenden Ingenieure zugänglich sein. Verf. vermeidet die weitläufige mathematische Allgemeinheit, beschränkt sich zum Beispiel auf den dreidimensionalen euklidischen Raum, legt aber Nachdruck auf die logische Präzision der Auslegung. Man kann den zweiten Teil unabhängig von dem ersten lesen, man muß dafür nur die Anfänge der Vektoralgebra kennen. — Das erste Kapitel: „Lineare Funktionen vektorieller Argumente“ hat einen rein algebraischen Charakter, dagegen sind die drei übrigen der Vektoranalyse gewidmet. Das zweite Kapitel enthält die Feldtheorie, in dem dritten gibt der Verf. die Anfänge der Tensorrechnung und das vierte enthält die Funktionen der Gebiete und die klassischen Integralsätze. — Am Ende des Buches findet man einen Umriß der Dualitätsrechnung in der zentroaffinen Geometrie.

*W. Wrona.*

Negri, Domenico: Sopra un determinante studiato dal prof. Ascoli. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 101—104 (1952).

In einer Arbeit von G. Ascoli (dies. Zbl. 34, 89) tritt die Determinante dritter Ordnung  $\Omega = [T_u T_v T] [P_u P_v N]$  auf, in der  $P(u, v)$  den Ortsvektor eines Flächenpunktes  $P$ ,  $N$  seinen Normalenvektor ( $N^2 = 1$ ) und  $T(u, v)$  einen beliebigen Vektor in  $P$  ( $T^2 = 1$ ) bedeutet. Eine einfache Eigenschaft von  $\Omega$ , die Ascoli tensoriell bewiesen hat, wird vektoriell von neuem bewiesen. — Ist  $t$  die Flächenkomponente von  $T$ , so wird am Schlusse gezeigt, daß ihre Flächendivergenz notwendig Null ist, oder daß  $t_u, t_v, N$  komplanar sind.

*K. Strubecker.*

Tashiro, Yoshihiro: Note sur la dérivée de Lie d'un être géométrique. Math. J. Okayama Univ. 1, 125—128 (1952).

Die Identitäten

$$\left( \begin{smallmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L} \\ u & v \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L} \\ v & u \end{smallmatrix} \right) \Phi_A = \begin{smallmatrix} \mathcal{L} & \Phi_A \\ (u, v) \end{smallmatrix}; \quad (u, v) =_{\text{Def}} \begin{smallmatrix} \mathcal{L} & v^k \\ u & \end{smallmatrix}; \quad \begin{smallmatrix} \mathcal{L} \\ v \end{smallmatrix} = \text{Lie-Ableitung nach } v^k$$

wurden für Größen und für  $\Gamma_{\mu\lambda}^k$  bewiesen von Yano (Groups of transformations in generalized spaces, Tokyo 1949) und für lineare mikro-geometrische Objekte von Tashiro (dies. Zbl. 41, 309). Für ein allgemeines geometrisches Objekt  $\Phi_A$  entsteht die Schwierigkeit, daß  $\mathcal{L}\Phi_A$  kein geometrisches Objekt zu sein braucht. Es wird hier aber bewiesen, daß  $\Phi_A$  und  $\mathcal{L}\Phi_A$  zusammen immer ein geometrisches Objekt bilden. Der Beweis ist wohl gleichzeitig von Nijenhuis (Dissertation Am-



sterdam 1952, S. 93) erbracht worden. In dieser Weise bekommt dann doch  $\mathcal{L} \mathcal{L} \Phi_A$  einen Sinn, auch wenn  $\mathcal{L} \Phi_A$  kein geometrisches Objekt ist. Etwas Ähnliches liegt ja auch bei der Formel  $\mathcal{L} \partial_\mu v^k = \partial_\mu \mathcal{L} v^k$  vor, wo das erste Glied nur dann einen Sinn hat, wenn  $\partial_\mu v^k$  als Teil des geometrischen Objekts  $v^k$ ,  $\partial_\mu v^k$  aufgefaßt wird. Es wird bewiesen, daß bei dieser Auffassung die oben erwähnte Identität auch für allgemeine geometrische Objekte gilt. Die Beschränkung auf den Fall, daß  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}$  beide ein und derselben Lieschen Gruppe angehören, ist unnötig.

*J. A. Schouten.*

**Steward, G. C.: On certain configurations of the cardinal points in plane kinematics.** Acta math. 88, 371—383 (1952).

In Fortführung seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 43, 154) leitet Verf. eingangs unter Verwendung komplexer Zahlen zahlreiche Beziehungen her, die zwischen den höheren Polen eines zwangsläufigen analytischen Bewegungsvorganges und denen des zugehörigen Umkehrvorganges bestehen und somit die „Polketten“ und höheren Polkurven kennzeichnen. In der Folge wird das Augenmerk auf jene Eigenschaften und Anordnungen (Konfigurationen) der Pole in der Polkette gerichtet, die im Verlaufe des Bewegungsvorganges erhalten bleiben. Es werden als Beispiele hierfür die folgenden besonderen Bewegungen betrachtet: 1. Rechtwinklige Polketten, bei denen die Pole  $A_1, A_3, \dots, A_{2n+1}, \dots$ , sowie die Pole  $A_2, A_4, \dots, A_{2n}, \dots$  beziehungsweise ständig auf zwei rechtwinkligen Geraden liegen. Bei einem solchen Bewegungsvorgang gibt es in der Gangebene einen Punkt mit geradliniger Bahnkurve. 2. Geradlinige Polketten: Sämtliche Pole liegen jeweils auf einer geraden Linie. Hierdurch sind die Kreisrollungen (niedere Planetenbewegungen) gekennzeichnet. Als Sonderfall hiervon tritt die Ellipsenbewegung (Kreuzschieber) auf, bei der die Pole gerader, wie die ungerader Ordnung in je einen festen Punkt fallen. 3. Spiralförmige Polketten, bei denen die Pole  $A_n$  auf logarithmischen Spiralen liegen. Es liegen dann die Pole  $A'_n$  der Umkehrbewegung auch auf einer solchen Kurve, desgleichen sind die Polbahnen (beschrieben von  $A_1 = A'_1$ ) logarithmische Spiralen. Geradlinige und kreisförmige Polketten sind Sonderfälle. 4. Schließlich werden noch orthogonale Polketten untersucht, bei denen  $A_{n-1} A_n$  ständig senkrecht zu  $A_n A_{n+1}$  ist. Für solche Bewegungen ist eine der beiden Polkurven (Rastpolbahn) eine gerade Linie. — Es sei bemerkt, daß auch R. Bereis (dies. Zbl. 43, 154) diese Fragen streift.

*H. R. Müller.*

**Goormaghtigh, R.: Sur une transformation géométrique.** Mathesis 61, 90—93 (1952).

Verf. betrachtet eine Kurve  $\Gamma_0$  in einer bewegten Ebene, die sich gegenüber einer festen Ebene um einen Punkt  $O$  dreht. Untersucht wird der Ort der Punkte  $\Gamma$  der festen Ebene, in denen die Tangenten an  $\Gamma_0$  im Laufe der Drehung eine feste vorgegebene Richtung haben. Die Tangente an  $\Gamma$  steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden von  $O$  mit dem Krümmungsmittelpunkt der zugehörigen Stelle von  $\Gamma_0$ . — Spezialfälle für  $\Gamma_0$ : Die Sinusspiralen, die Epi- und Hypozykloiden.

*M. Barner.*

## **Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:**

● **Finikov, S. P.: Lehrgang der Differentialgeometrie.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 343 S. R. 8.— [Russisch].

Ein interessantes und zugängliches Universitätslehrbuch der Differentialgeometrie. Verf. bedient sich hauptsächlich der Vektormethode und macht sich bei der Betrachtung der Verschiebung des mit einem Punkte der Kurve oder der Fläche verbundenen Dreibeins in weitem Umfange die kinematische Methode zunutze. — In der Einleitung werden die folgenden elementaren Begriffe eingeführt: einfacher Kurvenbogen, einfaches Flächenstück, Stützgerade, Stützebene und singuläre Punkte der Kurven und Flächen. — In dem ersten Teil gibt Verf. die Kurventheorie und die Theorie der Einhüllenden. Dabei ist die ebene Kurve als ein Sonderfall der Raumkurve betrachtet. — Der zweite Teil ist der klassischen Flächentheorie gewidmet. Am Ende dieses Teiles gibt der Verf. einen kurzen Umriß der Geometrie auf der Pseudosphäre und auf der Lobačevskijschen Ebene. Dann folgen kurze

geschichtliche Betrachtungen. — Im Anhang findet man einige Sätze über implizite Funktionen, Anfänge der Vektoranalysis und einige Beispiele der Darstellung der ebenen Kurven. *W. Wrona.*

**Walker, A. W.:** The differential equation of a conic and its relation to the aberrancy. Amer. math. Monthly **59**, 531—538 (1952).

Mittels der affininvarianten Aussagen, daß die Affinkrümmung für Kegelschnitte konstant, für Parabeln speziell Null ist, werden unter Zugrundelegung der euklidischen Gruppe intrinsische Differentialgleichungen für diese hergeleitet, d. h. Differentialgleichungen für die Krümmung  $\varrho$  bzw.  $\Phi = \varrho^{-2/3}$  und  $\zeta = \Phi^2$  als Funktionen des Tangentenwinkels. *J. Nitsche.*

**Pöschl, Theodor:** Sull'integrazione dell'equazione di Darboux-Riccati nella teoria delle curve a curvatura doppia. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **1**, 88—91 (1952).

Die Bestimmung einer Kurve aus ihren natürlichen Gleichungen läßt sich auf das Lösen einer Riccatischen Gleichung bzw. einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Wie Verf. zeigt, hat die letztere für zylindrische Schraubenlinien konstante Koeffizienten, während sie für konische Schraubenlinien die Gestalt einer Eulerschen Differentialgleichung besitzt. Dadurch ist in beiden Fällen eine explizite Lösung der Differentialgleichungen möglich. *J. Nitsche.*

**Vietoris, L.:** Ein einfacher Beweis des Vierecksatzes der ebenen Kurven. Arch. der Math. **3**, 304—306 (1952).

Verf. gibt einen Beweis unter der Annahme, daß die geschlossene Kurve  $K$  zwei Wendepunkte  $A, B$  besitzt (für mehr als 2 ist der Satz trivial). Der Berührungskreis  $H$  im Sinne Zindlers berührt  $K$  in mindestens zwei Punkten  $P$  und  $Q$ , die auf  $H$  einen Bogen kleiner  $\pi$  einschließen und zwischen denen  $K$  positive Krümmung besitzt. Mittels eines Satzes von Zindler oder eines allgemeineren von W. Süss („Wenn zwei konvexe Bogen  $L$  und  $\bar{L}$  gemeinsame Anfangs- und Endpunkte und in ihnen gemeinsame Tangenten sowie eine Gesamtkrümmung  $\leq \pi$  haben, dann sind die Bogen überhaupt identisch oder es gibt einen Punkt auf  $\bar{L}$ , in dem die Krümmung kleiner ist als in einem geeigneten Punkt von  $L$ “) erschließt man die Existenz eines relativen Minimums der Krümmung zwischen  $PQ$  und somit auch die zweier relativer Maxima. Da die Krümmung außerhalb  $PQ$  ein absolutes Minimum besitzt, ist somit die Existenz von mindestens vier Scheiteln bewiesen. *J. Nitsche.*

**Gallarati, Dionisio:** Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **13**, 238—241 (1952).

Soit  $F$  une surface réelle de l'espace euclidien,  $L$  une courbe de  $F$ ,  $s, c, T$  l'arc, la courbure, la torsion de  $L$ ; supposons  $c > 0$  en tout point de  $L$ ; W. Scherrer a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que  $F$  soit une sphère est que pour toute courbe fermée tracée sur  $F$  on ait  $\oint_L T ds = 0$ ; puis B. Segre

trouve le même résultat en remplaçant par  $\oint_L \frac{T}{c} ds = 0$ . L'A va donner une signi-

fication géométrique très simple pour les deux expressions  $T ds, \frac{T}{c} ds$  de façon à calculer les deux intégrales  $\int_L T ds, \int_L \frac{T}{c} ds$  étendues à une courbe, fermée ou non,

tracée sur une sphère. Il établit deux théorèmes: 1°) Si  $L$  est une courbe tracée sur une sphère  $F$  de centre  $O$  et si  $L^*$  est la courbe lieu du centre de première courbure de  $L$ , la projection de  $L^*$  sur la sphère à partir de  $O$  a même longueur que  $L^*$ ; 2°) La condition nécessaire et suffisante afin qu'une surface  $F$  soit une sphère de rayon  $R$  est que, pour toute courbe  $L$  de  $F$  la longueur de  $L^*$  soit  $RA$ , en désignant

par  $A$  la longueur de l'indicatrice sphérique des binormales de  $L$ . Si  $L$  est une courbe quelconque tracée sur une sphère  $F$ , appelons  $P_0, P_1$  les extrémités de  $L$ ,  $h_0$  et  $h_1$  les distances de  $O$  aux plans osculateurs de  $L$  en  $P_0$  et  $P_1$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  l'angle de la normale de  $F$  en  $P_0$  (ou  $P_1$ ) et de la normale principale de  $L$  en  $P_0$  (ou  $P_1$ ), on a  $\int_L T ds = \alpha_1 - \alpha_0$ ,

$\int_L \frac{T}{c} ds = h_1 - h_0$ . L'arc  $S^*$  de  $L^*$  vérifie la relation  $S^* = R \int_L |T| ds$  et  $\int_L |T| ds$

est la longueur de l'indicatrice sphérique des binormales de  $L$ : le premier théorème en résulte. Si  $S^*$  est l'arc de  $L^*$  et  $r$  le rayon de courbure de  $L$ , on a  $dS^{*2} = (dr/ds)^2 ds^2 + r^2 T^2 ds^2$  et l'hypothèse énoncée par le théorème II entraîne  $dS^{*2} = R^2 T^2 ds^2$ , ce qui entraîne  $(dr/ds)^2 = (R^2 - r^2) T^2$ ,  $T ds = d(\arcsin r/R)$ ; de la sorte, pour toute courbe fermée  $L$  tracée sur  $F$ , on a  $\oint_L T ds = 0$ , de sorte

que d'après Scherrer,  $F$  est une sphère, et par suite,  $F$  est une sphère de rayon  $R$ .

B. Gambier.

**Kruppa, Erwin:** Zum Dualitätsprinzip in der Differentialgeometrie dritter Ordnung. Arch. der Math. 3, 401—408 (1951).

Im Punkt  $P$  einer  $F_2$  wähle man die  $(x, y)$ -Ebene in der Tangentialebene und  $z$  in der Flächennormalen. Der Taylor-Entwicklung  $z = z(x, y)$  in  $P$  entspricht eine Taylor-Entwicklung  $w = w(u, v)$  der Tangentialebenen  $z = u x + v y + w$ . Neben der kubischen Indikatrix  $i^3$  (definiert durch das Nullsetzen der Glieder bis zur 3. Ordnung) betrachtet Verf. den Indikatrixkegel  $\kappa_3$  dritter Klasse. Durch eine geometrische Konstruktion wird der Ebene mit den Koordinaten  $(u, v, w)$  der Punkt  $(-u, -v, 0)$  als „Punktbild“ in der Tangentialebene zugeordnet. Das Punktbild von  $\kappa_3$  definiert dann die „duale kubische Indikatrix“  $i_d^3$ . Einer von R. Groiss stammenden invarianten (geometrischen) Kennzeichnung von  $i^3$  wird eine solche von  $i_d^3$  gegenübergestellt: Zur Tangente  $t$  an  $F_2$  in  $P$  ist der  $t$  enthaltende Schmiegzylinder bestimmt und dessen Affinnormalebene durch  $t$ . Diese Ebenen definieren für die verschiedenen  $t$  den Affinebenenkegel  $\kappa_3^*$  von  $F_2$  in  $P$ . Das Punktbild von  $\kappa_3^*$  ist dann zentrisch-symmetrisch bezüglich  $P$  zu  $i_d^3$ . Es folgen Sätze über die  $i_d^3$  bei Quadriken und bei sich in  $P$  von zweiter Ordnung berührenden Flächenpaaren. Ist eine dieser  $F_2$  eine Quadrik, so gelangt man zu einer Kennzeichnung der Darboux'schen und Segres'schen Tangenten in  $P$ . Den Schluß bildet eine neue invariante (geometrische) Interpretation der Affinnormalen: „Wird die Wendelinie von  $i_d^3$  einer nichtabwickelbaren  $F_2$  auf die Ebene  $z = -1$  projiziert und die dadurch erhaltene Gerade mit  $P$  durch eine Ebene verbunden, so ist die Normale in  $P$  auf diese Ebene die Affinnormale in  $P$ “.

W. Klingenberg.

**Wong, Yung-chow:** A new curvature theory for surfaces in a Euclidean 4-space. Commentarii math. Helvet. 26, 152—170 (1952).

At a point  $A$  of a surface  $V_2$  in a euclidean  $R_4$ , with tangent plane  $\xi$ , there are, for a given tangent direction  $AA^*$ , two mutually orthogonal directions in which the angle  $d\psi$  between  $\xi$  and the tangent plane  $\xi^*$  at  $A^*$  is stationary. These directions are called the angle directions, the two corresponding values  $dp_1/ds, dp_2/ds$  the first curvatures of the  $V_2$ . When  $\xi$  and  $\xi^*$  are isoclinic, the angle directions are indeterminate, and we speak of an  $R$ -direction; two  $R$ -directions may be of the same or of different types, depending on the type of isoclinity. There exists an  $R$ -direction if and only if the area of the curvature ellipse is  $\pi/2$  times the absolute value of the Gaussian curvature. If there exist two  $R$ -directions of the same type, all directions are  $R$ -directions; if there exist two  $R$ -directions of different type the curvature ellipse is a line segment subtending a right angle at  $A$ . Characteristic properties of minimal point and axial point are found. The paper leads up to the theorem that a given non-minimal surface in  $R_4$  is completely determined, but for a displacement with or without reflection about a threeplane, by its linear element and its two first curvatures. To the literature might be added W. Blaschke, this Zbl. 36, 114, which paper has a starting point somewhat similar to that of the author.

Struik.

**Terracini, Alessandro:** Il caso singolare nella determinazione di una superficie di  $S_5$  a partire dalle sue linee principali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 359—373 (1952).

Blaschke a posé le problème: trouver les surfaces de l'espace à cinq dimensions admettant un système donné de lignes de courbure, défini par l'équation  $H du^5 + L du^4 dv + M du^3 dv^2 + N du^2 dv^3 + P du dv^4 + K dv^5 = 0$ . Si l'on a  $K(2P^2 - 5KN) \neq 0$ , les lignes de courbure sont toutes distinctes et l'A. a résolu le problème (Sobre la existencia de superficies cuyas lineas principales son dadas



Union mat. argentina, Publ. n. 16, Buenos Aires 1940). L'A résoud cette fois le problème quand les lignes de courbure ne sont pas toutes distinctes. Si  $K = 0$ , les lignes de courbure sont indéterminées et l'on retrouve la surface de Véronèse. Si  $2P^2 - 5KN = 0$ , les lignes de courbure forment un système quintuple et l'on retrouve d'abord les surfaces bien connues à lignes de courbure planes; on trouve ensuite les surfaces déterminées par le système  $(h, k, l)$  constantes arbitraires)

$$I \begin{cases} x_{uuu} = -2(3hu + 2l)x + 6(hv + k)x_u + 3x_{uv} \\ x_{uuv} = 2[2h + 1 - 4(hv + k)^2]x + (3hu + 2l)x_u + 2(hv + k)(x_v + x_{uu}) + x_{vv} \\ x_{uvv} = -2(hv + k)(3hu + 2l)x + [\frac{1}{2}h + 1 + 2(hv + k)^2]x_u \\ \quad + (3hu + 2l)(x_v + \frac{1}{2}x_{uu}) + (hv + k)x_{uv} \\ x_{vvv} = [2(3h - 1)(hv + k) - (3hu + 2l)^2 + 8(hv + k)^3]x \\ \quad + [-3h - 2 + 6(hv + k)^2]x_v + x_{uu} + (\frac{9}{2}hu + 3l)x_{uv} - 3(hv + k)x_{vv}. \end{cases}$$

Si  $h \neq 0$ , on obtient des surfaces du premier type; pour  $h = 0$ , on a des surfaces du second type dont il est possible de donner explicitement les coordonnées  $x_i = e^{\alpha_i u + \beta_i v}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) où les constantes  $\alpha_i$  sont les racines supposées distinctes de l'équation  $\alpha^6 - 15k\alpha^4 - 7l\alpha^3 + 9(4k^2 - 1)\alpha^2 + 12lk\alpha - 8l = 0$  avec  $\beta_i = (\alpha_i^3 - 6k\alpha_i + 4l)/3\alpha_i$  mais le cas  $l = 0$ , que la suite rend particulièrement intéressant, fournit (avec  $9k^2 - 2 \neq 0$ ,  $9k^2 + 4 \neq 0$ ,  $4k^2 - 1 \neq 0$ ) la surface  $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = e^{\beta'v} : e^{\beta''v} : e^{\alpha_1 u + \beta_1 v} : e^{-\alpha_1 u + \beta_1 v} : e^{\alpha_2 u + \beta_2 v} : e^{-\alpha_2 u + \beta_2 v}$  où  $\beta', \beta''$  sont racines de  $\beta^2 + 2k\beta + 2(1 - 4k^2) = 0$ , et  $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2$  de  $\alpha^4 - 15k\alpha^2 + 9(4k^2 - 1) = 0$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  étant liés à  $\alpha_1, \alpha_2$  par  $\beta = -2k + \alpha^2/3$ . Pour les surfaces du premier type ou du second, les plans tangents infiniment voisins le long d'une ligne principale ont un ordre de voisinage supérieur à celui que donnent les surfaces générales: pour une surface du premier type l'ordre d'approximation est huit pour toutes les lignes principales, exception faite pour une unique ligne principale donnant l'ordre dix. Pour une surface du second type, l'ordre est huit si  $kl \neq 0$ , dix si  $k = 0, l \neq 0$ . Pour une surface du second type, avec  $h = l = 0$ , l'ordre est infini; on suppose  $h = l \neq 0, gk^2 - 2 \neq 0, gk^2 + 4 \neq 0, 4k^2 - 1 \neq 0$  de sorte que les plans tangents aux points d'une ligne principale appartiennent à une quadrique non spéciale, comme plans d'un même système, et par conséquent ont deux à deux un point commun.

B. Gambier.

Jonas, Hans: Anwendung der Bäcklund-Transformation auf die Flächen, die mit den pseudosphärischen gemeinsame Gaußsche Bilder der Krümmungslinien haben. Math. Nachr. 6, 327—342 (1952).

Verf. betrachtet Normalenkongruenzen, die zugleich zyklisch sind. In diesem Fall müssen für die zugehörigen Normalenflächen der Kongruenz die sphärischen Bilder der Krümmungslinien mit dem einer pseudosphärischen Fläche übereinstimmen. Es wird in der Arbeit die Einwirkung der Transformationen (spezielle Ribaucour-Transformationen), die ursprünglich Transformationen der Bildkugeln pseudosphärischer Flächen sind, auf diese Flächenklasse untersucht. Diese  $R$ -Transformationen sind zwei zusammengesetzten Bäcklund-Transformationen  $B_\sigma, B_{-\sigma}$  gleichwertig. Die Eigenschaft der  $R$ -Transformationen, die sphärischen Bilder von Krümmungsliniennetzen in ebensolche überzuführen, gilt nicht für die einzelne Transformation  $B_\sigma$ . Statt dessen besteht folgender Zusammenhang: Die  $B$ -Transformierte einer Fläche  $(x)$  (der betrachteten Klasse) besitzt das gleiche sphärische Bild der Krümmungslinien wie die Hüllfläche  $(x_1)$  der durch die Punkte  $x$  gelegten Ebenen, die parallel den Tangentenebenen der transformierten Fläche sind. Die Umkehrung, nämlich in der Tangentenebene der Fläche  $(x)$  einen Punkt  $\tilde{x}_1$  so zu bestimmen, daß die Fläche  $(\tilde{x}_1)$  die vorgeschriebene Bildkugel  $(X_1)$  der erwähnten Hüllfläche  $(x_1)$  bzw.  $B$ -Transformierten von  $(x)$  besitzt, ist weit komplizierter. Es ergibt sich in folgender Weise eine Konstruktion von  $\tilde{x}_1$ : Die aus zwei  $B$ -Transformationen  $B_\sigma, B_{-\sigma}$  zusammengesetzte  $R$ -Transformation liefert eine Fläche  $(x_0)$ . Da der Punkt  $\tilde{x}_1$  auf dem Schnitt der Tangentenebenen von  $(x)$  und  $(x_0)$  liegt, braucht man nur eine zweite  $R$ -transformierte Fläche  $(x_0')$  zu bestimmen;  $\tilde{x}_1$  ist dann der gemeinsame Punkt der drei Tangentenebenen von  $(x)$ ,  $(x_0)$  und  $(x_0')$ . — Die auftretenden  $R$ -Transformationen, die sich aus zwei  $B$ -Transformationen  $B_\sigma, B_{-\sigma}$  bei konstantem  $\sigma$  zusammensetzen, bilden dabei ein Büschel.

J. Nitsche.

**Minagawa, T. and T. Rado:** On the infinitesimal rigidity of surfaces. Osaka math. J. 4, 241—285 (1952).

Eine neue Methode zur Behandlung der infinitesimalen Verbiegungen  $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}$ , sowie teils neue, teils bekannte Starrheitssätze für Flächen positiver, negativer und verschwindender Krümmung ohne Ränder, mit ganz oder teilweise festgehaltenen Rändern und ganz freien Rändern spezieller Art, alle Sätze bei geringeren Forderungen der Differenzierbarkeit als bisher üblich, nur zweimaliger für  $\mathfrak{x}$ , einmaliger für  $\mathfrak{z}$ ; nur in einem Fall wird für Teile von  $\mathfrak{x}$  noch dreimalige Differenzierbarkeit gebraucht. — Für  $a = \mathfrak{z}\mathfrak{x}_u$ ,  $b = \mathfrak{z}\mathfrak{x}_v$ ,  $c = \mathfrak{z}\xi$  ( $\xi$  = Normalenvektor von  $\mathfrak{x}$ ) folgt aus  $d\mathfrak{x} d\mathfrak{z} = 0$  in Verbindung mit den Grundgleichungen der Flächentheorie das System  $a_u = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} b + Lc$ ,  $b_v = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} b + Nc$ ,  $a_v + b_u = 2 \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} a + 2 \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} b + 2Mc$ . — Bei positiver Krümmung wird, angeregt durch eine Arbeit von Stoker, die Verbiegbarkeit der Eiflächen mit der Verbiegbarkeit der über der (1,2)-Ebene einwertigen unendlichen Flächen vermöge  $x' = x/z$ ,  $y' = y/z$ ,  $z' = 1/z$  in Verbindung gebracht im Anschluß an Formeln von Darboux. Man kann sich daher auf Flächen  $z = z(x, y)$  beschränken. Wenn mit  $Z$  die 3. Komponente von  $\mathfrak{z}$  bezeichnet wird, so ergibt sich  $a_v, b_v - a_u, b_u = (r^2 t - s^2) Z^2 + \frac{1}{2}(a_y - b_x)^2$  und durch Integration über einen vorgegebenen Bereich ein Analogon der Integralformel von Blaschke in der Dreihüßtheorie, die von den Verff. als  $\eta$ -technique bezeichnet wird. Alles kommt daher auf das Studium von Kurvenintegralen  $\oint adb$  hinaus, entweder auf Abschätzungen für Folgen von Kurven, die gegen Unendlich gehen, oder auf Vorzeichenbestimmungen bei freien ebenen Rändern mit gleicher Tangentialebene in allen Punkten eines Randes analog zur Methode von Rembs, der die  $\eta$ -technique benutzte. — Die Frage, ob konvexe Flächen über der  $x, y$ -Ebene, in die Löcher hineingeschnitten sind, starr sein können, wenn nur ein Teil eines Randbogens festgehalten wird, beantworten die Verff. nur für die zur Kugel projektiven Flächen, und zwar hier positiv. Vermöge obiger Gleichungen reduziert sich die Aufgabe beim Rotationsparaboloid auf eine elementare funktionentheoretische Fragestellung. — Bei Flächen negativer Krümmung wird gefordert, daß sie sich im Großen auf die Asymptotenlinien als Parameterkurven beziehen lassen. Dann vereinfachen sich die beiden ersten Gleichungen wegen  $L = N = 0$  zu  $a_u = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} b$ ,  $b_v = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} b$ . Für solche Systeme werden nun für den Fall, daß  $a, b$  längs zweier Seiten eines achsenparallelen Rechtecks der Parameterebene oder längs eines Diagonalbogens verschwinden, Sätze entwickelt über das Verschwinden von  $a, b$  im ganzen Rechteck bzw. in dem einen Rechtecksteil. Darauf stützen sich dann die Starrheitssätze bei festgehaltenen Rändern oder Rändern, von denen nur ein Teilbogen festgehalten wird. — Handelt es sich um abwickelbare Flächen, die längs eines die Erzeugenden einfach überquerenden Bogens festgehalten werden, so ergibt sich ein Starrheitssatz besonders elementar wegen der sehr einfachen Form, welche die 3 Gleichungen für  $a, b, c$  hier annehmen. — Im Falle des Torus folgt die Starrheit des positiv gekrümmten Teils aus den allgemeinen Sätzen; die des negativ gekrümmten, dessen Ränder nun als fest angesehen werden können, macht aber etwas komplizierte Sonderuntersuchungen für einen an einen Rand (benötigt wird für den Beweis nur, daß einer der Ränder fest ist) anschließenden schmalen Flächenstreifen erforderlich, da das Netz der Asymptotenlinien nicht bis zu den Rändern regulär ist. Flächen negativer Krümmung mit ganz freien Rändern, wie in Arbeiten des Ref. behandelt, kommen hier nicht vor. — Man wird sich zum Schluß die Frage vorlegen, ob die  $\eta$ -technique einmal ganz als überholt angesehen werden wird. Vorläufig ist es noch nicht ganz so weit. Leider erfährt der Leser nicht, wem die Einzelfortschritte dieser wichtigen Arbeiten zu danken sind. — Nachträglich habe ich bemerkt, daß das Differentialgleichungssystem der Arbeit doch schon früher benutzt wurde: H. Jonas, J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 29, 40—74 (1920). Es wird dort für Asymptotenparameter noch weiter vereinfacht. E. Rembs.

**Hopf, H. und K. Voss:** Ein Satz aus der Flächentheorie im Großen. Arch. der Math. 3, 187—192 (1952).

Es wird gezeigt, daß die durch ein Bündel paralleler Geraden vermittelte Abbildung  $p \rightarrow \bar{p}$  zwischen zwei, von Zylinderstücken der Erzeugendenrichtung  $p\bar{p}$  freien, orientierten und geschlossenen Flächen  $F$  und  $\bar{F}$  eine Translation ist, wenn in entsprechenden Punkten die mittleren Krümmungen und die Orientierungen übereinstimmen. Der Beweis gründet sich auf die aus dem Satz von Stokes abgeleitete Integralformel  $\int (\bar{n} - n, w, d\mathfrak{x}) = 2 \iint (\bar{H} - H) w \bar{n} dA + \iint (1 - \bar{n} n) (d\bar{A} + dA)$ , in der  $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}$  die Ortsvektoren,  $n, \bar{n}$  die Normalenvektoren,  $H, \bar{H}$  die mittleren Krümmungen,  $dA, d\bar{A}$  die Flächenelemente und  $w$  die Abbildungsvektoren  $p \rightarrow \bar{p}$  bedeuten. Die Integrale sind darin über ein Flächenstück von  $F$  bzw. über den Rand desselben zu erstrecken. Aus dem Verschwinden des Randintegrals und der Forderung  $H = \bar{H}$  folgt sodann, daß  $w$  ein konstanter Vektor ist. An Stelle der Geschlossenheit kann daher für berandete Flächenstücke etwa die Übereinstimmung der sphärischen Bilder der Ränder gefordert werden. — Ist  $F$  eine geschlossene und hinsichtlich eines Bündels paralleler Geraden konvexe

Fläche, dann wird diese durch die Bündelstrahlen involutorisch auf sich selbst abgebildet. Besitzt  $F$  überdies in entsprechenden Punkten gleiche mittlere Krümmung, dann sind für  $F$  und die daraus durch Spiegelung an einer Normalebene des Bündels gewonnene Fläche  $\bar{F}$  die Voraussetzungen des eingangs erwähnten Satzes gegeben. Da sodann  $\bar{F}$  aus  $F$  durch eine Translation hervorgeht, muß  $F$  eine Normalebene des Bündels als Symmetrieebene besitzen. Dieses Ergebnis läßt sich auch unmittelbar durch Heranziehung der kontinuierlichen Steinerschen Symmetrisierung gewinnen, was als Vermutung von G. Polya ausgesprochen wurde. *R. Inzinger.*

**Heinz, Erhard:** Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1952, 51—56 (1952).

Sei  $z(x, y)$  eine im Kreise  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$  zweimal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung der Minimalflächen und  $p_0, q_0; r_0, s_0, t_0$  die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für  $x = x_0, y = y_0$ , dann leitet Verf. eine bemerkenswerte neue Abschätzung der zweiten Ableitungen durch die ersten her. Es gilt (1):

$$r_0^2 + s_0^2 \leq \frac{2\pi^2}{3R_0^2} (2 + p_0^2 + q_0^2) (1 + p_0^2)^2, \quad s_0^2 + t_0^2 \leq \frac{2\pi^2}{3R_0^2} (2 + p_0^2 + q_0^2) (1 + q_0^2)^2.$$

Der Beweis läuft über einen Hilfssatz, nach dem bei harmonischen, topologischen, die Mittelpunkte ineinander überführenden Abbildungen zweier Einheitskreise sich die ersten Ableitungen der Abbildungsfunktionen im Mittelpunkt nach unten abschätzen lassen. (1) enthält einen neuen Beweis eines klassischen Satzes von S. Bernstein, nach dem es außer den linearen Funktionen keine überall regulären Lösungen der Minimalflächengleichung gibt. *H. Beckert.*

**Krishna, Shri:** On the congruence of Ribaucour. Ganita 3, 59—70 (1952).

Entsprechen sich zwei Flächen (Leitfläche und Bezugsfläche) mit orthogonalen Linienelementen und zieht man durch die Punkte der einen Fläche Parallelen zu den Normalen der anderen Fläche, so erhält man eine Ribaucoursche Kongruenz (Benennung nach L. Bianchi). Verf. gibt unter Heranziehung der Weingartenschen Verschiebungsfunktion (= Bianchis „charakteristischer Funktion einer infinitesimalen Verbiegung“) eine Reihe von Tensorformeln für diese Kongruenzen (Beziehungen der Fundamentalensoren der Leit- und Bezugsfläche und der quadratischen Formen von Sannia und Kummer), beleuchtet kurz den Fall parallel bezogener Flächen und studiert im Falle Ribaucourscher Normalenkongruenzen das Entsprechen besonderer Kurven auf Leit- und Bezugsfläche, wobei sich manche bekannten Ergebnisse einstellen. *K. Strubecker.*

**Mishra, R. S.:** Five families of ruled surfaces through a line of a rectilinear congruence. III. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 55—62 (1952).

Sind  $\theta = \mu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  und  $\Phi = \xi_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  die Differentialformen von Kummer bzw. von Sannia in der metrischen Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen, dann wird die geometrische Bedeutung der Überschiebungen  $(\theta, \Phi)^{(1)}$  und  $(\theta, (\theta, \Phi)^{(1)})^{(1)}$  untersucht. *R. W. Weitzenböck.*

**Dubnov, Ja. S.:** Diagonaleigenschaften von Netzen. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 7—48 (1952) [Russisch].

Der erste Teil der Arbeit bezieht sich auf die sogenannte topologische Differentialgeometrie der Kurven auf einer Fläche. Der Verf. betrachtet auf einer Fläche ein Netz ( $2 \cdot \infty^1$  Kurven) und eine einparametrische Familie von Kurven oder ein skalares Feld und gibt einige Beziehungen an, welche dann bestehen können. Es ist zu diesem Zweck nicht notwendig, auf der Fläche eine Metrik und einen affinen Zusammenhang vorauszusetzen. — Der zweite Teil ist den Anwendungen, hauptsächlich auf die metrische Flächentheorie, gewidmet. *W. Wrona.*



## Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Kruppa, E.:** Über die Affinnormalebenen der durch eine Kurve gelegten Zylinderflächen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1952, 207—210 (1952).

Die Affinnormalebene einer Zylinderfläche längs einer Erzeugenden  $e$  ist die Durchmesserebene des längs  $e$  berührenden parabolischen Zylinders. Wird die Zylinderfläche von den längs einer Raumkurve  $c$  abgetragenen Erzeugenden  $e$  bestimmt, so spricht Verf. von der Affinnormalebene in der Monosekante  $e$ . Die Affinnormalebenen in einem Kurvenpunkt  $P$ , deren Monosekanten ein Büschel durch  $P$  mit  $c$  berührender Ebene bilden, gehören ebenfalls einem Büschel an. Die Achse liegt in der Schmiegeebene von  $c$  in  $P$ . Die Zuordnung der zwei Büschel ist eine affinvariant mit der Kurve verbundene Projektivität. Dabei entsprechen der Tangente an  $c$  die Schmiegeebene und der Affinnormalen des Normalrisses von  $c$  auf die Schmiegeebene in  $P$  die rektifizierende Ebene. J. Nitsche.

**Süss, W.:** Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grottemeyer. Arch. der Math. 3, 311—313 (1952).

Verf. zeigt, daß die von K.-P. Grottemeyer (dies. Zbl. 47, 406—407) angegebenen Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären des dreidimensionalen Raumes eine zusammenfassende Formulierung gestatten, die sodann auch hinsichtlich der Dimension verallgemeinert werden kann. Ist im  $R_{n+1}$  eine Eihyperfläche  $e(u^1, \dots, u^n)$  als Eichfläche gegeben und ist  $\chi(u^1, \dots, u^n)$  eine weitere Eihyperfläche, für die  $E$  den Relativabstand vom Ursprung,  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die Relativkrümmungsradien und  $p_0 = 1$ ;  $p_k = r_1 r_2 \cdots r_k + \cdots$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) die normierten elementarsymmetrischen Funktionen derselben bedeuten, dann folgt aus dem Bestehen einer der beiden Gleichungen (1)  $E^k = p_k$ ,  $E^k p_l = p_{k+l}$ , daß die Eihyperflächen homothetisch sind. Ist die Eichfläche  $e$  insbesondere das Affinkrümmungsbild von  $\chi$  oder die Einheitskugel, dann folgen daraus die Kennzeichnung des mehrdimensionalen Ellipsoids als einzige affinsphärische Eihyperfläche und die der mehrdimensionalen Kugel. Für  $n = 2$  bedeuten  $k = 1/r_1 r_2$  das relative Krümmungsmaß und  $h = 1/r_1 + 1/r_2$  die relative mittlere Krümmung. Aus den Gleichungen  $k E^2 = 1$  und  $h E = 1$  ergeben sich dann die Sätze des Herrn Grottemeyer, wenn man  $e$  als Affinkrümmungsbild von  $\chi$  oder als Einheitskugel betrachtet. Der Beweis der allgemeinen Behauptung stützt sich auf die zweifache Darstellung der sogenannten gemischten Volumina  $V_i$

$$\int p_{i+1} d\omega = \int E p_i d\omega, \quad d\omega = (e_1 e_2 \cdots e_n e) du^1 \cdots du^n,$$

aus der wegen (1) in beiden Fällen auf die Gleichheit der  $r_i$  geschlossen werden kann.

R. Inzinger.

**Izmaïlov, V. D.:** Über die invariante Geometrie der Flächen des sechsdimensionalen affinen Raumes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 477—480 (1952) [Russisch].

Es handelt sich um die  $X_2$  in  $E_6$ , die nicht in einer  $E_5$  liegen. Zunächst wird der äquiaffine Fall betrachtet und es werden die Methoden von Burstin und Mayer ( $X_2$  in  $E_4$ , Math. Z. 26, 373—404 (1927)) benutzt. Dreimalige Differentiation des Radiusvektors führt analog zu  $X_2$  in  $E_3$  zu den symmetrischen Tensoren  $\gamma_{ik}$  und  $\beta_{ikl}$  der  $X_2$ . Wird  $\gamma_{ik}$  als Fundamentaltensor benutzt, so wird bewiesen, daß die zugehörige Krümmungsgröße nicht verschwindet. Es wird  $\beta_{ikl}$  geometrisch interpretiert. Die Frenetschen Formeln des  $X_2$  werden aufgestellt und es wird bewiesen, daß die in diesen Formeln auftretenden Größen, falls gewisse Relationen erfüllt sind, eine  $X_2$  in  $E_6$  bis auf äquiaffine Transformationen festlegen, bei der gerade diese Größen in den Frenetschen Formeln auftreten. Die Sätze lassen sich auch für den affinen Fall formulieren. Natürlich ist die innere Geometrie der  $X_2$  invariant bei der affinen Gruppe in  $E_6$ . Die Theorie läßt sich für  $X_k$  in  $E_n$  verallgemeinern.

J. A. Schouten.

Cossu, Aldo: **Sulle trasformazioni puntuali tra spazi a rette caratteristiche coincidenti.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 118—122 (1952).

L'A. considera una trasformazione puntuale  $T$  fra due spazi lineari  $S_3, \bar{S}_3$ , in una coppia regolare  $O, \bar{O}$  di punti corrispondenti ed esamina il caso in cui le 7 rette caratteristiche nella stella di centro  $O$  sono tutte coincidenti. Mediante considerazione di opportuni riferimenti intrinseci l'A. riduce le equazioni di  $T$  alla forma:  

$$\bar{x}_1 = x_1 + x_2^2 + [3], \quad \bar{x}_2 = x_2 + x_1^2 - x_2 x_3 + [3], \quad \bar{x}_3 = x_3 + x_1 x_2 + [3]$$
 stabilendo così che per l'intorno del 2° ordine non vi sono invarianti. Determina poi le trasformazioni cubiche osculatrici seguendo il metodo già usato da Villa (questo Zbl. 30, 216).  
 P. Buzano.

Grove, V. G.: **The quadric of Lie.** Proc. Amer. math. Soc. 3, 573—579 (1952).

Le coordinate proiettive omogenee di un generico punto  $x$  di una superficie  $S$  si suppongono espresse in funzione di parametri asintotici  $u, v$  e normalizzate secondo Grove [Bull. Amer. Math. Soc. 36, 852 (1930)]. Nel piano tangente ad  $S$  in  $x$  si consideri una retta  $l_2$  e siano  $r, s$  i punti in cui essa si appoggia rispettivamente alle tangenti alle asintotiche  $v = \text{cost.}$  e  $u = \text{cost.}$  Sia  $l_1$  la retta che passa per  $x$  e si appoggia alle  $(r, r_v)$  e  $(s, s_u)$  e siano  $z_1$  e  $z_2$  i punti di appoggio: le rette  $l_1, l_2$  sono reciproche e generano due congruenze. Su  $l_1$  si considerino il punto  $h$  coniugato armonico di  $x$  rispetto a  $z_1$  e  $z_2$  e il punto  $I_1$  coniugato armonico di  $x$  rispetto ai due fuochi. Sia infine  $g$  il coniugato armonico di  $x$  rispetto a  $h$  e  $I_1$ : il luogo di  $g$  al variare di  $l_2$  entro il piano tangente è la quadrica di Lie e le rette  $(g r)$  e  $(g s)$  ne sono le generatrici. Analoghe generazioni vengono indicate dall'A. per altre quadriche notevoli associate alla superficie  $S$  nel punto  $x$ .  
 P. Buzano.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Patterson, E. M. and A. G. Walker: **Riemann extensions.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 19—28 (1952).

In einer  $V_{2n}$ , die ein paralleles Feld von Null- $E_n$  enthält, das durch einen rekurrenten symmetrischen Tensor der Valenz zwei festgelegt ist, gibt es stets ein Koordinatensystem  $x^h; \xi_i, h, i = 1, \dots, n$ , so daß die Metrik gegeben ist durch

$$\begin{aligned} (1) \quad ds^2 &= g_{ij}(x, \xi) dx^i dx^j + 2 dx^i d\xi_i \\ (13) \quad g_{ij} &=_{\text{Def}} \theta (\xi_i \xi_j - \frac{1}{2} h_{ij} h^{pq} \xi_p \xi_q) - 2 L_{ij}^p \xi_p + c_{ij} \\ L_{ij}^p &=_{\text{Def}} H_{ij}^p - \frac{1}{2} (A_i^p \Phi_j + A_j^p \Phi_i - h_{ij} h^{pq} \Phi_q) \end{aligned}$$

(Druckfehler in (13) berichtigt), wo  $\theta, \Phi_i, c_{ij}$  und  $h_{ij}$  nur von den  $x^h$  abhängen,  $\text{Det}(h_{ij}) \neq 0$  ist und  $H_{ij}^p$  das Christoffel-Symbol in bezug auf  $h_{ij}$  darstellt. Ist die skalare Krümmung  $R \neq 0$ , so legt die  $V_n$  eindeutig eine  $W_n$  fest mit Fundamentaltensor  $h_{ij}$  und Vektor  $\Phi_i$ . Diese  $W_n$  ist eine  $V_n$  (d. h. es ist  $\Phi_i$  ein Gradientenvektor), wenn der rekurrente Tensor kovariant konstant ist. Die letzten beiden Abschnitte befassen sich mit den „Riemann extensions“ einer  $C_n$  und einer  $A_n$ .  
 J. A. Schouten.

Patterson, E. M.: **Some theorems on Ricci-recurrent spaces.** J. London math. Soc. 27, 287—295 (1952).

Eine  $V_n$ , deren Ricci-Tensor  $R_{\mu\lambda} \neq 0$  ist und einer Gleichung  $\nabla_\nu R_{\mu\lambda} = \kappa_\nu R_{\mu\lambda}; \kappa_\nu \neq 0$  genügt, heiße Ricci-rekurrent. Eine solche  $V_n$  kann kein Einstein-Raum sein und enthält infolgedessen ein paralleles  $E_m$ -Feld ( $m < n$ ). Es wird gezeigt, daß eine  $V_n$  dieser Art stets Produkt eines speziellen Einstein-Raumes mit einem Riemannschen Raum derselben Art oder mit einer allgemeinen  $V_2$  ist. Das parallele  $E_m$ -Feld ist stets ein Nullfeld, das durch einen symmetrischen rekurrenten Tensor der Valenz zwei festgelegt wird. Patterson und Walker (s. vorsteh. Referat) zeigten, daß es dann für  $n = 2p$  ein Koordinatensystem  $x^h, \xi_i; h, i = 1, \dots, p$  gibt, so daß  $ds^2 = (-2\Gamma_{ij}^h \xi_h + c_{ij}) dx^i dx^j + 2 dx^i d\xi_i$ , wo  $\Gamma_{ij}^h$  und  $c_{ij}$  nur von den  $x^h$  abhängen. Die  $V_{2p}$  wurde die „Riemannextension“ (R. e.) der  $A_p$  mit den über-

tragungsparametern  $I_{ij}^n$  genannt. Hier wird bewiesen, daß eine lokal nichtreduzierbare  $V_{2p}(p > 2)$  dieser Art, in welcher  $R_{\mu\lambda}$  den Rang  $p$  hat, immer die R.e. einer  $W_p$  ist, in welcher der Riccitenor als Fundamentaltensor gewählt werden kann. Umgekehrt ist jede R.e. einer solchen  $W_p$  eine  $V_{2p}$  der betrachteten Art. Es werden Beispiele gegeben und noch einige Resultate für den Fall  $\kappa_\nu = 0$  unter der Voraussetzung, daß  $R_{\mu\lambda}$  kein Vielfaches von  $g_{\mu\lambda}$  ist, angeführt.

J. A. Schouten.

**Rham, Georges de:** Sur la réductibilité d'un espace de Riemann. Commentarii math. Helvet. 26, 328—344 (1952).

On dit qu'un espace de Riemann  $E$  connexe est réductible si le groupe d'holonomie homogène  $\psi(x)$  relatif à un point  $x \in E$  est; soient alors  $T_x = T' + T''$  une décomposition de l'espace  $T_x$  tangent en  $x$  en sous-espaces non nuls invariants par  $\psi(x)$ ; par transport parallèle on en déduit deux champs d'éléments plans qui s'avèrent être complètement intégrables; désignons par  $E(x)$ ,  $F(x)$  les variétés intégrables de ces deux systèmes passant par  $x$ , supposées munies de la métrique riemannienne induite par celle de  $E$ . Il est bien connu que  $x$  possède un voisinage  $V$  isométrique à un voisinage  $W$  de  $(x, x)$  dans le produit riemannien  $E(x) \times F(x)$ . L'A. établit ici l'existence d'une isométrie globale entre  $E(x) \times F(x)$  et  $E$  lorsque  $E$  est simplement connexe et complet. Le point essentiel est de faire voir que, si  $E$  est complet, l'isométrie de  $W$  sur  $V$  se prolonge (en un sens facile à préciser), le long de tout arc issu de  $(x, x)$ ; dans le cas analytique, cela résulte d'une proposition due (pour les surfaces) à W. Rinow (ce Zbl. 4, 367), dont l'A. donne une autre démonstration en appendice; pour un espace de classe  $C^2$ , l'existence de ce prolongement s'établit en plusieurs étapes: Grosso modo, on projette tout d'abord un voisinage de  $y$  dans  $F(y)$  le long d'un arc de  $E(y)$ , ( $y \in E$ ) (lemme 1), puis un voisinage dans  $F(y)$  d'un arc de  $F(y)$  sur une feuille  $F(z)$  voisine (lemme 3), et enfin on combine ces opérations (lemmes 4, 5). L'appendice comprend également une démonstration du théorème de Hopf-Rinow sur la caractérisation des espaces riemanniens complets (ce Zbl. 2, 350).

A. Borel.

● **Hodge, W. V. D.:** The theory and applications of harmonic integrals. 2. ed.

London: Cambridge University Press 1952. X, 282 p. 27 s. 6 d.

**Tomonaga, Yasurô:** Betti numbers and exact differential forms. J. math. Soc. Japan 4, 269—278 (1952).

Folgender Satz kann zur Abschätzung der Bettischen Zahlen einer geschlossenen Mannigfaltigkeit nach unten dienen.  $\varphi^r$  seien geschlossene alternierende Differentialformen vom Grad  $r$  auf einer Mannigfaltigkeit von der Dimension  $n$ . Dann ist die  $r$ -te Bettische Zahl  $b_r$  mindestens gleich dem Rang der Matrix  $(a_{\mu\nu})$ ,  $a_{\mu\nu} = \int_M \varphi_{(\mu}^r \wedge \varphi_{\nu)}^{n-r}$ . Verschiedene Anwendungen dieses Satzes werden gegeben, dabei verwendet Verf. nur die Hälfte der Pontrjaginschen Klassen von  $M^n$ ; durch Betrachtung der Formen  $\delta_{i_1 \dots i_{2k}}^{j_1 \dots j_{2k}} \Omega_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k} j_{2k}}$  läßt sich eine viermal größere als die angegebene Matrix erhalten. — In einem zweiten Teil wird eine bemerkenswerte Methode zur Abschätzung der Bettischen Zahlen nach oben angegeben. Bei Existenz gewisser spezieller Tensoren kann man aus den Integralformeln für harmonische Formen (vgl. Y. Tomonaga, dies. Zbl. 41, 93; K. Yano, dies. Zbl. 46, 400) überbestimmte Systeme von partiellen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung gewinnen, denen die Komponenten der harmonischen Tensoren genügen müssen. Ein solches überbestimmtes System ist dann einer totalen Differentialgleichung äquivalent, bei der sich die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit leicht nach oben abschätzen läßt.

H. Guggenheimer.

**Matsumoto, Makoto:** Some applications of Bochner's method to Riemannian manifolds. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 167—174 (1952).

This paper concerns with applications of Bochner's method used by him to estimate the Betti numbers of compact Riemannian manifolds in terms of their curvature tensors [Bochner, Bull. Amer. math. Soc. 52, 178—195 (1946) and this Zbl. 38, 344], Mogi (Kôdei math. Sem. Reports 1950, 73—74), Tomonaga (this Zbl. 41, 93). First the author calls a symmetric tensor  $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$  ( $p \geq 2$ ) to be of Codazzi type if it satisfies the differential equation  $\xi_{i_1 i_2 \dots a p; j} - \xi_{j i_2 \dots a p; i} = 0$ . Putting  $M_{(p)abij} = -(p-1) R_{abij} + \frac{1}{2} (g_{ai} R_{bj} + g_{bj} R_{ai})$  he gets the following theorem: „If  $M_{(p)abij}$  ( $p \geq 2$ ) of the compact Riemannian manifold  $V_n$  is positive definite in the sense that  $M_{(p)abij} \eta^{ab} \eta^{ij} \geq 0$  for any symmetric tensor  $\eta^{ij}$ , then there exists no  $p$  ( $\geq 2$ ) tensor of Codazzi type satisfying  $(g^{ab} \xi_{ab i_2 \dots i_p}; c; a = 0$ . The application



to the imbedding problem is obtained when  $p = 2$ . We notice that in this case the equation  $\xi_{i a, j} - \xi_{j a, i} = 0$  is nothing but the Codazzi equation for a hypersurface imbedded in Euclidean  $S_{n+1}$ . We shall state the simplest case as a corollary. "If a compact Riemannian manifold  $V_n$  is not Euclidean and  $M_{a i b j}$  is positive definite, then it is impossible that the  $V_n$  is imbedded throughout in an Euclidean  $S_{n+1}$  so that it is a minimal or umbilical variety. The other applications concern to symmetric spaces and spaces of recurrent curvature and conformally flat spaces of three dimensions.

S. Sasaki.

**Matsumoto, Makoto:** Riemann spaces of recurrent and separated curvature and their imbedding. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 175—188 (1952).

Let  $V_n$  be a Riemannian space of class one and  $R_{ijkl}$ ,  $H_{ij}$  be its curvature tensor and its second fundamental tensor. T. Y. Thomas (this Zbl. 15, 273) proved that the rank  $\tau$  of the matrix  $\|H_{ij}\|$  is equal to the rank of the matrix  $\|R_{abc i}\|$  ( $a, b, c$  row,  $i$  column) if  $\tau$  is greater than 1 and gave the algebraic criterions in order that either the given  $V_n$  is of class one or not for  $\tau \geq 3$ . But the case  $\tau = 2$  remains unsolved. We call  $\tau$  the type number of  $V_n$  if  $\tau \geq 2$ . (If  $\tau = 0$  or 1, we say that the type number of the space in consideration is 1; in this case the  $V_n$  is flat.) The author tries to discuss this case and first obtains the following theorem. „If  $V_n$  is of type two, there exists a system of functions  $H_{ij}$  satisfying the Gauss' equation  $R_{ijkl} = H_{ik} H_{jl} - H_{il} H_{jk}$  if and only if the rank of the matrix  $\|R_{abij}\|$  ( $a, b$  row,  $i, j$  column) is equal to one“. In such Riemann space, the curvature tensor satisfies the relation  $R_{ijkl} = e S_{ij} S_{kl}$  where  $S_{ij}$  is a skew-symmetric tensor and  $e$  is  $+1$  or  $-1$ . He calls such Riemann space a space of separated curvature. (Of course, as far as the definition of this term concerns, we don't mind the class of our  $V_n$ .) Even if  $H_{ij}$  satisfies the Gauss' equation it may not satisfy the Codazzi's equation. The author gives some necessary (not sufficient) algebraic conditions for the existence of solutions of Codazzi's equation in terms of  $S_{ij}$ . In the next place a tensor  $X_{ij}$  of the second order is called a semi-covariantly constant (semi-Codazzi) tensor if it satisfies the equation  $Y_{ij, k} = 0$  ( $Y_{i, k} = Y_{ik, j} = 0$ ) where  $Y_{ij} = \sigma \cdot X_{ij}$ ,  $\sigma \neq \text{const.}$  (The author says that the Ricci tensor  $R_{ij}$  of Einstein space is semi-covariantly constant and  $\sigma(x) = n/R$ , but for  $n \geq 3$ , it is well known that  $R = \text{const.}$ , hence this is not a good example.) He proves „A space  $V_n$  of separated curvature is of recurrent curvature if and only if the separated curvature is semi-covariantly constant“, and gives algebraic criteria in order that a tensor  $X_{ij}$  is a semi-covariantly constant (semi-Codazzi) tensor. The last criterion can be applied not only to the Riemannian case but also to the space with projective connection [Matsumoto, J. math. Soc. Japan 4, 37—58 (1952)].

S. Sasaki.

**Bochner, S. and K. Yang:** Tensor-fields in non-symmetric connections. Ann. of Math., II. Ser. 56, 504—519 (1952).

Bochner begann 1949 (dies. Zbl. 39, 176) das Studium der Betti-Zahlen für asymmetrische metrische Räume. Es werden jetzt einige Berichtigungen angegeben, sowie neue Resultate. Es ist bekannt, daß  $\Gamma_{(ji)}^h = \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}$  dann und nur dann, wenn  $S_{jih} = S_{[jih]}$ . Für diesen Fall wird der Krümmungstensor  $R_{kji}^{\dots h}$  in bezug auf  $\Gamma_{ji}^h$  ausgedrückt durch den Krümmungstensor  $K_{kji}^{\dots h}$ ,  $S_{ji}^{\dots h}$  und  $\nabla_k S_{ji}^{\dots h}$  [Spezialfall der Formel (p. 79) auf S. 128 des Bandes I von Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie (dies. Zbl. 11, 174)]. Für einen kompakten metrischen Raum dieser Art ergeben sich nun verschiedene Sätze für die Signatur von  $R_{ji}$  und  $K_{ji}$ . Als Beispiel wird der Gruppenraum einer kompakten halbeinfachen Gruppe herangezogen, wo ja bekanntlich  $S_{ji}^{\dots h}$  die verlangte Eigenschaft hat [Cartan und Schouten, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 29, 803—815 (1926), p. 810]. Des weiteren ergibt sich eine Anzahl von Sätzen über die Existenz von pseudo- (d. h. in bezug auf  $\Gamma_{ji}^h$ ) harmonischen Vektorfeldern in einem kompakten asymmetrischen metrischen Raum der betrachteten Art. Insbesondere ergibt sich z. B. daß es im Gruppenraum einer kompakten halbeinfachen Gruppe kein (in bezug auf  $\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}$ ) harmonisches Vektorfeld gibt. Zum Schluß folgen noch Sätze über die Existenz von pseudo-Killing-Vektoren.

J. A. Schouten.

**Moór, Arthur:** Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen. Acta math. 88, 347—370 (1952).

The author considers a correspondence between a Finsler and a Cartan space, whose fundamental functions are denoted by  $F^*(x, i^i)$  and  $F(x, p_i)$  respectively ( $i = 1, \dots, n$ ), where  $p_i$  is a covariant vector density of weight  $-1$ . Tensor with an asterisk refer to the Finsler space; all others to the Cartan space. The tensors  $g_{ij}$ ,  $g_{ij}^*$ ,  $C_{ijh}$ ,  $C_{ijh}^*$ ,  $A^{ijh}$ ,  $A^{*ijh}$  are defined as usual

Cartan: this Zbl. 8, 272; 8, 418). The correspondence between the two spaces is defined as follows: To each line-element  $(x^i, x^i)$  of the Finsler space a hypersurface-element of the Cartan space is associated by means of the relation  $p_i = [g^*(x, \dot{x})]^{-1/2} \cdot g_{ik}^*(x, \dot{x}) \dot{x}^k$ , where  $g^*(x, \dot{x})$  is  $\det(g_{ij}^*(x, \dot{x}))$ . Conversely to each  $(x^i, p_i)$  a line-element  $(x^i, \dot{x}^i)$  is associated by putting  $\dot{x}^i = g(x, p) g^{ik}(x, p) p_k$ . In order that this correspondence be one-one, the author stipulates  $(*) \dot{x}^i = \tilde{x}^i$ . A sufficient condition for consistency is  $(**) g_{ij}^*(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, p)$ , (whether this is also a necessary condition is not clear to the reviewer). It is shown that as a consequence of this correspondence the following identities hold:  $F^*(x, \dot{x}) = F(x, p)$ ,  $l_i^* = l_i$  (unit vectors), and in particular,  $A_i = A_i^* = 0$ . [Reviewer's remark: Finsler spaces for which  $A_i^* = 0$  are of a very particular kind; in fact A. Deicke has shown that such spaces are Riemannian. His proof will be published shortly in the „Arch. der Math.“. At first sight it seems strange that the author's correspondence should specialise the Finsler space in this manner; however a detailed examination of conditions  $(*)$  and  $(**)$  by means of the indicatrix and figuratrix has shown that these imply the equivalence of the notion of transversality with ordinary perpendicularity. Again a sufficient condition for this to hold is that the space be Riemannian. Thus conditions  $(*)$  and  $(**)$  appear to be unduly restrictive]. — The author repeats a construction due to O.Varga (this Zbl. 27, 93) of the „osculating“ Riemannian space for both the Finsler and the Cartan space. This construction involves a sequence of line-elements and a corresponding sequence of hypersurface-elements. His results, namely the equivalence of (1) the osculating Riemannian spaces and (2) the covariant derivatives of both spaces along the corresponding sequences of line- and hypersurface-elements are partly obvious in view of the remarks made above. Also, the author shows that the curvature tensor of the osculating Riemannian space is identical either to the curvature tensor of the Finsler space when a certain relation (5.1a) is satisfied, or it is identical to the curvature tensor of the Cartan space if a relation (5.1b) is satisfied (along the sequences of line- and hypersurface elements). When the latter sequences correspond to each other in accordance with  $(*)$  and  $(**)$ , the curvature tensors of both spaces become identical, provided both (5.1a) and 5.1b are satisfied. — Again the latter theorems become obvious in the light of the remarks made above; for instance, condition (5.1a) is a simple identity in Riemannian spaces. However, the author could not possibly have been aware of Deicke's yet unpublished result concerning Finsler spaces for which  $A_i^* = 0$ . H. Rund.

**Nobuhara, Tetsurō and Tamao Nagai:** On the special Finsler space of three dimensions. Tensor, n. Ser. 2, 175—180 (1952).

In a 3-dimensional Finsler space, take the unit vector  $l^i$  tangent to a given curve as support element, let  $q^i$  be the unit vector in the direction of Euler's vector along the same curve, and let  $\sigma^i$  be the unit vector orthogonal to  $l^i$  and  $q^i$ . — Then, if  $R_{ijk}^i$  and  $A_{ijk}$  are respectively the curvature tensor and the torsion tensor of the space, and the relations: (1)  $R_{ijk}^i \sigma^k = R_{ijk}^i \sigma_i = A_{ijk} \sigma^k = 0$  hold, one may write  $R_{ijk}^i$  and  $A_{ijk}$  in the following forms: (2)  $R_{ijk}^i = \mathfrak{R} q^i (l_j q_k - l_k q_j)$ ;  $A_{ijk} = \mathfrak{A} q_i q_j q_k$  ( $\mathfrak{R}$  and  $\mathfrak{A}$  scalars). — Relations (2) are the necessary and sufficient conditions that the given space has its curvature and torsion tensors of the same form as a 2-dimensional Finsler space. On the other hand, Moór [Canadian J. Math. 4, 189—197 (1952)] had previously given other, rather complicate, conditions for the consistence of (2). — The authors of this paper prove that (1) are equivalent to (2), and conversely, and give some characterization of the Finsler space and the curves fulfilling (1). — They replace (1) by 9 equations, of which 3 at most are independent; if exactly three of these equations are independent, the given curve (tangent to  $l^i$ ) must be a geodesic; if 2 equations are independent, and the curve is not a geodesic, the holonomy group of the space must admit a subgroup leaving invariant the direction  $l_i$ ; the authors give also the differential equations of the curves along which the tensors  $R_{ijk}^i$  and  $A_{ijk}$  have the requested property; finally, if only one of the 9 equations is independent, the space must admit a parallel field of vectors; also in this case, the authors give the differential equations of the curves for which  $R_{ijk}^i$  and  $A_{ijk}$  are of the requested form. D. Dalla Volta.

**Egorov, I. P.:** Eine tensorielle Charakterisierung der maximal beweglichen  $A_n$  mit von Null verschiedener Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 209—212 (1952) [Russisch].

L'A. continua qui sue ricerche precedenti (questo Zbl. 34, 392; 44, 376) riguardanti gli spazi a connessione affine simmetrica,  $A_n$ , di massima mobilità — possedenti cioè un gruppo di Lie, transitivo, di massimo ordine, di collineazioni proiettive. — Come risulta dai lavori precedentemente citati, l'ordine massimo di un gruppo di movimenti per una  $A_n$  a tensore di curvatura non nullo, di parametri  $L_{\beta\gamma}^\alpha$ , è dato da  $n^2$ ; e l'A. si propone di ricercare le condizioni necessarie e sufficienti, espresse sotto forma tensoriale, perchè una data  $A_n$ , a tensore di curvatura non nullo, abbia massima mobilità: i risultati a cui perviene sono i seguenti: a) ogni  $A_n$  ( $n \geq 3$ ), a curvatura diversa da zero, e avente massima mobilità, è proiettivamente piana (a tensore di Weyl identicamente nullo), e il tensore di Ricci  $R_{\alpha\beta}$  è simmetrico. — Applicando poi un teo-



rema preliminare riguardante il massimo ordine di un gruppo del tipo voluto ammesso da uno spazio a connessione affine, per cui la parte simmetrica del tensore di Ricci abbia un dato rango, si trova che deve necessariamente essere: b)  $R_{\alpha\beta} = (1 - n) \varepsilon \partial_\alpha \lambda \partial_\beta \lambda$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\lambda$  invariante). Da a), b) e dalle prime condizioni di integrabilità delle equazioni relative alle componenti dei movimenti infinitesimi del gruppo, si ricava la terza condizione necessaria per l'esistenza di un gruppo del tipo voluto: c)  $\iota_{\alpha\beta} = C \lambda_\alpha \lambda_\beta$  ( $C$  costante). Riferendosi poi a un sistema di coordinate cartesiano-proiettive, rispetta al quale si ha:  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \partial_\gamma \psi - \delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \psi$  si dimostra il seguente Teorema: Esiste una e una sola  $A_n$  a curvatura diversa da zero, soddisfacente alle condizioni a), b), c) per un dato valore di  $C$ , con le funzioni  $\psi$ ,  $\lambda$ , che in un punto prefissato assumono valori assegnati insieme alle loro derivate parziali prime  $(\partial_\alpha \psi)_0$ ,  $(\partial_\alpha \lambda)_0$  con la condizione che gli ultimi  $n$  valori non si annullino contemporaneamente. Ogni spazio così costruito possiede effettivamente una massima mobilità. V. Dalla Volta.

**Egorov, I. P.: Maximal bewegliche  $L_n$  von halbsymmetrischem Zusammenhang.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 433—435 (1952) [Russisch].

L'A. estende i risultati relativi ai massimi gruppi di movimenti dal caso di connessioni affini simmetriche a una connessione affine semisimmetrica  $L_n$ , di tensore di torsione  $\Omega_{\gamma\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \Omega_\beta$ . [Il concetto di gruppo di movimenti per una connessione affine asimmetrica è stato introdotto dall'A. in precedenti lavori (questo Zbl. 34, 392; 39, 179)]. Per una connessione semisimmetrica, il massimo valore possibile per l'ordine è  $n^2$  (v. lav. cit.); se ne deduce (v. recens. preced.) che il gruppo richiesto deve essere un sottogruppo del gruppo dei movimenti per la connessione simmetrica  $A_n$  associata alla data. Ne segue che devono anzitutto essere soddisfatte le condizioni a), b), c) (v. rec. prec.) relative ad  $A_n$ , con  $\lambda$  — in questo caso — eventualmente nullo. Basandosi su questa osservazione, l'A. trova le seguenti condizioni necessarie perchè  $L_n$  ammetta una massima mobilità: a) Il tensore di Weyl per  $A_n$  deve essere identicamente nullo, e il tensore di Ricci simmetrico; b) deve aversi  $R_{\alpha\beta} = (1 - n) c_1 \Omega_\alpha \Omega_\beta$  ( $c_1$  cost.;  $\Omega_\alpha = \partial_\alpha \Omega$ ); c)  $\Omega_{\alpha\beta} = c_2 \Omega_\alpha \Omega_\beta$  ( $c_2$  cost.). — Queste condizioni implicano quelle analoghe per  $A_n$ , e vale anche qui un teorema di esistenza analogo a quello del caso simmetrico; è possibile costruire cioè spazi a connessione semisimmetrica soddisfacenti alle a), b), c) con opportune condizioni iniziali. — Ogni spazio così costruito possiede un gruppo ad  $n^2$  parametri, transitivo, di movimenti; e tale gruppo coincide con quello relativo alla connessione simmetrica associata se, e solo se, quest'ultima ha curvatura non nulla. Si hanno infine applicazioni alle  $L_n$  che sono spazi di gruppo. V. Dalla Volta.

**Vranceanu, G.: Sur les espaces à connexion projective dont le groupe d'holonomie fixe une quadrique.** Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 103—108 (1952).

K. Yano and the referee (this Zbl. 41, 307) proved the theorem: If the holonomy group  $H$  of a space with normal projective connection  $P_n$  fixes a hyperquadric  $Q_{n-1}$ , then the  $P_n$  is projective to an Einstein space (namely, the  $P_n$  is a space with a normal projective connection corresponding to the class of affinely connected spaces with corresponding paths including an Einstein space with non-vanishing scalar curvature). The author first proves this theorem very simply by assuming that the invariant hyperquadric does not pass through the contact point  $P$  of the tangent projective space and the underlying manifold as Yano and the referee did so by making use of his method of orthogonal congruences. In the next place, when the invariant hyperquadric passes through the contact point  $P$  he associates to the space  $P_n$  a conformal space  $C_{n-1}$  such that the given invariant hyperquadric is the locus of points which correspond to point hyperspheres by stereographic projection. From this point of view the author proves the corresponding theorem for the case of holonomy groups of space with normal conformal connection due to the referee [Japanese J. Math. 34, 614—622 (1942)]. S. Sasaki.

**Tsuboko, Matsuji: On a two-dimensional space of projective connection associated with a surface in  $R_3$ .** Osaka math. J. 4, 101—112 (1952).

Let  $C$  be a curve in a two dimensional projectively connected manifold  $R_2$  and  $\Gamma$  be the development of  $C$  on the tangent projective space  $E_2$  at a point  $A_0$  of  $C$ . The author first gets two invariants  $\mathfrak{P}$  and  $\mathfrak{R}$  for the curve  $C$ . Constructing osculating conic  $K_2$  and a cubic  $K_3$  which has a contact of the sixth order with  $\Gamma$  at  $A_0$  and meets the projective normal at  $A_0$  of  $\Gamma$  at conjugate points with respect to  $K_2$ , the author obtains the following geometrical meanings for the invariants  $\mathfrak{P}$  and  $\mathfrak{R}$ . Let  $B$  be a point which does not lie on the tangent of  $\Gamma$  and  $P, P_1, P_2, P_3$  be the points of intersection of a line passing through  $B$  with the tangent,  $\Gamma$ ,  $K_2$  and  $K_3$  respectively in the neighborhood of  $A_0$ . Then the principal parts of the anharmonic ratio  $[BPP_1P_2]$ ,  $[BPP_2P_3]$  are  $\frac{1}{10} \mathfrak{P} (dt)^3$ ,  $\frac{1}{14} \mathfrak{R} (dt)^2$  respectively. — In the next place, the author considers a surface  $S$  in  $R_3$  and a curve  $C$  on  $S$ . Let  $A_0$  be a point on  $S$  and  $[A_0 A_1 A_2 A_3]$  be a natural frame in the tangent projective space  $E_3$  at  $A_0$  of  $R_3$  and the plane  $A_0 A_1 A_2$  be the image of the tangent plane at  $A_0$  of  $S$ . Denote by  $\Gamma$  the projection of the development of  $C$  on the plane  $A_0 A_1 A_2$  from  $A_3$ . Associate with  $S$  the two dimensional space  $R_2$  of projective connection in which the infini-



tesimal displacement of the frame  $[A_0 A_1 A_2]$  are defined by the projections of the variations of the frame  $[A_0 A_1 A_2 \bar{A}_3]$  on the plane  $A_0 A_1 A_2$  from a point  $\bar{A}_3$  which does not lie on the plane  $A_0 A_1 A_2$  in  $E_3$ . Consider a point-correspondence between  $S$  and  $R_2$  in such a way that the homologous points on them correspond to the same values in the system of coordinate determining points of  $R_3$ , and let  $\bar{C}, \bar{I}$  be the figures with respect to  $R_2$  homologous to  $C, I$ . Take the homologous points  $\bar{Q}, \bar{Q}$  in the neighborhood of  $A_0$  on  $C, \bar{C}$ . Then the author obtains the following results: If the écart  $[Q \bar{Q}]$  for the images is an infinitesimal of the third order with respect to  $[A_0 Q]$ ,  $C$  is an asymptotic curve of  $S$ . If  $\bar{A}_3$  lies on the line  $A_0 \bar{A}_3$ ,  $R_2$  is projectively deformable to the space similar to  $R_2$  with  $A_3$  as the center of projection. (Two projectively connected spaces are said to be projectively deformable if there exists a 1—1 point correspondence such that at corresponding points  $\Pi_{jk}^i + \Pi_{kj}^i = \bar{\Pi}_{jk}^i + \bar{\Pi}_{kj}^i$  provided that corresponding points have the same coordinates.) In order that the spaces  $R_2$  corresponding to different centers  $\bar{A}_3$  of projection are projectively deformable to each other, it is necessary and sufficient that  $S$  is totally geodesic. — Finally, the author studies the torsion tensor of the space  $R_2$  associated with the surface  $S$  in connection with the torsion tensor of  $R_3$  and moreover gets a sufficient condition that  $R_3$  be normal.

*S. Sasaki.*

**Yano, Kentaro and Hitosi Hiramatu:** On the projective geometry of  $K$ -spreads. *Compositio math.* 10, 286—296 (1952).

An  $N$  dimensional space of  $K$ -spreads is by definition (J. Douglas, this Zbl. 3, 169) a space in which there is given a system of  $K$ -dimensional manifolds such that there exists one and only one member of the system passing through any  $K+1$  points given in general position. It is well known that a system of  $K$ -spreads is represented by a system of completely integrable partial differential equations of the form  $\partial^2 x^i / \partial u^\beta \partial u^\gamma + H_{\beta\gamma}^i(x, p) = 0$ ,  $p_\alpha^i = \partial x^i / \partial u^\alpha$  where  $x^i$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ ) are coordinates of a point of the space and  $u^\alpha$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, K$ ) parameters of a point on a  $K$ -spread. — Douglas introduced in a space of  $K$ -spreads components of affine connection and projective connection and an analogue  $W_{jkl}^i$  of Weyl's projective curvature tensor in affinely connected space of paths. But, R. S. Clark [Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 210—223 (1945)] pointed out that Douglas'  $W_{jkl}^i$  are not components of a tensor in the general case. Douglas proved also that the necessary and sufficient conditions that the space of  $K$ -spreads in consideration is projectively flat are that the parameters of the projective connection  $*\Pi_{jk}^i$  are independent upon  $p_\alpha^i$  and  $W_{jkl}^i = 0$ . But C. T. Yen (this Zbl. 34, 249) and H. C. Wang (this Zbl. 31, 276) pointed out the latter condition is a consequence of the former one. S. S. Chern [Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 38—43 (1943)] and C. T. Yen (this Zbl. 35, 106) constructed from the given space of  $K$ -spreads a space of  $K$  linear elements with projective connection whose  $K$  dimensional flat subspaces coincide with the  $K$ -spreads. — However, all the authors mentioned above used the so-called natural frame of reference. If we use the natural frame of reference,  $*\Pi_{jk}^i$  appear as coefficients of the connection, but because of the complexity of its law of transformation, it is very difficult to deduce any tensor from it. The authors show that this difficulty can be overcome by using the so-called semi-natural frame of reference instead of natural frame of reference very smoothly and can derive the above stated results quite naturally.

*S. Sasaki.*

**Suguri, Tsuneo:** Theory of invariants in the geometry of paths. *J. math. Soc. Japan* 4, 231—268 (1952).

Les solutions  $x^i(t)$  d'un système d'équations différentielles

$$x^{(m)i} + H^i(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) = 0, \text{ avec } x^{(r)i} = dx^i/dt^r$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $r = 1, 2, \dots, m$ ), constituent un système de „paths“ d'ordre  $m$ . L'A. traite la théorie invariante de ces systèmes par rapport au groupe  $G$  des transformations  $y^i = y^i(x^j, t)$ ,  $\tau = \tau(t)$ , théorie qu'il appelle géométrie rhéonomique généralisée. Tout d'abord il considère les lois de transformation de l'élément linéaire  $x^i(t)$ ,  $x^{(r)i}(t)$ . Ensuite, dans la variété des éléments linéaires, il définit une dérivation covariante pour des vecteurs doués d'un poids par rapport à  $\sigma = dt/d\tau$ , vecteurs de deuxième classe, à partir de laquelle, moyennant des commutateurs, il obtient des tenseurs de courbure et de torsion. Pour les vecteurs à poids nul, vecteurs de première classe, il introduit une autre dérivation covariante et les tenseurs de courbure et torsion correspondants. Des interprétations géométriques sont données pour les rapports existant entre les deux types de dérivation. L'A. considère aussi des relations entre la présente géométrie et celles qui correspondent aux sous-

groupes de  $G$  obtenus en supposant soit  $\tau = t$ , soit que les  $y^i$  ne dépendent pas de  $t$  (géométries des „paths“ ordinaires, intrinsèques et rhéonomiques). Finalement le problème de l'équivalence, pour  $G$  et pour les sous-groupes cités, est étudié par des méthodes dans la ligne de celles de O. Veblen et T. Y. Thomas. (O. Veblen, *Invariants of quadratic differential forms*, Cambridge Tracts, No. 24, 1927.)

G. Ancochea.

**Ikeda, Mineo:** A note on some special spherically symmetric space-times. *Tensor*, n. Ser. 2, 102—107 (1952).

A spherically symmetric space-time is, by definition, a four dimensional Riemannian space whose fundamental form is reducible to

$$(1) \quad ds^2 = -A(r, t) dr^2 - B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) + C(r, t) dt^2$$

where  $A, B, C$  are any positive valued functions of  $r$  and  $t$ . The coordinate system in which  $ds^2$  takes the above form is called spherically symmetric. When  $B \neq \text{const}$ , we call the space-time  $S_I$  and otherwise  $S_{II}$ . In  $S_I$  we can choose spherically symmetric coordinate system such that  $B = r^2$ . As is well-known, the space-time of Schwarzschild's exterior solution and that of Schwarzschild-de Sitter are spherically symmetric solutions of the field equations  $(E_1) K_{ij} = 0$  and  $(E_2) K_{ij} = \alpha g_{ij}$  respectively, when  $\alpha$  is a constant and  $K_{ij}$  is the Ricci tensor. Their line elements in the spherically symmetric coordinate system in which  $B = r^2$  are given by

$$(2) \quad ds^2 = -(1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) + (1 - 2m/r) dt^2$$

and

$$(3) \quad ds^2 = -(1 - 2m/r - \alpha r^2/3)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) + (1 - 2m/r - \alpha r^2/3) dt^2$$

respectively, where  $m$  is an arbitrary constant. If we put  $m = 0$  in (2) and (3), they are the line elements of the space-time of Minkowski and de Sitter universe. In the same way, spherically symmetric solutions of  $(E_3) \Gamma_{ijkm} = 0$ ,  $(E_4) \nabla_h K_{ij} = 0$  are known. [H. Takeno, J. Sci. Hiroshima Univ. 12, 125—136 (1942).] — Following these ideas, the author considers spherically symmetric solutions of the following type of field equations:  $(E_5) \nabla_h K_{ij}^{lm} = \varphi_h K_{ij}^{lm}$ ,  $(E_6) \nabla_h K_i^j = \varphi_h K_i^j$ ,  $(E_7) \nabla_h K_{ij}^{lm} = \varphi_h (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l)$ ,  $(E_8) \nabla_h K_i^j = \varphi_h \delta_i^j$ ,  $(E_9) \nabla_h K_i^j = (\nabla_h K) \delta_i^j$  ( $K = K_s$ ),  $(E_{10}) \nabla_s K_{ij}^{lm} = 0$ ,  $(E_{11}) \nabla_s K_i^s = 0$ . Among many theorems I shall refer only two as examples. „When  $\varphi_i$  is not a zero vector, (2) ( $m \neq 0$ ) is the only spherically symmetric  $S_I$  which satisfies  $(E_6)$ . „ $S_I$  which satisfy  $(E_9)$  are (3) and the Einstein universe

$$(4) \quad ds^2 = -(1 - r^2/R^2)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) + dt^2.$$

S. Sasaki.

**Hlavatý, Václav:** The Schrödinger final affine field laws. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 38, 1052—1058 (1952).

Ein beliebiger Zusammenhang  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  definiert folgende drei Tensoren, den Torsionstensor  $S_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{[\lambda\mu]}^\nu$ , den Krümmungstensor  $P_{\omega\mu}^\nu = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\omega}^\nu - \partial_\omega \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha - \Gamma_{\alpha\omega}^\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$  sowie den zusammengezogenen Krümmungstensor  $P_{\mu\lambda} = P_{\alpha\mu\lambda}^\alpha$ . Unter Benutzung dieser Größen begründete Schrödinger seine vereinheitlichte Relativitätstheorie auf den 68 Gleichungen  $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\omega\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha}$  und  $S_{\lambda\alpha}^\alpha = 0$ , welche er aus einem Variationsproblem gewann. Dabei bedeutet  $g_{\lambda\mu} = P_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu}$  und  $F_{\lambda\mu} = \frac{2}{3} \partial_{[\lambda} F_{\mu]}$ , wobei  $F_\mu$  ein Vektor ist. — Verf. führt nun bei beliebiger Raumdimension  $n$  dieses System von  $n^3 + n$  Gleichungen in den Unbekannten  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  auf  $n^2 + n$  partielle Differentialgleichungen für  $g_{\lambda\mu}$  und  $F_\mu$  zurück. Ferner wird ein expliziter Ausdruck angegeben, um  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  aus den Tensoren  $g_{\lambda\mu}$  und  $F_\mu$  berechnen zu können. — Für den Spezialfall  $n = 4$  untersucht Verf. die erste Approximation der Schrödingerschen Feldgleichungen. Dabei ergibt sich  $g_{(\lambda\mu)}$  in erster Näherung als Tensor der konstanten Krümmung 4 und  $F_\mu$  als Gradient, während die Bivektordichte  $\frac{1}{2} \varepsilon^{\omega\mu\lambda\nu} g_{[\omega\mu]}$  den Maxwellischen Gleichungen in ihrer bekannten Gestalt genügt.

W. Barthel.

## Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Kivikoski, E.:** Zur Kennzeichnung der Kurven durch Singularitäten. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I Nr. 131, 21 S. (1952).

Unter Kurven werden Elementarkurven von Juel verstanden. Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Konvexbögen und enthalten keine Strecken, sie sind einzügig und geschlossen. Ihre Singularitäten sind Doppelpunkte, Wendepunkte, zweierlei Spitzen und dreierlei Winkelpunkte. Ihre Tangentensingularitäten sind Doppeltangenten und Wendetangenten.



Die Arbeit strebt nach der Charakterisierung der Kurven durch ihre Singularitäten. Diese Aufgabe besteht in der Aufsuchung der möglichen Singularitätenkombinationen und des Zusammenhanges derselben mit der (Realitäts-) Ordnung und Klasse sowie mit dem Index und Klassenindex der Kurve. Die Arbeit geht vom bekannten Möbiusschen Satz aus: Eine singularitätenfreie Kurve ist ein Oval. Dann rückt die Arbeit zu immer komplizierteren Kurven vor. Eine Kurve, die keine ankeren singulären Punkte als Winkelpunkte dritter Art (Hüte) besitzt, ist von zweiter Ordnung. Hat eine Kurve eine einzige Singularität, so ist die Singularität ein Hut. Eine Kurve, die an Singularitäten nur Wendepunkte besitzt, ist dritter Ordnung, hat drei Wendepunkte und besteht aus drei Konvexbogen. Ihre Klasse ist entweder 4 oder 6 und der Klassenindex entsprechend 0 oder 2. Eine Kurve, die an Singularitäten außer Wendepunkten einen einzigen Doppelpunkt hat, ist dritter Ordnung und vierter Klasse und hat nur einen Wendepunkt. Es gibt zweierlei Kurven, die an Singularitäten außer Dornspitzen nur einen gewöhnlichen Doppelpunkt haben. Die Untersuchung wird durch 15 gute Figuren erleichtert. Verf. bemerkt, daß einige Sätze aus speziellen Fällen aus allgemeineren Sätzen des Ref. über Kurven vom Maximalklassenindex stammen [vgl. Geometrie endlicher Ordnung, J.-ber. deutsch. Math.-Verein. 53, 104 (1943)]. *Gy. Sz. Nagy.*

**Marchaud, André:** Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné et plus particulièrement de celles du troisième ordre. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 303—370 (1952).

Über die inhaltsreiche Arbeit kann nur andeutend berichtet werden. Betrachtet werden im  $E_3$  Bilder  $F$  von eindeutigen stetigen Funktionen  $z = f(x, y)$  mit konvexem Definitionsbereich  $C$  in der  $x, y$ -Ebene. Dabei soll  $F$  von beschränkter Ordnung  $n \geq 2$  sein im folgenden Sinne:  $F$  hat mit jeder Geraden entweder mindestens eine Strecke gemeinsam oder höchstens  $n$  Punkte und mit mindestens einer Geraden auch genau  $n$  Punkte. Gefragt wird nach Eigenschaften des Kontingents und des Paratingents solcher Flächenstücke  $F$  von beschränkter Ordnung, insbesondere im Fall  $n = 3$ . Es zeigt sich, daß die anscheinend schwache Forderung über die Ordnung weitgehende Aussagen über Kontingent und Paratingent gestattet. — In Abschnitt 1—3 ist  $n$  beliebig. U. a. wird gezeigt: Ein Punkt  $P$  von  $F$  werde als ordinär bezeichnet, wenn das Paratingent an  $F$  in  $P$  nicht den ganzen Raum erfüllt. Dann gilt: Die Menge der ordinären Punkte von  $F$  ist offen und dicht auf  $F$ . Ist  $P$  innerer ordinärer Punkt von  $F$  von der Ordnung  $n$ , so ist das Kontingent in  $P$  an  $F$  ein einfacher Kegel, welcher von jeder Ebene durch  $P$ , die kein ebenes Flächenstück mit ihm gemeinsam hat, in höchstens  $2n - 2$  bzw.  $2n$  Halbgeraden getroffen wird, je nachdem  $n$  gerade bzw. ungerade ist. In jeder Ebene durch  $P$ , die den Kegel in  $2n$  Halbgeraden trifft, sind diese Halbgeraden zu je zweien entgegengesetzt gerichtet. — Im 4. Abschnitt wird  $F$  als von 3. Ordnung angenommen. Unter anderem wird gezeigt: Für das Kontingent in  $P$  tritt der Fall  $2n (= 6)$  (vgl. oben) nur ein, wenn  $F$  auf einem Kegel mit der Spitze in  $P$  liegt. Sind in einem inneren Punkt  $M$  von  $F$  die Halbtangenten an einen Vertikalschnitt von  $F$  durch  $M$  entgegengesetzt und vertikal (parallel zur  $z$ -Achse), so gilt: Enthält  $F$  keine durch  $M$  gehende Strecke (deren Projektion zwei Randpunkte von  $C$  verbindet), so erfüllt das Paratingent eine Vertikalebene durch  $M$ ; andernfalls erfüllt wenigstens das Kontingent eine Vertikalebene. — Im 5. Abschnitt werden solche  $F$  von 3. Ordnung untersucht, welche in keinem inneren Punkt eine lokale Stützebene besitzen. Unter anderem ergibt sich: Bis auf weniger als 5 Ausnahmepunkte ist jeder innere Punkt von  $F$  ordinär. In jedem inneren ordinären Punkt  $P$  von  $F$  ist das Paratingent eben, es sei denn, daß das Kontingent in  $P$  an  $F$  ein Dieder ist. Die ordinären Punkte  $Q$ , in denen das Kontingent ein Dieder ist, besitzen im Innern von  $F$  keinen Häufungspunkt; der Durchschnitt  $a$  der Achse des Dieders mit dem Zylinder über  $C$  liegt ganz auf  $F$ , ferner hat die eine Ebene des Dieders mit  $F$  nur  $a$  gemeinsam und ist das Paratingent an  $F$  in jedem von  $Q$  verschiedenen Punkt von  $a$ ; an einem Beispiel wird die Existenz solcher Punkte  $Q$  nachgewiesen. Aus den eben angeführten Tatsachen folgt, daß das Paratingent von  $F$  im Innern von  $F$  bis auf dort isolierte Punkte stetig ist.

*Otto Haupt.*

**Marchaud, André:** Sur une classe de points singuliers des surfaces du troisième ordre de la géométrie finie. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 319—340 (1952).

(A) Die in Rede stehenden Flächen 3. Ordnung im projektiven Raum  $R_3$  sind folgendermaßen definiert: (I) Das Kontinuum  $M$  in der projektiven Ebene  $R_2$  heiße von  $k$ -ter Ordnung, wenn  $M$  mit jeder Geraden höchstens  $k$  und mit mindestens einer Geraden genau  $k$  Punkte gemeinsam hat; die Kurven 0-ter bzw. 1-ter Ordnung sind die leere Menge bzw. die einpunktigen. Als nicht-zerfallende (non décomposée) Kurve 2. Ordnung  $K^2$ , kurz:  $nz K^2$ , wird bezeichnet jedes, keine Endpunkte besitzende Kontinuum 2. Ordnung; unter zerfallenden Kurven 2. Ordnung, kurz  $z K^2$ , versteht man die Geradenpaare bzw. die einzelnen doppelt gezählten Punkte des  $R_2$ . Als geschlossene Kurven 3. Ordnung im  $R_2$  werden bezeichnet die Kontinua 3. Ordnung von der Art, daß in jedem Punkt der Kurve genau eine gerade Anzahl (2 oder 4) von einfachen (fremden) Teilbogen der Kurve endigen. Die nicht-zerfallenden Kurven 3. Ordnung im  $R_2$ , kurz:  $nz K$ , sind Vereinigungen aus einer geschlossenen Kurve 3. Ordnung  $C$  mit entweder einer  $nz K^2$  oder einem doppelt gezählten Punkt, je in geeigneter Lage relativ zu  $C$ , oder mit der leeren Menge. Die zerfallenden Kurven 3. Ordnung im  $R_2$ ,



kurz:  $z K^3$ , sind die Vereinigungen einer Geraden mit einer  $nz K^2$  oder einer  $z K^2$ . — (II) Im projektiven  $R_3$  werden bezeichnet: Als nichtzerfallende Flächen 2. Ordnung  $F^2$ , kurz:  $nz F^2$ , diejenigen abgeschlossenen Mengen, deren ebene Schnitte sämtlich Kurven höchstens 2. Ordnung sind und für die mindestens ein ebener Schnitt eine  $nz K^2$  ist; ferner als nichtzerfallende Flächen 3. Ordnung, kurz:  $nz F^3$ , diejenigen abgeschlossenen Mengen, deren ebene Schnitte sämtlich Kurven höchstens 3. Ordnung sind und für die mindestens ein ebener Schnitt eine  $nz K^3$  ist. [Eine  $nz F^2$  ist entweder ein Ovoid, d. h. projektives Bild des Randes einer beschränkten, abgeschlossenen, konvexen (dreidimensionalen) Punktmenge, oder ein konvexer Kegel oder eine geradlinige algebraische Fläche 2. Ordnung.] — (III) Ein Punkt  $P$  einer  $nz F^3$  heißt regulär, wenn mindestens eine Gerade durch  $P$  mit der Fläche genau 3 Punkte gemeinsam hat. Ferner heißt  $P$  singulär, wenn eine Umgebung von  $P$  auf der Fläche ganz im Paratingent der Fläche in  $P$  enthalten ist. Die regulären und zugleich singulären Punkte seien als  $rs$ -Punkte bezeichnet. — (B) Ergebnisse. Es sei  $S$  eine  $nz F^3$  mit mindestens einem  $rs$ -Punkt. Es ist  $S$  Vereinigung aus einer Fläche 3. Ordnung  $S_3$  und einer Fläche 2. Ordnung  $S_2$ ; und zwar ist  $S_3, S_2$  entweder Fall (a) leer oder Fall (b) enthält nur einen einzigen Punkt, etwa den Punkt  $A$ . Dabei ist  $S_2$  ein Ovoid oder  $S_3$  und  $S_2$  sind Kegel mit der gemeinsamen Spitze  $A$ . Alle  $rs$ -Punkte von  $S$  liegen auf  $S_3$  und die Verbindungsgerade je zweier  $rs$ -Punkte liegt ganz auf  $S_3$ . — Betr. Fall (a). Es besitzt  $S$  nur reguläre Punkte, ferner entweder höchstens 3  $rs$ -Punkte und diese sind nicht kollinear, oder eine Gerade  $g$  aus lauter  $rs$ -Punkten und es ist  $S_3$  ein Kegel, dessen Spitze auf  $g$  liegt, während  $S_2$  ein Ovoid ist. — Betr. Fall (b). Es ist  $A = S_3, S_2$  einziger nicht-regulärer Punkt von  $S$ . Die Verbindungsgerade eines jeden  $rs$ -Punktes mit  $A$  liegt ganz auf  $S_3$ . Ferner existieren entweder höchstens zwei  $rs$ -Punkte, die nicht kollinear sind mit  $A$ ; oder es existiert eine  $A$  enthaltende Gerade  $h$ , deren sämtliche Punkte bis auf  $A$   $rs$ -Punkte sind, und es ist  $S_3$  ein Kegel, dessen Spitze auf  $h$  liegt.

Otto Haupt.

**Zahorski, Zygmunt: Sur les courbes dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions.** Czechosl. math. J. 1 (76), 105—117 (1952).

**Théorème I:** Si une courbe  $\mathcal{C}$  de l'espace euclidien possède une tangente (orientée ou non orientée) sauf aux points d'un ensemble dénombrable, cette tangente ne peut prendre deux directions  $\theta'$  et  $\theta''$  données d'avance sur tout arc partiel. **Théorème II:** Il existe un arc simple et rectifiable  $\mathcal{C}$  dont la tangente orientée prend sur chaque arc partiel toutes les directions. **Idée des démonstrations:** I.  $P = f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , étant une représentation paramétrique de  $\mathcal{C}$  sans intervalle de constance, l'ensemble  $T(\theta)$  des valeurs de  $t$  où la tangente a une direction déterminée  $\theta$  est un  $G_\delta$ . Si pour  $\theta' \neq \theta''$ ,  $T(\theta')$  et  $T(\theta'')$  sont denses sur  $[a, b]$ , ils ont une valeur commune où la tangente ne peut exister. II.  $\alpha(t)$ : fonction singulière de Lebesgue,  $e(s)$ : application continue de l'intervalle  $[0, 1]$  sur la sphère unité telle que  $e(0) = e(1)$ ,  $P = \int_0^1 e(\alpha(s)) ds$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  décrite par  $P$  est un arc simple possédant partout une tangente orientée qui sur l'ensemble de Cantor de  $[0, 1]$  prend toutes les directions.  $\mathcal{C}$  est construite à partir de  $\mathcal{C}$  par une méthode de condensation de singularités. [Remarque du rapporteur: Th. I est un corollaire d'un Th. de G. Choquet (ce Zbl. 35, 242) ou de R. Brisac (ce Zbl. 29, 322) d'après lesquels sur un résiduel de  $[a, b]$  le contingent de  $\mathcal{C}$  est identique au paratingent. En effet si sur tout arc partiel la tangente prend les directions  $\theta'$  et  $\theta''$ , le paratingent contiendra partout ces directions ce qui sera impossible aux points de coïncidence avec un contingent ne comprenant qu'une direction.]

Chr. Pauc.

• **Mullins jr., Edgar Raymond: A straight line plane with preassigned circles.** Abstract of Thesis. Urbana, Illinois 1952. 7 p.

H. Buscman (Metric methods in Finsler spaces and in the Foundations of Geometry, Princeton 1942) has shown that for the euclidean plane with a set of open Jordan curves such that any two distinct points of the plane are contained in exactly one curve of the system, a straight line plane exists whose metric is topologically equivalent to the euclidean metric and for which the curves of the system are straight lines. In the Thesis abstract under review there is given in the euclidean plane  $E_2$  a system of closed and simple curves  $\Phi(P)$  associated with every point  $P$  of  $E_2$  and satisfying a system of axioms expressed in terms of the topology of  $E_2$ . The object of the author is to prove the existence of a straight line plane whose metric is topologically equivalent to the euclidean metric and for which  $\Phi(P)$  is the system of the circles with center  $P$  for every  $P$ . The proof is sketched. Here are the main steps: The (unique) curve of  $\Phi(P)$  through  $A$  is denoted by  $c(P, A)$ , the closure of its interior by  $d(P, A)$ . If  $A$  and  $B$  are two distinct points, the segment  $\overline{AB}$  is defined as the set of points  $X$  such that  $d(A, X) \cdot d(B, X) = X$ , the line  $\overline{AB}$  as the set of points  $X$  such that either  $A$  is on  $\overline{BX}$  or  $B$  on  $\overline{AX}$ . For any segment  $\overline{AB}$  the point  $M$  of  $\overline{AB}$  such that  $c(M, A) = c(M, B)$  is called the „midpoint of  $\overline{AB}$ “. For an arbitrary line  $h$  the measuring pattern of Elementary Geometry using a dyadic net yields a linear metric  $r(\cdot)$  which is then extended to the plane by means of the curves  $\Phi(P)$  used as gauges.

Chr. Pauc.

**Drandell, Milton:** Generalized convex sets in the plane. Duke math. J. 19, 537—547 (1952).

Let  $\{C\}$  be a family of curves in the complex plane such that: (1) each member of  $\{C\}$  is a closed Jordan curve which passes through the point  $\omega$  at infinity; (2) there exists a unique member of  $\{C\}$  which passes through two finite points in the complex plane. A set  $E$  is said to be convex relative to the family  $\{C\}$  provided that for any two finite points  $p_1, p_2$  contained in  $E$  the points of the arc from  $p_1$  to  $p_2$  of the member of the family  $\{C\}$  which passes through  $p_1$  and  $p_2$  belong to  $E$ . When  $\{C\}$  is the family of straight lines  $\{S\}$  we have ordinary convex sets. In general the family  $\{C\}$  may differ very much from the family  $\{S\}$ . For instance, given a member  $C_0$  of  $\{C\}$  and a finite point  $p \notin C_0$  there exists always passing through  $p$  a member of  $\{C\}$  parallel to  $C_0$  i. e. not meeting  $C_0$  at a finite point; but in general there are infinitely many parallels. The aim of the paper is to extend to the sets convex relative to the family  $\{C\}$  several non metric properties of the usual convex sets. It is shown, for instance, that if a set  $E$  is a closed and bounded set which possesses interior points and is convex relative to the family  $\{C\}$  then the boundary of  $E$  is a closed Jordan curve. The closed and bounded sets possessing interior points,  $F$ , which are convex relative to  $\{C\}$  are those and only those through every point of its boundary there passes a curve  $C \in \{C\}$  such that  $F$  is contained in one of the two closed regions in which  $C$  divides the plane. These and other results contain those of the reviewer [Anais Acad. Brasil. Ci. 21, 291—302 (1949)] established for a certain type of family  $\{C\}$ . M. M. Peixoto.

**Fenchel, W.:** A remark on convex sets and polarity. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 82—89 (1952).

Eine Punktmenge des  $n$ -dimensionalen affinen Raumes nennt Verf. „evenly convex“ (nachfolgend kurz e. c.), wenn sie sich als Durchschnitt von offenen Halbräumen darstellen läßt. Eine im üblichen Sinne konvexe Menge ist nicht notwendig e. c.; die Definition impliziert gewisse Bindungen betreffend die Zugehörigkeit der Randpunkte zur Menge, während dies im klassischen Fall nicht zutrifft. Verschiedene Ergebnisse belegen, daß der eingeführte Begriff sinnvoll und gewissen Ansprüchen der Konvexgeometrie angepaßt ist. So ergibt sich, daß die Polarität (für abgeschlossene konvexe Körper für  $n = 3$  von H. Minkowski, Ges. Abh. II, Leipzig u. Berlin 1911, S. 146 erklärt) selbstreziprok ausfällt; genauer: Die polare Menge  $C^*$  einer e. c. Menge  $C$ , welche den Ursprung enthält, ist definiert als die Menge der Punkte  $u$ , für welche für alle Punkte  $x$  von  $C$  die Ungleichung  $xu < 1$  besteht;  $C^*$  ist wieder e. c., und es gilt  $C^{**} = C$ . Verf. gibt verschiedene Charakterisierungen der e. c. Mengen, z. B.:  $C$  ist genau dann e. c., wenn  $C$  als Durchschnitt von Halbebenen dargestellt werden kann, wo jede (individuell) offen oder abgeschlossen ist.  $C$  ist genau dann e. c., wenn durch jeden nicht zu  $C$  gehörenden Punkt eine zu  $C$  fremde „Ebene“ gelegt werden kann. Ferner gilt: Ist  $C$  e. c., so folgt aus  $x \in C$  und  $y \in \bar{C}$  (abgeschlossene Hülle von  $C$ )  $(1-t)x + ty \in C$  ( $0 < t < 1$ ), d. h.  $C$  ist ganzseitig konvex (T. Motzkin, dies. Zbl. 14, 246); nicht jede einseitig konvexe Menge ist e. c. Schließlich werden die Begriffe auch für die Punktfolgen und in dualer Weise auch für die Ebenenmengen des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes entwickelt. Ist hier  $C$  eine e. c. Punktmenge, so ist die Menge  $I$  der Ebenen, welche  $C$  nicht treffen, wieder e. c. Diese Supplementarität ist invariant gegenüber Korrelationen, welche mit einer nicht singulären Matrix die  $n+1$  homogenen Punktkoordinaten in die  $n+1$  Ebenenkoordinaten überführen und umgekehrt. Ist  $C$  e. c., und wird  $C^*$  durch Korrelation aus der zu  $C$  supplementären Menge  $I'$  erhalten, so ist auch  $C^*$  e. c., und für selbstreziproke Korrelationen (Matrix symmetrisch) gilt für die so gewonnene verallgemeinerte Polarität wieder  $C^{**} = C$ . H. Hadwiger.

**Gaddum, Jerry W.:** A theorem on convex cones with applications to linear inequalities. Proc. Amer. math. Soc. 3, 957—960 (1952).

Neben der allgemeinen Lösung (I) des Ungleichungssystems

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

betrachtet Verf. auch speziellere Lösungen (II) mit der Eigenschaft, daß für mindestens ein  $i$  das Zeichen  $\geq$  steht. Das Verhalten des Kegels  $A$ , erklärt als der durch die Vektoren  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$  aufgespannte konvexe Kegel, und des dazu polaren Kegels  $A^*$  hinsichtlich ihres Durchschnitts wird untersucht und für die Auffindung von (I) bzw. (II) nutzbar gemacht. Von der einschlägigen Literatur wird dabei viel Gebrauch gemacht. G. Aumann.

**Verblunsky, S.:** On the circumradius of a bounded set. J. London math. Soc. 27, 505—507 (1952).

Von H. W. Jung (J. reine angew. Math. 123, 241—257 (1901)) stammt der Satz: Die kleinste Kugel, in die alle Punktfolgen des  $E_n$  vom Durchmesser 1 gelegt werden

können, hat den Radius  $[\frac{1}{2}n/(n+1)]^{1/2}$ . Die vom Verf. behandelte Beweisanordnung war vor R. Lagrange schon länger bekannt; dessen Beweisführung ersetzt Verf. durch ein wesentlich kürzeres Verfahren. Aber auch diese kurze Beweisführung ist bereits im wesentlichen zweimal veröffentlicht, nämlich vor dem Ref. (dies. Zbl. 11, 318) schon von S. Kuratowski (dies. Zbl. 6, 424). *W. Süss.*

**Bordoni, Piero Giorgio:** *Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 242—245 (1952).

**Fejes Tóth, L.:** Ein Beweisansatz für die isoperimetrische Eigenschaft des Ikosaeders. Acta math. Sci. Hungar. 3, 155—163 (1952).

Nach einer Vermutung von Steiner hat das regelmäßige Dodekaeder und Ikosaeder bei gleicher Oberfläche unter den topologisch isomorphen Polyedern das Maximum des Volumens. Diese Vermutung wurde von Steinitz als ungeklärt bezeichnet. Heute steht jedoch die Steinersche Vermutung nur für das Ikosaeder nicht fest und die Extremaleigenschaften des regulären Körpers (vgl. das Werk des Verf., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Grundlehren der math. Wissen. Bd. XLV, Berlin 1953) scheinen die Vermutung von Steiner auch für das Ikosaeder zu unterstützen. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Die Steinersche Vermutung ist für das Ikosaeder richtig, wenn die fünfseitigen Pyramiden eine gewisse Minimaleigenschaft besitzen. — Es wird über die im Zusammenhang mit der Steinerschen Vermutung erreichten Ergebnisse ein guter historischer Überblick gegeben. *Gy. Sz.-Nagy.*

**Pikus, D. L.:** Das isoperimetrische Problem in der Lobačevskischen Ebene. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 456—461 (1952) [Russisch].

Verf. zeigt, daß die isoperimetrische Aufgabe auch in der hyperbolischen Ebene durch den Kreis gelöst wird. Dabei werden die bekannten Steinerschen Schlußweisen (s. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916) angewandt; an Stelle der Ähnlichkeitstransformationen treten jedoch die NE-Homothetien, bei denen die ganze NE-Ebene auf das Innere eines Kreises abgebildet wird. Ferner wird zuerst gezeigt, daß unter allen Dreiecken mit 2 gegebenen Seiten dasjenige den größten Inhalt hat, bei dem der eine Winkel gleich der Summe der beiden übrigen ist. Diese Dreiecke treten an die Stelle der rechtwinkligen, einem Thaleskreis eingeschriebenen Dreiecke.

*W. Burau.*

**Eggleston, H. G.:** A proof of Blaschke's theorem on the Reuleaux triangle. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 296—297 (1952).

Einfachster Beweis für den Satz, daß von allen konvexen Bereichen fester Breite das Dreieck von Reuleaux kleinsten Flächeninhalt hat. Es wird von drei Kreisbögen mit den Radien  $d$  berandet, die ihre Mittelpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $d$  haben.

*W. Blaschke.*

**Radziszewski, Constantin:** Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites dans les figures convexes. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 771—773 (1952).

Beweis des Satzes: In jeden ebenen Eibereich  $E$  (abgeschlossene, beschränkte, konvexe Punktmenge mit Innenpunkten, ohne Bedingung bezüglich des Randes) läßt sich stets ein Rechteck einbeschreiben, das mindestens halb so großen Flächeninhalt hat wie der Eibereich  $E$ . Der Satz gilt zunächst für den gleich großen Eibereich  $E_{xy}$ , der aus  $E$  durch 2 „Schüttelungen“ auf die  $x$ -Achse und dann auf die  $y$ -Achse eines rechtwinkligen  $x$ - $y$ -Koordinatensystems entsteht; es existiert dann ein eindeutig bestimmtes Rechteck von der behaupteten Größe, von dem 3 Ecken auf den Achsen liegen. Diesem Rechteck entspricht in  $E$  ein Paar gleich großer Parallelogramme mit zur  $y$ -Achse parallelen Seiten. Für eine passende Stellung des  $x$ - $y$ -Systems erhält man ein Rechteck der behaupteten Größe in  $E$ . Bei räumlichen Eibereichen, die eine Symmetrie-Ebene besitzen, behauptet Verf. für das Volumen einbeschriebener rechtwinkliger Parallelepipede einen analogen Satz; dabei tritt  $\frac{1}{9}$  an Stelle des Faktors  $\frac{1}{2}$ .

*W. Süss.*



Levi, F. W.: Über zwei Sätze von Herrn Besicovitch. Arch. der Math. 3, 125—129 (1952).

Es seien  $K$  ein beschränkter, konvexer Bereich im euklidischen  $\mathbb{R}_n$ ,  $|K|$  sein Inhalt,  $A, B, C$  Mittelpunktsbereiche mit  $A \subseteq K$ ,  $B \supseteq K$ ,  $C \supseteq K$ ,  $C$  konvex,  $a(K) = \max_A (|A|:|K|)$ ,  $b(K) = \min_B (|B|:|K|)$ ,  $c(K) = \min_C (|C|:|K|)$ ,  $a_n = \inf_K a(K)$ ,  $b_n = \sup_K b(K)$ ,  $c_n = \sup_K c(K)$ .

Nach A. S. Besicovitch (dies. Zbl. 35, 384) ist  $a_2 = \frac{2}{3}$ ,  $b_2 = \frac{4}{3}$  und dabei  $a(K) = \frac{2}{3}$ ,  $b(K) = \frac{4}{3}$  nur für Dreiecke. Verf. zeigt zunächst, daß  $c_2 = 2$  und  $c(K) = 2$  nur für Dreiecke gilt, während er allgemein nur die Abschätzungen findet:  $a_n \geq 2/(1+n^n)$ ,  $c_n \leq n^n$ . — Es seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$  die durch ebene beschränkte, konvexe Bereiche  $A$  bzw.  $B, C \dots$  bestimmten Affinitätsklassen. Zu gegebenem  $A \in \mathcal{A}$  gibt es ein  $B \in \mathcal{B}$  mit  $B \subseteq A$ , für das  $|A|:|B|$  minimal ist. Dieser nur von  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abhängende Minimalwert  $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  führt zur Definition des „Nachbarschaftsgrades“ von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  durch  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot \alpha(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = (\mathcal{B}, \mathcal{A})$ . Es ist  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 1$  für  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ,  $= 1$  für  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ; ferner  $(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq (\mathcal{A}, \mathcal{B})(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . Für die Klassen  $\mathfrak{D}$  der Dreiecke, Parallelogramme  $\mathfrak{P}$ , affinregulären Sechsecke  $\mathfrak{S}$  und Mittelpunktsbereiche  $\mathfrak{M}$  folgen genauere Angaben. Faßt man die Klassen als Punkte eines Raumes  $\Sigma$  auf, so ist  $\Sigma$  durch die Entfernungsdefinition  $|\mathcal{A}, \mathcal{B}| = \frac{1}{2} \log (\mathcal{A}, \mathcal{B})$  metrisch, und es gilt die Dreiecksungleichung. Die Menge der Klassen mit einem Polygon mit rationalen Ecken ist in  $\Sigma$  überall dicht.  $\Sigma$  ist kompakt.  $\Sigma$  ist eine Sphäre mit Zentrum  $\mathfrak{D}$  und Radius  $\log 2$ . Auf ihrer Peripherie liegt  $\mathfrak{P}$ . Diese Betrachtungen lassen sich auf Bereiche im  $\mathbb{R}_n$  erweitern. W. Süss.

Hadwiger, H.: Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Maßzahlen bei konvexen Rotationskörpern. Monatsh. Math. 56, 220—228 (1952).

Verf. zeigt, daß für  $k \geq 2$  die  $k+1$  Minkowskischen Quermaßintegrale  $W_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k$ ) eines konvexen Rotationskörpers des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes der Ungleichung (1)  $W_\alpha^{\beta-\gamma} W_\beta^{\gamma-\alpha} W_\gamma^{\alpha-\beta} \geq 1$ , ( $0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq k$ ) genügen, in der das Gleichheitszeichen für die Kugel und, wenn  $\gamma < k$  ist, allgemeiner für einen rotationssymmetrischen Kappenkörper der Kugel gilt. Die Ungleichung (1) wird aus der schärferen linearen Ungleichung

$$(2) \quad (\alpha - \beta) a^\gamma W_\gamma + (\beta - \gamma) a^\alpha W_\alpha + (\gamma - \alpha) a^\beta W_\beta \geq 0, \quad (0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq k)$$

gewonnen, in der  $a$  den Äquatorradius des Rotationskörpers bedeutet. Beide Beziehungen enthalten zahlreiche bekannte Ungleichungen der Maßgeometrie der Rotationskörper als Sonderfälle. Die Ungleichung (2) könnte auch aus den Ergebnissen von A. Dinghas (dies. Zbl. 33, 399) gewonnen werden, doch zieht es der Verf. vor, unabhängig davon einen elementaren Beweis zu geben, wobei er die Betrachtungen zunächst auf polygonale Rotationskörper  $S$  beschränkt, an deren Aufbau keine Zylinderkörper beteiligt sind. Für die Volumina  $V_\varrho$  der Parallelkörper  $S_\varrho$  im Abstände  $\varrho$  gilt dann die Integraldarstellung

$$(3) \quad V_\varrho = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^\pi [(a + \varrho)^k - (r + \varrho \sin \tau)^k] \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

in der  $\omega_{k-1}$  das Volumen der  $(k-1)$ -dimensionalen Einheitskugel,  $r$  den senkrechten Abstand eines Randpunktes von  $S$  von der Rotationsachse und  $\tau$  den Winkel bedeutet, den die Normale einer Stützhyperebene mit der Rotationsachse einschließt. Wird (3) nach Potenzen von  $\varrho$  entwickelt, dann ergeben sich durch einen Vergleich mit der Steinerschen Formel für das Parallelvolumen für die Minkowskischen Quermaßintegrale die Integraldarstellungen

$$(4) \quad W_\nu = \frac{\omega_{k-1}}{k} \int_0^\pi [a^{k-\nu} - r^{k-\nu} \sin^\nu \tau] \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \quad (\nu = 0, 1, \dots, k).$$

Die Ungleichung (2) ergibt sich aus der entsprechenden Linearkombination der Integrale (4), die sich als ein einziges Integral mit definitivem Integranden darstellen läßt. Aus (2) ergibt sich die Ungleichung (1) durch Auflösung nach  $W_\beta$ , indem der rechtsseitig auftretende Ausdruck als Funktion von  $a$  betrachtet und durch sein Minimum ersetzt wird. — Die allgemeine Gültigkeit der Ungleichungen (1) und (2) folgt daraus, daß die Quermaßintegrale stetige Funktionale sind und daß sich ein beliebiger Rotationskörper beliebig genau durch polygonale Rotationskörper approximieren läßt. R. Inzinger.

Hadwiger, H.: Über zwei quadratische Distanzintegrale für Eikörper. Arch. der Math. 3, 142—144 (1952).

Let  $K$  be a convex body of volume  $V$  and area  $F$  in the  $k$ -dimensional euclidean space. The author proves the following inequalities

$$\int r^{-2} dV dV_0 \leq \frac{F^2}{2(k-1)(k-2)}, \quad \int r^2 dF dF_0 \geq 2k^2 V^2$$

where  $r$  denotes the distance between the volume elements  $dV$ ,  $dV_0$  (or the surface area elements  $dF$ ,  $dF_0$ ) and the integrals are extended over  $K$ . The first holds for  $k > 2$  and the second for  $k > 1$ . The equalities hold for the sphere. The proofs are based on some relations of Integral Geometry and they use Hölder's inequality.

L. A. Santaló.

**Santaló, Luis A.: Probleme der Integralgeometrie.** Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 23—40 (1952) [Spanisch].

„Viele in der Integralgeometrie häufig benutzte Beziehungen sind Sonderfälle sehr allgemeiner und bekannter aus der Lehre der Lieschen Gruppen.“ Es werden die Pfaffschen Formen einer Lie-Gruppe und die Strukturgleichungen nach E. Cartan eingeführt. Mit ihrer Hilfe werden linke und rechte invariante Raumelemente erklärt, die zu Faktorgruppen gehören nach A. Weil und S. S. Chern. Es folgen Anwendungen auf die Gruppe der reellen  $n$ -reihigen Matrizen mit der Determinante eins und Beziehungen zwischen Mittelwerten. Abschließend ein Bericht über eine Diskussion.

W. Blaschke.

**Santaló, Luis A.: Integralgeometrie in Räumen konstanter Krümmung.** Publ. Comision nac. Energia atom., Ser. mat. 1, Nr. 1, 68 p. (1952) [Spanisch].

Es handelt sich hier um eine Zusammenfassung und Erweiterung der bisherigen Untersuchungen über Integralgeometrie. Zunächst werden die invarianten „Dichten“ neu eingeführt. In § 3 wird eine Formel hergeleitet, die die „Anzahl“ der linearen Räume  $L_r$  ( $r < n$ ) mißt, die eine Kugel  $K$  im  $R_n$  treffen. Diese Formel wird für den Euklidischen  $R_n$  auf den Fall erweitert, daß  $K$  ein konvexer Körper ist, und dann auch auf allgemeine nicht konvexe  $K$ . Daraus ergeben sich die Gegenstücke der Formeln von Crofton für den  $R_n$ . Entsprechendes für nicht-Euklidische  $R_n$ . Im zweiten Teil folgen die entsprechenden Formeln für die Kinematik des nicht-Euklidischen  $R_n$ . Es scheint, daß alle bisherigen Ergebnisse auf diesem Gebiet, auch die von S. S. Chern, in der vorliegenden Schrift, zum Teil in verallgemeinerter Form und mit vereinfachten Beweisen, neu hergeleitet sind.

W. Blaschke.

**Polya, Georges: Sur le rôle des domaines symétriques dans le calcul de certaines grandeurs physiques.** C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1079—1081 (1952).

L'A. complète ses recherches élémentaires mais ingénieuses (Polya et Szegő, Isoperimetric inequalities, Princeton 1951, ce Zbl. 44, 383), considère un domaine plan borné simplement connexe comme la section droite d'une barre ou une plaque conductrice ou vibrante et étudie des coefficients correspondants d'inertie, capacité, rigidité etc. Il compare ces coefficients avec ceux d'un cercle ou d'un domaine obtenu par des dilatations. Il en tire des valeurs approchées de certains coefficients pour des domaines simples sans solutions exactes connues.

M. Brelot.

## Topologie:

**Tajmanov, A. D.: Über die Fortsetzung der stetigen Abbildungen topologischer Räume.** Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 459—463 (1952) [Russisch].

Sei  $X$  ein  $T_1$ -Raum,  $A$  eine dichte Untermenge des Raumes  $X$  und  $Y$  ein Bikompaktum. Eine stetige Abbildung von  $A$  in  $Y$  heißt gleichmäßig stetig, wenn  $f^{-1}(B_1) \cdot f^{-1}(B_2) = 0$  für beliebige disjunkte abgeschlossene Mengen  $B_1, B_2 \subset Y$  ist. Zwei Mengen  $A_1, A_2 \subset A$  heißen  $Y$ -trennbar, wenn es eine stetige Abbildung  $f$  von  $A$  in  $Y$  gibt, so daß  $f(A_1) \cdot f(A_2) = 0$ . Die folgenden Sätze werden bewiesen: (I) Eine stetige Abbildung  $f$  der dichten Menge  $A \subset X$  in das Bikompaktum  $Y$  kann zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raumes  $X$  dann und nur dann erweitert werden, wenn  $f$  gleichmäßig stetig ist. (II) Dafür, daß jede stetige Abbildung der dichten Menge  $A \subset X$  in das Bikompaktum  $Y$  zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raumes  $X$  erweitert werden kann, ist es notwendig und hinreichend, daß  $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} = 0$  für beliebige  $Y$ -trennbare, in  $A$  abgeschlossene Mengen  $A_1, A_2 \subset A$

ist. — Die Sätze von Ju. Smirnov (dies. Zbl. 43, 164) und von Vulich (dies. Zbl. 46, 162) über Erweiterungen stetiger Abbildungen sind leichte Folgerungen der Sätze (I) und (II). *R. Sikorski.*

**Fan, Ky and Noel Gottesman:** On compactifications of Freudenthal and Wallman. *Indagationes math.* 14, 504—510 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 504—510 (1952).

Freudenthal's compactification of rim-compact (Zippin: semicompact) spaces with the property that the added points form a 0-dimensional set (Freudenthal, this Zbl. 42, 137) can be derived from the existence of a space base  $\mathfrak{B}$  with the property (1)  $A, B \in \mathfrak{B}$  implies  $A \cap B \in \mathfrak{B}$ , (2)  $A \in \mathfrak{B}$  implies  $R - \bar{A} \in \mathfrak{B}$ , (3) for any open set  $U$  of  $R$  and any  $A \in \mathfrak{B}$  such that  $A \subset U$ , there exists a  $B \in \mathfrak{B}$  such that  $\bar{A} \subset B \subset \bar{B} \subset U$ . — The compactification by means of the maximal binding families of sets  $\bar{A}$  ( $A \in \mathfrak{B}$ ) also generalizes that of Wallman (this Zbl. 18, 332). *H. Freudenthal.*

**McCandless, Byron H.:** Dimension and disconnection. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 657—658 (1952).

In their book on „Dimension theory“ (Princeton 1948, this Zbl. 36, 125) Hurewicz and Wallman prove the equivalence of the conditions  $\beta_n, \gamma_n$  below for any semi-compact separable metric space  $X$  and also the equivalence of  $\beta_0, \gamma_0$  to total-disconnection. The author proves the equivalence of the two conditions to  $\alpha_n$ , a generalisation of total-disconnection; the conditions are:  $\alpha_n$ : Any closed subset of  $X$  containing at least two points can be disconnected by a closed set of dimension  $\leq (n-1)$ .  $\beta_n$ : Any two points in  $X$  can be separated by a closed set of dimension  $\leq (n-1)$ .  $\gamma_n$ : Any point can be separated from a closed set not containing it by a closed set of dimension  $\leq (n-1)$ . *V. S. Krishnan.*

**Wada, Hidekazu:** Über eine Vereinigung der Sätze von H. Hopf und N. Bruschlinsky. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 4, 77—79 (1952).

Verf. versucht, die Sätze von Hopf und Bruschlinsky „Abbildungsklassen eines Polyeders  $K$  in die  $S^1$  entsprechen eineindeutig den Elementen von  $H^1(K, \pi_1(S^1))$ “ und „Abbildungsklassen eines  $n$ -dimensionalen Polyeders  $K^n$  in die  $S^n$  entsprechen eineindeutig den Elementen von  $H^n(K^n, \pi_n(S^n))$ “ zusammenzufassen. Verf. gibt notwendige Bedingungen für einen zusammenhängenden  $n$ -dimensionalen Raum  $Y^n$  ( $n \geq 2$ ) an, unter denen die folgende Aussage (\*) gilt: Die Menge der Abbildungsklassen eines  $n$ -dimensionalen Polyeders  $K^n$  in  $Y^n$  entspricht eineindeutig den Elementen der direkten Summe:  $H^1(K^n, \pi_1(Y^n)) + H^n(K^n, \pi_n(Y^n))$ . Diese Bedingungen, die hier nicht formuliert werden sollen, enthalten u. a., daß  $\pi_k(Y^n) = 0$  für  $2 \leq k < n$ . Leider gibt Verf. keine nicht-trivialen Beispiele für Räume  $Y^n$ , die seinen Bedingungen genügen, an. *F. Hirzebruch.*

**Wada, Hidekazu:** On mappings from complexes into the complex projective space. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 4, 69—76 (1952).

Pontrjagin (dies. Zbl. 25, 93) hat eine Klassifikation der Abbildungen eines 3-dimensionalen Komplexes in die 2-dimensionale Sphäre angegeben. Verf. behandelt die folgende Verallgemeinerung: Klassifikation der Abbildungen eines  $(2n+1)$ -dimensionalen Komplexes  $K$  in den komplex-projektiven Raum  $P(n)$  von  $n$  komplexen Dimensionen. Der wichtigste Satz: Für zwei Abbildungen  $f, g: K \rightarrow P(n)$ , die auf dem 2-dimensionalen Skelett von  $K$  übereinstimmen, wird in üblicher Weise eine Differenz-Coklasse  $d^{2n+1}(f, g) \in H^{2n+1}(K, \mathbb{Z})$  definiert [ $d^{2n+1}(f, g)$  ist das erste Hindernis, das sich der Deformation von  $f$  in  $g$  entgegenstellt]. Ferner sei  $s^2 \in H^2(P(n), \mathbb{Z})$  erzeugendes Element von  $H(P(n), \mathbb{Z})$ . Die Abbildungen  $f, g$  sind dann und nur dann homotop, wenn es ein Element  $\omega^1 \in H^1(K, \mathbb{Z})$  mit  $d^{2n+1}(f, g) = (n+1) \cdot \omega^1 \cdot (f^* s^2)^n$  gibt. Anm. des Ref.: Verf. hat in der letzten Formel den Faktor  $2^n$  an Stelle von  $(n+1)$ . Nach Ansicht des Ref. liegt ein Rechenfehler vor, der sich auch in dem Theorem 1 bemerkbar macht, wo  $2^k \binom{n}{k}$  durch  $\binom{n+1}{k}$  zu ersetzen ist. — Theorem 1, aus dem die obige Formel folgt, besagt (hier ohne Berücksichtigung der für die obige Formel wichtigen relativen Homotopie angeben):



Sei  $K$  ein beliebiger Komplex;  $f, g$  seien Abbildungen des  $(2n+1)$ -Skeletts von  $K$  in  $P(n)$ . Für  $f, g$  sind Hindernisse  $c^{2n+2}(f), c^{2n+2}(g) \in H^{2n+2}(K, Z)$  definiert, die sich der Erweiterung von  $f, g$  auf das  $(2n+2)$ -Skelett entgegenstellen. Es gilt:  $c^{2n+2}(f) = (f^* s^2)^{n+1}$ ,  $c^{2n+2}(g) = (g^* s^2)^{n+1}$  und daher  $c^{2n+2}(f) - c^{2n+2}(g) = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (f^* s^2 - g^* s^2)^{n+1-k} (g^* s^2)^k$ . Die letzte Formel läßt sich für relative Homotopie interpretieren. Das Theorem I wurde auch von Eckmann (dies. Zbl. 33, 402) angegeben und steht in engem Zusammenhang mit der Arbeit von Kundert (dies. Zbl. 43, 174).

F. Hirzebruch.

**Uehara, Hiroshi:** On homotopy type problems of special kinds of polyhedra. I, II. Osaka math. J. 4, 145—168, 169—184 (1952).

La partie I donne la classification des types d'homotopie des  $A_n^3$ -polyèdres, c'est-à-dire des polyèdres  $K$  de dimension  $n+3$  tels que  $\pi_i(K) = 0$  pour  $i < n$ , et  $\pi_{n+1}(K) = 0$ . Un tel polyèdre est homotopiquement équivalent à un polyèdre réduit qu'on peut construire par juxtaposition de polyèdres élémentaires. La donnée des groupes de cohomologie entiers:  $H^n(K), H^{n+1}(K), H^{n+2}(K), H^{n+3}(K)$ , du groupe  $H^n(K; Z_{2k})$  et des groupes mod 2  $H^{n+2}(K; Z_2)$  et  $H^{n+3}(K; Z_2)$ , liés aux précédents par les homomorphismes de Boksteyn, et par le carré de Steenrod  $Sq^2$ , détermine entièrement le type d'homotopie du  $A_n^3$ -complexe  $K$ , et deux  $A_n^3$ -complexes dont les cohomologies sont isomorphes — au sens précédent — ont même type d'homotopie. L'A. introduit, pour décrire la cohomologie du complexe réduit, une opération  $q_{m-i}$  qui généralise le carré de Steenrod; cette opération, qu'il a définie avec N. Shimada pour le calcul de la seconde obstruction d'un  $A_n^2$ -complexe, n'intervient pas dans le problème. — Dans la partie II l'A. montre comment on peut calculer les groupes d'homotopie d'un  $A_n^3$ -complexe à partir de sa cohomologie. La méthode revient à utiliser le „couple exact“ (notation de W. S. Massey) associé aux groupes d'homotopie  $\pi_{r+q}(K^p, K^{p-1})$ ; on sait qu'alors l'opérateur bord du premier tableau dérivé est un homomorphisme  $B_2$  dual du carré de Steenrod  $Sq^2$ . La suite exacte de ce tableau permet alors de déterminer, pour les  $A_n^2$ -et  $A_n^3$ -complexes, les groupes  $\pi_{n+2}(K)$ , à la structure d'une extension près. L'A. traite en outre le cas  $n=2$ , sans 2-torsion.

R. Thom.

**Adem, José:** The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 720—726 (1952).

L'A. donne une formule exprimant l'itération de 2 carrés de Steenrod  $Sq^{2t} Sq^s$  ( $s > t$ ) comme une combinaison linéaire de carrés itérés  $Sq^{t+s+j} Sq^{t-j}$ , où les coefficients sont des coefficients binomiaux modulo 2. Il en résulte certaines conséquences. — 1. Les  $Sq^{2^p}$  ( $p=0,1,2,\dots$ ) forment une base pour les  $Sq$  [ce qui étend et précise un résultat de J. P. Serre; C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1243—1245 (1952)]. — 2. Exprimant au moyen de la formule le carré (ordinaire) d'une classe de cohomologie on en déduit des conditions restrictives pour l'anneau de cohomologie d'un complexe. En particulier, il n'y a pas de variété (sans torsion) avec  $1+t^n+t^{2n}$  pour polynôme de Poincaré si  $n$  n'est pas une puissance de 2. — 3. La parité de l'invariant de Hopf d'une application d'une sphère  $S^{2n-1}$  en  $S^n$  dépend de la valeur d'un  $Sq^n$ . Il en résulte que l'invariant de Hopf doit être pair lorsque  $n$  n'est pas une puissance de 2. Une multiplication sans diviseurs de zéro dans l'espace euclidien  $R^n$  n'est pas possible si  $n$  n'est pas une puissance de 2 [généralisation de résultats de Behrend (ce Zbl. 21, 293) et Hopf (ce Zbl. 24, 360) pour une multiplication bilinéaire]. — 4. Dans certaines conditions, la composition par suspension de 2 applications dont l'invariant de Hopf vaut 1 est essentielle. Il en résulte notamment  $\pi_{n+2}(S^n) \neq 0$  ( $n \geq 2$ ),  $\pi_{n+6}(S^n) \neq 0$  ( $n \geq 4$ ),  $\pi_{n+14}(S^n) \neq 0$  ( $n \geq 8$ ). — 5. L'A. définit une opération homologique de 2<sup>de</sup> espèce, opérant dans le noyau de  $Sq^2$ , et augmentant de 3 le nombre de dimensions. En particulier, pour une application de  $S^{n+2}$  en  $S^n$ , l'opération correspondante est non triviale si et seulement si l'application est essentielle. Cette opération permet de déterminer le 3<sup>e</sup> obstacle de l'application d'un  $n$ -complexe en  $S^n$  lorsque les 2 premiers obstacles sont nuls.

G. Hirsch.

**Boltjanskij, V.:** Schnittflächen von schiefen Produkten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 17—20 (1952) [Russisch].

In einer früheren Arbeit [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 305—307 (1951)] hat Verf. das zweite Hindernis gegen die Fortsetzung eines  $k$ -Vektorfeldes auf das  $(r+2)$ -dimensionale Gerüst einer Mannigfaltigkeit  $M^n$  bestimmt. Jetzt wird in analoger Weise der

allgemeine Fall der Querschnitte in einem Faserraum (= schiefen Produkt)  $P$  mit  $B$  als Basiskomplex, der Mannigfaltigkeit  $C$  als Faser und der transitiven kompakten Lieschen Gruppe  $\Gamma$  als Strukturgruppe betrachtet. Es wird das zweite Hindernis  $Z^{r+2}(\mathfrak{S}) \in V^{r+2}(B, \pi^{r+1}(C))$  gegen die Erweiterung des Querschnittes  $\mathfrak{S}$  auf das  $(r+2)$ -dimensionale Gerüst  $B^{r+2}$  von  $B$  bestimmt, falls das erste Hindernis verschwindet. Dabei ist  $\pi^r(C)$  die erste nichttriviale Homotopiegruppe von  $C$  [im Falle  $r=1$  wird  $\pi^1(C)$  als kommutativ und die Operationsweise von  $\pi^1(C)$  auf  $\pi^2(C)$  als trivial vorausgesetzt]. Es ergibt sich  $Z^{r+2}(\mathfrak{S}) = Z^{r+2}(\mathfrak{S}_0) + R^{r+2}(D^r) + D^r \cup Y^2(\mathfrak{S}_0)$ . Dabei ist  $\mathfrak{S}_0$  ein beliebiger festgewählter Querschnitt über  $B^{r+1}$ .  $D^r$  durchläuft die Kohomologiegruppe  $V^r(B, \pi^r(C))$  und  $R^{r+2}(D^r) \in V^{r+2}(B, \pi^{r+1}(C))$  ist das Hindernis gegen die Fortsetzung auf  $B^{r+2}$  für eine Abbildung  $f: B^{r+1} \rightarrow C$ , welche gegenüber der Nullabbildung von  $B^r$  in  $C$  einen Differenzkozyklus  $\in D^r$  hat.  $Y^2(\mathfrak{S}_0)$  ist eine gewisse durch  $\mathfrak{S}_0$  bestimmte Kohomologiekategorie aus  $V^2(B, \pi^1(I_1))$ , die für  $r > 2$  nicht von der speziellen Wahl von  $\mathfrak{S}_0$  abhängt. Dabei ist  $I_1$  die Untergruppe der Transformationen aus  $\Gamma$ , die einen gewissen Punkt  $q \in C$  fest lassen.  $I_1$  wird als zusammenhängend vorausgesetzt. Schließlich ist die Paarung der Koeffizientengruppen für das Cupprodukt  $D^r \cup Y^2(\mathfrak{S}_0)$  geeignet zu erklären. Aus dem Satz folgen insbesondere die Ergebnisse von Hopf (dies. Zbl. 39, 399) über Felder von tangentialen Flächenelementen in vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten.

E. Burger.

Kundert, E. G.: A relation between poles and zeros of a simple meromorphic differential form and a calculation of Chern's characteristic classes of an algebraic variety. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 893—895 (1952).

$M_n$  sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von  $n$  komplexen Dimensionen.  $\alpha$  sei eine meromorphe Differentialform vom Grade 1, d. h.  $\alpha$  wird lokal in der Form  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dz_i$  gegeben, wo die  $a_i$  lokale meromorphe Funktionen sind. Durch  $\alpha$  wird ein Feld von komplexen Linienelementen gegeben, das unter gewissen Voraussetzungen nur endlich viele Singularitäten (Nullstellen) hat. Jede dieser Nullstellen hat eine bestimmte Vielfachheit (Index). Der Index ist ein Element von  $\pi_{2n-1}(P_{n-1})$ , wo  $P_{n-1}$  der komplexe projektive Raum ist, und kann deshalb als ganze Zahl betrachtet werden. Verf. bestimmt die Indexsumme  $C(\alpha)$ ;  $C(\alpha) \in H^{2n}(M_n, \mathbb{Z})$ . — Das Linienelementfeld trägt außerhalb eines gewissen  $2n-2$ -dimensionalen Zyklus  $s(\alpha)$  das Vektorfeld  $(a_1, \dots, a_n)$ , wobei  $s(\alpha)$  durch die Pole der einzelnen  $a_i$  und durch die gemeinsamen Teiler aller  $a_i$  (mit wohlbestimmten Vielfachheiten) gegeben wird.  $S(\alpha)$  sei dual zu  $s(\alpha)$ ,  $S(\alpha) \in H^2(M_n, \mathbb{Z})$ . Die covariante Chernsche Klasse der komplexen Dimension  $k$  werde mit  $\Gamma_{n-k+1}$  bezeichnet. Man hat den folgenden Zusammenhang zwischen  $S(\alpha)$  und  $C(\alpha)$ :

$$C(\alpha) = S^n(\alpha) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{n-k+1} S_{(\alpha)}^{n-k}.$$

Diese Formel ist eine Anwendung des Satzes V in der Arbeit des Verf. über Schnittflächen in speziellen Faserungen (dies. Zbl. 43, 174). Man vgl. auch eine demnächst in Crelles Journal erscheinende Arbeit des Ref. — Das Theorem II des Verf. in der vorliegenden Arbeit enthält, jedenfalls in der angegebenen Form, einen Irrtum, der wohl auf ein Versehen in der Deutung des „Differenzen-Cozyklus“ zurückzuführen ist.

F. Hirzebruch.

Moise, Edwin E.: Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. Ann. of Math., II. Ser. 56, 96—114 (1952).

Teil IV siehe dies. Zbl. 47, 168. Das wichtige Ergebnis der Arbeit ist der Nachweis der sog. Hauptvermutung über den Zusammenhang von stetigkeitstopologischer und kombinatorischer Äquivalenz für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Es wird gezeigt, daß einerseits jede 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, d. h. ein separabler metrischer Raum, dessen Punkte je Umgebungen besitzen, die zum euklidischen 3-dimensionalen Raum homöomorph sind, triangulierbar ist und daß andererseits zwei Simplicialzerlegungen derselben Mannigfaltigkeit kombinatorisch äquivalent sind. Hieraus folgt insbesondere, daß die kombinatorische Klassifikation der Linsenräume mit Hilfe der Torsion auch eine stetigkeitstopologische ist. — Weitere Ergebnisse beziehen sich auf Kurven und Flächen in 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $K$ . Ist  $S$  eine Untermenge von  $K$ , welche zu einem Produkt aus einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Strecke homöomorph ist, dann gibt es in  $S$  ein Polyeder  $P$ , welches zu  $M$  homöomorph ist und  $S$  in zwei offene Punktmengen zerlegt und die beiden Bestandteile des Randes von  $S$  trennt. Dadurch werden alle Heegaarddiagramme auf stückweis lineare zurückführbar. — Eine Kurve  $L$  von  $K$  ist „im kleinen glatt“ eingebettet, wenn sich in einer Umgebung  $U$  von  $L$  eine topologische Abbildung  $f$  in  $K$  erklären läßt, die  $L$  in ein Polygon von  $K$  überführt. Die Kurve  $L$  heißt glatt eingebettet, wenn  $f$  eine topologische Selbstabbildung von  $K$  ist. Es wird gezeigt, daß im kleinen glatte Kurven auch glatt sind und daß eine einfach geschlossene Kurve des euklidischen Raumes, welche sich mit einer Umgebung so abbilden läßt, daß sie selbst dabei in ein Polygon übergeht, sich in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung in ein Polygon deformieren läßt. Aus diesen Sätzen über Kurven folgt, daß die Klassifikation der Linsenräume nach Fox stetigkeitstopolo-

gisch invariant ist, und zwar ohne Benutzung der Hauptvermutung. — Der Beweis der Hauptvermutung beruht auf zwei Sätzen. Der erste sagt, daß ein Zerlegungskomplex einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine kombinatorische Mannigfaltigkeit ist. Der Beweis ist einfach, aber die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen ist noch offen. Der zweite Satz wurde seinerzeit von Nöbeling ausgesprochen und wird hier in folgender Einschränkung bewiesen: Sind  $K$  und  $K'$  triangulierte 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, ist  $U$  eine offene Menge in  $K$ ,  $f$  eine topologische Abbildung von  $K$  in  $K'$  und  $\varphi$  eine stetige reelle Funktion, deren Definitionsbereich  $U$  enthält und in  $U$  positiv ist, dann gibt es einen Homöomorphismus  $f'$  von  $U$  in  $K'$ , so daß  $f'$  stückweis linear für jedes endliche Polyeder in  $U$  ist und daß für jeden Punkt  $p$  von  $U$  der Abstand von  $f(p)$  und  $f'(p)$  kleiner als  $\varphi(p)$  ist. Der Beweis dieses Satzes ist die wesentliche Schwierigkeit. Er beruht auf einem Lemma über die Zusammenfügung von zwei stückweis linearen Approximationen eines Homöomorphismus je in zwei Teilmannigfaltigkeiten  $K_1$  und  $K_2$  von  $K$  zu einer stückweis linearen Approximation in  $K$ . *K. Reidemeister.*

**Keller, Ott-Heinrich:** Zur unmittelbaren Anschaubarkeit 4-dimensionalen Gegenstände: Ein anschaulares singularitätenfreies topologisches Modell der projektiven Ebene im  $R_4$ . Math. Nachr. 8, 179—183 (1952).

Anknüpfend an Thesen von Hamel (dies. Zbl. 42, 5) zeigt Verf., wie man gewisse vierdimensionale Gegenstände der Anschauung zugänglich machen kann. In einem dreidimensionalen Teilraum des  $R_4$  wählt er ein Polygon (ein Quadrat mit einem aufgeklappten Viertel) und ein eingespanntes Elementar-Flächenstück; in einem parallelen dreidimensionalen Teilraum betrachtet er ein kongruentes Polygon und spannt ihm ein einseitiges Flächenstück ein. Verbindet man entsprechende Ecken und Kanten der beiden Polygone, so erhält man eine singularitätenfreie geschlossene Polyederfläche  $Z$ , welche zur projektiven Ebene homöomorph ist. Durch Fortsetzung des Konstruktionsgedankens gelangt Verf. zu geschlossenen nicht-orientierbaren Flächen höheren Geschlechts. Ferner sieht man, daß es einen dreidimensionalen Komplex  $K$  gibt, den  $Z$  nur mod 2, nicht orientiert, berandet. Schließlich wird eine mit dem Rand von  $K$  verschlungene Kurve angegeben, von der man erkennt, daß sie  $K$  in genau einem Punkte schneidet. *F. Bachmann.*

### Angewandte Geometrie:

**Krakowski, V.:** Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser. Elemente Math. 7, 85—87 (1952).

Nachweis elementarer Beziehungen, mittels der die Rytzsche Achsenkonstruktion auf eine von der üblichen Methode verschiedene Art und Weise abgeleitet werden kann. *H. Horninger.*

**Müller, Alfred:** Die Schaubarkeit in der Axonometrie. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 100, Nr. 3, 22 S. (1952).

Zusammenfassung der bekannten Regeln, die bei Herstellung axonometrischer Bilder zu beachten sind. Illustrierung der — z. T. recht trivialen — Feststellungen durch Nomogramme und Tabellen. *H. Horninger.*

**Bereis, R.:** Perspektiver Schnellriß. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 265—273 (1952).

Durch projektive Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschnideverfahrens gewinnt man aus zwei linearen Bildern eines Objektes  $K$  unter gewissen Voraussetzungen ein lineares Bild  $K^s$ . Verf. beschäftigt sich vor allem mit denjenigen Sonderfällen, in denen  $K^s$  ein unmittelbarer Zentralriß wird; seine Grundidee besteht darin, die Ausgangsrisse von  $K$  derart affin zu verändern, daß  $K^s$  die gewünschte Bedingung erfüllt. Hierbei ergeben sich u. a. interessante Beziehungen zwischen Kombinationen elementarer Darstellungsmethoden und dem Schnellrißverfahren des Verf. *H. Horninger.*

**Bereis, Rudolf:** Über die Böschungslinien auf Drehquadriken. Monatsh. Math. 56, 344—351 (1952).

Auf einer Fläche  $\Phi$  berühren die Linienelemente einer bestimmten Richtung  $l$  in Punkten der Eigenschattengrenze  $i$  von  $\Phi$  für  $l$  als Lichtrichtung. Ist  $\Phi$  eine Drehfläche (Achse  $z$ ), so bilden diese Eigenschattengrenzen  $i$  für Lichtrichtungen  $l$ , die gegen  $z$  fest geneigt sind ( $\angle z =$



$\pi/2 - \alpha$ ) eine Drehschar. Die Grundrisse der Eigenschaftengrenzen  $i$  sind dabei Isoklinen für das Richtungsfeld der Grundrisse der  $\alpha$ -Böschungslinien von  $\Phi$ . Für Mittelpunktstrehflächen 2. Ordnung sind diese Eigenschaftengrenzen Drehscharen von Ellipsen oder Hyperbeln, deren eine Achse der jeweiligen Lichtrichtung  $i$  im Grundriß parallel ist. Nach A. Mannheim [J. École polytechn. **40**, 205—230 (1863)] bilden nun die Isoklinen einer Drehschar konzentrischer Zykloiden eine konzentrische Drehschar von Ellipsen, deren eine Hauptachse der Isoklinenrichtung parallel ist. Analog bilden die Isoklinen einer Drehschar konzentrischer Pseudozykloiden (d. s. Hyperzykloiden oder Parazykloiden) eine Drehschar konzentrischer Hyperbeln, deren eine (d. h. imaginäre bzw. reelle) Achse der Isoklinenrichtung parallel ist. Daraus folgt auf neuem Wege das bekannte Ergebnis: Die Grundrisse der Böschungslinien von Drehquadranten mit lotrechten Drehachsen sind Zykloiden oder Pseudozykloiden (oder deren Grenzformen).

K. Strubecker.

Wunderlich, Walter: Über die Torusloxodromen. Monatsh. Math. **56**, 313—334 (1952).

Die erste geometrische Erzeugungsweise der Loxodromen der Ringfläche stammt von E. Müller [Arch. Math. Phys. **26**, 73—96 (1917)], der diese Kurven durch Winkelstreckung aus den schiefen Loxodromenkreisen der Ringfläche gewinnt. Eine tieferdringende Untersuchung der Torusloxodromen hat Ref. (dies. Zbl. **2**, 283) gegeben, der sie als Bilder von Schraublinien eines dreidimensionalen sphärischen Raumes deutet. Die vorliegende ausführliche Untersuchung der Torusloxodromen berücksichtigt alle drei möglichen Typen des Torus und bedient sich zur Ermittlung ihrer Eigenschaften fallweise der günstigsten Deutungen, Verwandtschaften und Projektionsmethoden. Die Loxodromen des Spindel- oder Apfeltorus hängen durch Inversion mit den Kegelloxodromen, jene des parabolischen Grenzfalles ebenso mit den Zylinderloxodromen zusammen. Die Loxodromen des Ringtorus führen durch Zentralprojektion aus einem Punkte der Torusachse  $z$  auf einen zu  $z$  coaxialen Drehzylinder zu Bildkurven, die bei Verebnung des Zylindermantels zu Sinuslinien werden. Durch diese „Zylinderprojektion“ ergibt sich auch ein bequemer Konstruktionsweg für diese Kurven. — G. T. Bennett [Engineering **76**, 777—778 (1903) und Proc. London math. Soc. **13**, 151—173 (1914)] hat entdeckt, daß ein räumliches windschiefes Parallelogramm ( $OA = BP - a$ ,  $OB = AP - b$ ), dessen Arme gelenkig sind, zwangsläufig beweglich ist. Man kann dieses Bennetsche Isogramm durch gewundene Lamellen realisieren, deren Windungen durch die Schränkwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben sind, wobei  $\sin \alpha : \sin \beta = -a : b$  ist. Wählt man  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = -\arcsin b/a$ , so entsteht bei Festhalten von  $O$  und der Knotenebene  $[OAB]$  ein Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden, bei dem  $P$  einen Torus mit der Achse  $z$  beschreibt. Hält man den Arm  $OA$  fest, so beschreibt  $P$  einen Meridiankreis des Torus, hält man  $OB$  fest, so beschreibt  $P$  einen Loxodromenkreis, werden die Nachbararme  $OA$ ,  $OB$  mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten angetrieben, so beschreibt  $P$  eine allgemeine Ringflächenloxodrome. — Die Tangenten und Schmiegeebenen einer Torusloxodrome berühren ein coaxiales Drehhyperboloid, das dem Torus längs zweier Parallelkreise angeschrieben ist. Deutet man mit K. Strubecker (l. c.) die Torusloxodromen als Schraublinien eines sphärischen Raumes und wendet man auf diese Deutung die Darboux'sche Transformation an, so erhält man nichteuklidische Schraublinien. Bei geeigneter konformer Deutung erscheint der Torus auch als nichteuklidischer Drehkegel, seine Loxodromen als nichteuklidische Kegelloxodromen; durch Darbouxtransformation ergeben sich dann die projektiven nichteuklidischen Kegelloxodromen. Schon an anderem Orte (dies. Zbl. **46**, 395) hat Verf. bemerkt, daß die Torusloxodromen mit den  $D$ -Linien des Torus (deren Schmiegkugeln den Torus berühren) identisch sind. Dies wird nochmals bewiesen, und es werden die nichteuklidischen und euklidischen Planevoluten studiert, welche den Torusloxodromen weitgehend analog und beim Ringtorus selbst affine Ringloxodromen sind.

K. Strubecker.

## Theoretische Physik

### Mechanik:

Šul'gin, M. F.: Ein Satz über die Eigenschaften der Integrale der dynamischen Gleichungen S. A. Čaplygins. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 899—902 (1952) [Russisch].

Considérons un système conservatif non-holonomie  $S$  à  $n$  degrés de liberté  $q_i$  dont les liaisons non holonomes s'expriment au moyen de relations:

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=1}^n B_{\nu\mu} \dot{q}_\nu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Les  $q_1, q_2, \dots, q_m$  ne figurent, par hypothèse, ni dans les  $B_{\nu\mu}$ , ni dans la force vive (qui dépend, bien entendu, des  $\dot{q}_\mu$ ) ni dans la fonction de forces. L'A. a donné

(ce Zbl. 41, 525) une méthode de réduction à la forme de Lagrange des équations de mouvement de  $S$  qui revient à introduire des variables auxiliaires. La connaissance d'une intégrale première de ce système et d'une intégrale première du système de Čaplygin des équations du mouvement de  $S$  peut alors donner une troisième intégrale première des équations du mouvement; cela constitue une extension du résultat classique de Poisson, utile dans divers problèmes particuliers. *J. Krawčenko.*

**Zeuli, Tino:** Sistemi dinamici corrispondenti con forze funzioni lineari delle velocità. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 86, 59—81 (1952).

Es werden — im Sinne von Painlevé — „entsprechende“ dynamische Systeme betrachtet, für welche die Kräfte lineare Funktionen der Geschwindigkeiten sind, und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz dieser Systeme aufgestellt. Daraus werden jene Systeme bestimmt, die quadratische Integrale vom bekannten Typus zulassen. *Th. Pöschl.*

**Graffi, D.:** Sul problema dei due corpi di massa variabile. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 23—33 (1952).

Anknüpfend an frühere Arbeiten über das Zweikörperproblem bei zeitlich veränderlicher Gesamtmasse  $M(t)$  (dies. Zbl. 9, 89) geht Verf. von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $\varepsilon(t)$ ,  $u(t)$ ,  $w(t)$  und der Keplerschen Gleichung  $2\pi w = u - \varepsilon \sin u$  aus. Dabei ist  $\varepsilon$  die Exzentrizität,  $u$  anomale Exzentrizität,  $w$  mittlere Anomalie; in den Differentialgleichungen treten noch die Flächenkonstante  $c$  und  $a(t) = \log [k \cdot M(t)]$  auf ( $k$  als Gravitationskonstante). Die mühsame Diskussion der Gleichungen unter Berücksichtigung der Größenverhältnisse ergibt eine neue obere (besonders bei kleinen Exzentrizitäten nützliche) Schranke für die Änderungen der Exzentrizität bei Änderungen der Massen. Insbesondere können kleine Änderungen der Exzentrizität mit sehr großen Änderungen der Massen verträglich sein. *L. Collatz.*

**Volpato, Mario:** Una osservazione sulle approssimazioni della soluzione del problema dei due corpi di massa variabile. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII, 1, 35—46 (1952).

L'A. riprende, modificandola lievemente, un'equazione differenziale, proposta dall'Armellini (questo Zbl. 17, 284), per il problema dei due corpi di massa variabile e con piccola eccentricità dell'orbita. Di questa equazione ricava una soluzione approssimata, valida per masse lentamente variabili, come risulta da un valore maggiorante ottenuto dall'A. per l'errore commesso con questa approssimazione. Ritrova così, per via completamente diversa e sotto condizioni molto più larghe, risultati di L. Michelacci [Commentationes Pontificia Acad. Sci. 8, 1—12 (1944)].

*D. Graffi.*

**Grioli, Giuseppe:** Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 256—277 (1952).

Beim allgemeinen Kreisel wird die Frage gestellt, ob es Bewegungen gibt, bei denen der Vektor des Drehimpulses sich aus zwei Bestandteilen zusammensetzt, einem, dessen Achse im Raum fest ist, und einem mit fester Achse im Körper. Es wird erstens bewiesen, daß unmöglich beide Bestandteile konstant sein können. Zweitens wird der Fall näher untersucht, daß nur der erste Bestandteil von Null verschieden ist. Dazu gehört auch der Fall von Mlodziejowski. *G. Hamel.*

**Stoppelli, Francesco:** Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 25—43 (1952).

L'A. considera un solido con un punto fisso  $O$ , inizialmente posto in rotazione, con fortissima velocità angolare  $r_0$ , intorno ad un'asse  $a$  di rotazione permanente stabile, individuato dal vettore unitario  $k$ . Supposto il solido soggetto ad una forza  $F$ , applicata in  $Q$ , l'A. dimostra che gli angoli di Eulero della terna principale

d'inerzia, relativa ad  $O$ , si possono calcolare, a meno di termini di ordine superiore a  $1/r_0$ , partendo dall'equazione:  $C r dk/dt = M^*$  dove  $M^*$  è il momento di  $F$  applicato nella proiezione ortogonale di  $Q$  su  $a$ , e  $C$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad  $a$ ,  $r$  una costante calcolabile mediante  $r_0$ ,  $C$  ed il momento di  $F$ . *D. Graffi.*

**Lovera, Piera:** Sopra un problema dinamico studiato dal Volterra. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **86**, 100—106 (1952).

Con semplici metodi vettoriali l'A. deduce il teorema delle forze vive e le equazioni di Volterra per un sistema di punti materiali a vincoli (olonomi o anolonomi) per cui le velocità dei punti siano funzioni lineari e omogenee di alcuni parametri indipendenti. *D. Graffi.*

**Capon, R. S.:** Hamilton's principle in relation to nonholonomic mechanical systems. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 472—480 (1952).

When one says that Hamilton's principle is valid in non-holonomic systems this signifies that the integral  $\int L dt$  extended to an arc of an actual path is stationary in a certain sense; this meaning that the varied paths are to be derived from the actual one by displacements compatible with the constraints. In general these varied paths do not themselves satisfy the constraints and therefore do not correspond to a possible motion of the system. There is therefore a wide departure from the usual methods of the calculus of variations in which only paths satisfying the constraints are allowed. In the present paper the author takes this latter point of view showing that in general the principle does not hold anymore. Certain rolling motions are considered, examples being given of paths which satisfy and paths which do not satisfy Hamilton's principle. *M. M. Peixoto.*

**Aržanych, I. S.:** Bedingungen für die Anwendbarkeit der Potentialmethode zur Integration der Bewegungsgleichungen von nichtholonomen konservativen Systemen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **87**, 15—18 (1952) [Russisch].

Verf. leitet folgendes Theorem her: Damit ein nichtholonomes konservatives System mit den Verknüpfungen  $\sum_{\nu=1}^n A_{\nu\varrho} \cdot \delta q_{\nu} = 0$ ;  $\varrho = 1, 2, \dots, r < n - 1$ , die „Potentialmethode“ zuläßt (d. h. daß sein Impulsfeld ein Potential  $W$  hat), ist notwendig und hinreichend, daß das System der partiellen Differentialgleichungen

$$(A) \quad \sum_{\nu=1}^n G_{\lambda\nu} \frac{\partial W}{\partial q_{\nu}} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, l,$$

$$(B) \quad H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} + \sum_{\varrho=1}^r M_{\varrho} A_{\varrho 1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n} + \sum_{\varrho=1}^r M_{\varrho} A_{\varrho n}) = h$$

miteinander vereinbar ist.

*K. Borkmann.*

**Nadile, Antonio:** Problemi dinamici dei sistemi anolonomi pei quali esiste un potenziale cinetico. *Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena* **5** (1950—51), 66—71 (1952).

Es wird gezeigt, daß sich die Gleichungen für dynamische Probleme mit nicht-holonomen Koordinaten ( $\omega_i$ ), in denen ein kinetisches Potential existiert, in der bekannten, zuerst von G. Hamel angegebenen Form darstellen und aus einem Variationsproblem ableiten lassen, das dem Hamiltonschen Prinzip entspricht. Auch wenn die äußeren Kräfte aus einem generalisierten Potential vom Typus  $V(q, \omega, \dot{\omega}, t)$  ableitbar sind, läßt sich eine ähnliche Beziehung herstellen. Schließlich wird gezeigt, daß sich für alle diese Fälle die Bewegungsgleichungen in die kanonische Form bringen lassen. *Th. Pöschl.*

**Nadile, Antonio:** Equazioni miste del moto dei sistemi anolonomi. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **7**, 302—306 (1952).

Verf. geht aus von den Gleichungen, die er 1950 (dies. Zbl. **40**, 105) aufgestellt hat. Sie entstehen unmittelbar durch Zusammenfassung der Lagrangeschen Gleichungen gemäß den vorgeschriebenen nichtholonomen Bedingungen, enthalten also



noch alle Geschwindigkeiten. In diesen Gleichungen führt er nun eine Transformation aus, die der Routhschen des holonomen Falles entspricht. Sonderfälle, insbesondere der Fall zyklischer Koordinaten, werden betrachtet. *G. Hamel.*

**Dobronravov, V. V.: Über einige Fragen der Mechanik nicht-holonomer Systeme.** Priklad. Mat. Mech. **16**, 760—764 (1952) [Russisch].

Der Artikel befaßt sich mit Einwendungen, die Ju. I. Nejmark (Neumark) und N. A. Fufuev (dies. Zbl. **41**, 203) gegen eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **22**, 31) erhoben hatten. Bei holonomen Systemen gilt die Vertauschbarkeit von Differentiation und Variation:  $d\delta x^i = \delta dx^i$ . Bei nicht-holonomen Systemen können diese Beziehungen nicht vollständig gelten. Verf. bezeichnet aber als „abgeschlossene nicht-holonome Systeme“ solche Systeme, für die die Koeffizienten der Verknüpfungsgleichungen, die Koeffizienten der lebendigen Kraft und die Kraft-Funktion der aktiven Kräfte nicht von den abhängigen Koordinaten abhängen. Für diese gelten die Bedingungen  $d\delta x^i = \delta dx^i$  nur für die unabhängigen Koordinaten, weiterhin gilt für solche Systeme, ebenso wie für holonome Systeme, auch das Theorem von Hamilton-Jacobi. — Das erste der von Nejmark und Fufuev angeführten Gegenbeispiele ist nicht beweiskräftig, da es die Bedingung der „Abgeschlossenheit“ nicht erfüllt. Bei dem zweiten Beispiel ist diese Bedingung erfüllt, und es gilt auch das Theorem von Hamilton-Jacobi (in der früheren Arbeit lag lediglich ein Druckfehler in einer Zwischenformel vor, mit der Nejmark und Fufuev weitergearbeitet hatten und ihre Einwendungen begründeten). *K. Borkmann.*

**Ziegler, Hans: Zum Begriff des konservativen Systems.** Elemente Math. **7**, 121—129 (1952).

An exposition of the concept of conservative system with emphasis on certain such systems called gyroscopic, in which there may occur forces depending on the velocities. *M. M. Peixoto.*

• **Ziegler, Hans: Mechanik. Band III: Dynamik der Systeme.** (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften. Band 7.) Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 396 S. Ganzleinen geb. Fr. 46,80; brosch. Fr. 42,65.

Nachdem Verf. vor einigen Jahren zwei Bände seiner elementaren Mechanik (Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper; Dynamik der starren Körper) verfaßt hatte, schließt er mit dem vorliegenden dritten Band diese Lehrbuchreihe ab, wobei zugleich der Übergang zur höheren Mechanik vorbereitet wird. Im ersten Kapitel stehen die Lagrangeschen Gleichungen im Vordergrund, welche heute an vielen deutschen Technischen Hochschulen, ebenso wie an der Technischen Hochschule Zürich, an welcher Verf. die Mechanik vertritt, zum Rüstzeug des Ingenieurs gehören. Im zweiten Kapitel bilden Schwingungsprobleme mit endlichem und unendlich hohem Freiheitsgrad den Gegenstand der Betrachtung, während das dritte Kapitel den Grundgleichungen des Kontinuums, insbesondere der Elastostatik, der Elastodynamik und der Hydrodynamik gewidmet ist. Der Stoff der letzten beiden Kapitel bezieht sich offenbar auf Vorlesungen für Studierende der höheren Semester. Das Buch läßt vom theoretischen Standpunkt aus eine geschickte deduktive Lehrmethode erkennen. Allerdings macht sich der Mangel an Aufgaben und Anwendungsbeispielen nachteilig bemerkbar. *H. Neuber.*

**Krejn, M. G.: Über einige neue Probleme der Schwingungstheorie Sturmscher Systeme.** Priklad. Mat. Mech. **16**, 555—568 (1952) [Russisch].

The problem is the determination of the masses and distribution of  $n$  particles on a light stretched string from the  $n$  characteristic frequencies, the ends being either fixed or free to move transversely. Formulae are established for the unique string with given spectrum and bearing least total mass. For example if both ends are fixed and the spectrum is  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ , the minimum mass is

$$4 \sum_{j=1}^{(n+1)/2} \mu_{2j-1}^{-2} |Q'(\mu_{2j-1})|^{-1} \quad \text{where} \quad Q(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_j}\right)$$

and this is attained by the unique symmetrical system. There are similar results when one or both ends are free. The proof uses continued fractions. Other topics discussed, but less completely, are bounds for the first few characteristic numbers, and the case of an infinite number of particles. *F. V. Atkinson.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** An inequality for the amplitudes and areas in vibration diagrams of time-dependent frequency. *Quart. appl. Math.* 10, 175—176 (1952).

Bei Schwingungsvorgängen mit veränderlicher Frequenz läßt sich aus gewissen Ungleichungen eine besondere Ungleichung für die Größe der Amplitude und die im Schwingungsdiagramm auftretende Fläche angeben. *H. Neuber.*

**Szebehely, Victor G.:** On the problem of three bodies in a plane. *Math. Mag.* 26, 59—66 (1952).

Introducing a certain set of generalized coordinates, the plane problem of three bodies is directly reduced to a 4th order system. The special case where the masses are equal and the attractions proportional to the cube of the distances is then considered in detail, two sets of solutions being obtained. *M. M. Peixoto.*

**Lemaître, G.:** Coordonnées symétriques dans le problème des trois corps. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 38, 582—592 (1952).

By means of suitable changes of variables the plane problem of three bodies with equal masses is shown to be equivalent to the problem of the movement of a point, in spherical coordinates, subject to the action of a force function and of a vector potential. For the general problem of three bodies an expression of the hamiltonian is given which generalizes a result obtained in the particular case considered above. *M. M. Peixoto.*

**Merman, G. A.:** Über ein Kriterium für die Realisierbarkeit einer hyperbolisch-elliptischen Bewegung im Dreikörperproblem. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 85, 727—730 (1952) [Russisch].

Chilmi [Doklady Akad. Nauk SSR, n. Ser. 78, 653—656 (1951)] a fait connaître un critère suffisant pour assurer l'existence du mouvement du type hyperbolo-elliptique dans le problème des trois corps. L'A. indique un autre critère, plus faible, dont les avantages sont mis en évidence en discutant l'exemple de captation de O. Schmidt. *J. Kravtchenko.*

**Paleček, E. M.:** Die angenäherte Integration der Gleichungen der äußeren Ballistik mit der Methode S. A. Kazakovs nach vertikalen Parametern. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 505—510 (1952) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 180) hatte Verf. gezeigt, wie sich die Bahnrechnung gestalten kann, wenn man sich der Bahnneigung  $p$  oder der Horizontalgeschwindigkeit  $u$  als unabhängiger Veränderlicher an Stelle der Zeit  $t$  oder der Horizontalentfernung  $x$  bedient. Für sehr steile Schüsse aber (Flak) sind alle diese Parameter (außer  $t$ ) schlecht als Unabhängige geeignet, da sich über ihnen die anderen Größen zu schnell ändern. Deshalb betrachtet Verf. hier die beiden Gleichungssysteme, die bei Verwendung der Flughöhe  $y$  oder der Vertikalgeschwindigkeit  $w$  als unabhängiger Veränderlicher auftreten. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung kommt er auf ein Näherungsverfahren etwa zweiter Ordnung zur Berechnung der Intervall-Endwerte aus den Anfangswerten. Zur Bestimmung von  $x$  erweist sich die Mitbenutzung der ersten Ableitungen des Integranden an den Intervallgrenzen nach der Euler-Maclaurinschen Formel als günstig. Bei den beiden Verfahren sind neben den Tafeln für den Luftwiderstand noch Hilfstafeln für einige der Integrale  $F_{m,n}(z) = \int_0^1 v^m (1-zv)^{-n} dv$  erforderlich ( $m, n \leq 3$ ). Mit Schrittgröße<sup>n</sup> von etwa 2,5 km in  $y$  oder 100 m/s in  $w$  erhält man dann etwa 6 Bahnpunkte. *U. T. Bödewadt.*

## Elastizität. Plastizität:

**Giovannozzi, Renato:** Sul comportamento statico e dinamico di un giunto elastico a caratteristica non lineare. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 86, 9—24 (1952).

**Pini, Bruno:** Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 21, 345—369 (1952).

L'A. si occupa del primo problema fondamentale della statica elastica che consiste, com'è noto, nel ricercare una soluzione in un'assegnato dominio limitato  $D$

della equazione vettoriale  $\Delta_2 u + K \text{ grad div } u = 0$ , avendo assegnato i valori di  $u$  sulla frontiera  $FD$  di  $D$ . — L'A. dopo avere accennato alle numerose soluzioni già date per questo problema, mostra come per esso possa anche applicarsi un metodo esistenziale dovuto a Cimmino (cfr. questo Zbl. 19, 263). Questo lo conduce a dover superare diverse difficoltà analitiche relative alla particolare equazione considerata. — In ciò consiste il maggior interesse del lavoro. *G. Fichera.*

**Grioli, G.: Integrazione del problema della statica delle piastre omogene di spessore qualunque.** Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 31–49 (1952).

Für die Platte aus isotrop-elastischem Werkstoff von konstanter, aber beliebiger großer Dicke, stellt Verf. durch Entwicklung der Spannungskomponenten nach Legendreschen Polynomen (in Richtung der von der Plattenmittelfläche ausgehenden, senkrecht zur Platte gerichteten Koordinate, innerhalb des durch die Dicke der Platte gegebenen Intervalles) ein Integrationsverfahren auf. Als Anwendungsbeispiel wird im Rahmen der ersten Näherung die frei aufliegende quadratische Platte mit gleichmäßiger Belastung durchgerechnet, wobei sich gegenüber dem von Nadai errechneten Durchbiegungswert nur eine Abweichung von 0,5% herausstellt.

*H. Neuber.*

**Grioli, Giuseppe: Sul problema di De Saint-Venant nei solidi cristallini.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 228–242 (1952).

Die Spannungsverteilung in prismatischen Stäben bei Biegung und Torsion (Problem von De Saint-Venant) führt im Falle der allgemeinen Anisotropie und bei beliebiger Querschnittsform auf Reihenentwicklungen, welche vom numerischen Standpunkt aus unvorteilhaft sind. Verf. legt im Rahmen des Näherungsprinzips von DeSaint-Venant eine auf den Eigenschaften des Mediums, jedoch nicht auf dem Theorem von Menabrea beruhende Integrationsmethode dar, wobei drei Symmetrieebenen des kristallinen Gefüges vorausgesetzt werden. Im Falle des elliptischen Zylinders wird gezeigt, wie die Spannungskomponenten sich ebenso wie bei Isotropie durch Polynome zweiten Grades darstellen lassen. *H. Neuber.*

**Grioli, Giuseppe: Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema continuo e per la deformazione di un corpo elastico in equilibrio.** Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 239–246 (1952).

Es werden Ungleichungen aufgestellt, welche sich auf die Spannungen beliebiger Kontinua beziehen. Für homogen-elastische Körper lassen sich hieraus Ungleichungen für Deformationen ableiten.

*H. Neuber.*

**Grioli, Giuseppe: Proprietà di media ed integrazione del problema dell'elastostatica isoterma.** Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 263–271 (1952).

Unter Ausnutzung der Eigenschaften des Mediums wird ein Näherungsverfahren zur Integration der elastischen Grundgleichungen für homogen-anisotrop-elastische Körper aufgestellt.

*H. Neuber.*

**Grioli, Giuseppe: Validità del teorema di Menabrea e integrazione del problema dell'elastostatica in casi non isotermi.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 202–208 (1952).

Es wird gezeigt, daß das Theorem von Menabrea, das sich auf Minimaleigenschaften des Spannungspotentials bezieht, nicht nur für isotherme Zustandsänderungen anwendbar ist, sondern — allerdings mit Einführung eines modifizierten Spannungspotentials — auch auf nicht-isotherme Belastungsvorgänge, insbesondere auf Probleme mit stationärem Wärmefluß und auf adiabatische Zustandsänderungen ausgedehnt werden kann. Gewisse, auf den physikalischen Eigenschaften des Mediums beruhende Ungleichungen, welche Verf. zur Aufstellung einer Methode der näherungsweise Integration der Gleichgewichtsbedingungen benutzt hatte, führen zu entsprechenden Folgerungen bei nicht-isothermen Zustandsänderungen.

*H. Neuber.*



**Tiffen, R.:** Boundary-value problems of the elastic half-plane. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 344—351 (1952).

Im Anschluß an vorhergehende Arbeiten von A. C. Stevenson [*Philos. Mag.*, VII. Ser. **34**, 766—793 (1943); *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **184**, 129—179, 218—229 (1945)], N. J. Muschelišvili [dies. Zbl. **5**, 358; **7**, 209; *Bull. Acad. Sci. Geogr. an S.S.R.* **2**, 873 (1941); *Some Problems of math. Theory of Elasticity*, 3. Aufl., Moskau 1949] u. a. werden mittels einer Kombination von Methoden der Potentialtheorie und der Fourierschen Reihen allgemeinere Ansätze zur Lösung von Problemen der Elastizitätstheorie gewonnen, die sich auf die unendliche Halbebene mit Belastung am freien Rande beziehen. Dabei können entweder die Spannungen oder die Verschiebungen gegeben sein. Als Beispiele werden Dreieckslasten und krummlinig verlaufende Verschiebungen am freien Rande betrachtet. Literaturhinweise.

*Th. Pöschl.*

**Tiffen, R.:** Solution of two-dimensional elastic problems by conformal mapping on to a half-plane. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 352—360 (1952).

In Erweiterung der in der vorhergehenden Note gegebenen Ansätze (siehe vorsteh. Referat) werden Probleme behandelt, die sich daraus durch konforme Abbildung ergeben, wobei die gradlinige Begrenzung der Halbebene in eine krummlinige übergeht. Als Beispiel wird ein Material mit parabolischer Begrenzung betrachtet, die in verschiedener Weise belastet sein kann.

*Th. Pöschl.*

**Stephens, Kathleen M.:** A boundary problem in orthotropic generalized plane stress. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 206—220 (1952).

Für die Spannungsverteilung in orthotropen Scheiben mit einem Loch nach Art eines abgerundeten Dreiecks wird die Lösung mit Hilfe komplexer Funktionen angegeben. Mit Bezug auf zwei besondere Holzarten wird die Größe der maximalen Spannung für Zug- und Schubbeanspruchung berechnet. Auch der Fall des allseitigen Zuges wird erörtert.

*H. Neuber.*

**Soljanik-Krassa, K. V.:** Zur Lösung des axialsymmetrischen Problems der Elastizitätstheorie. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **86**, 481—484 (1952) [Russisch].

Die Gleichgewichtsgleichungen des achsensymmetrischen Zustandes in Zylinderkoordinaten  $r, z$  werden bekanntlich erfüllt, wenn man die Dilatation  $\vartheta$  und die Drehung  $\omega$  in der Form

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

durch Lamésche Konstanten und eine Verschiebungsfunktion  $\varphi$  ausdrückt, welche letztere der Gleichung

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügen muß. Verf. führt nun eine zusätzliche Verschiebungsfunktion  $\Phi$  ein, die die Gleichungen  $\nabla \nabla \Phi = 0$  und  $\nabla \Phi = [1/(1-\nu)] \partial^2 \varphi / \partial z^2$  ( $\nu$  — Poissonsche Konstante) zu befriedigen hat. Nun lassen sich alle vier Spannungskomponenten und somit auch die Grenzbedingungen an der rotationssymmetrischen Oberfläche des Körpers durch  $\varphi$  und  $\Phi$  ausdrücken. Unter Anwendung dieser Theorie und Einführung elliptischer Koordinaten löst schließlich Verf. das Problem der Spannungskonzentration um einen kleinen ellipsoidalen Hohlraum innerhalb einer gleichmäßig belasteten Kreisplatte.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Szabó, István:** Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten schweren dicken Kreisplatte. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 359—371 (1952).

Verf. führt seine Untersuchungen (dies. Zbl. **44**, 394, 2. Ref.) über das im Titel angegebene Problem unter genauer Berücksichtigung der Massenkkräfte weiter. Dabei werden die zwischen Platte und Unterlage auftretenden Schubspannungen als Reibungskräfte im Sinne des Reibungsgesetzes von Coulomb erfaßt. Der Auf-

fassung des Verf., daß die übliche Berücksichtigung des Eigengewichts als einer gleichmäßig verteilten äußeren Last bei Fundamentalplatten „sicherlich eine sehr rohe Näherung“ darstelle, vermag Ref. sich nicht anzuschließen. Diese Behauptung wird in der vorliegenden Arbeit auch nirgends bewiesen. *R. Gran Olsson.*

**Yu, Yi-Yuan:** Heavy disk supported by concentrated forces. Quart. appl. Math. 10, 280—284 (1952).

In Anlehnung an eine bemerkenswerte Arbeit von Muschelišvili (dies. Zbl. 7, 209) untersucht der Verf. die am Rande durch Einzelkräfte unterstützte schwere Kreisscheibe. Das Gewicht wird durch das Gravitationspotential erfaßt. Die Gleichgewichtsbedingungen werden, wie üblich, durch die Spannungsfunktion befriedigt. Es handelt sich hier um ein schon oft behandeltes Problem, das nach Muschelišvili mit Hilfe der konformen Abbildung gelöst wird. Als Beispiele wurden folgende Fälle berechnet: Eine schwere Kreisscheibe, gestützt auf eine horizontale Ebene (Problem von Michel), und eine durch zwei lotrechte Einzelkräfte unterstützte Kreisscheibe.

*C. Torre.*

**Langhaar, H. L.:** Note on energy of bending of plates. J. appl. Mech. 19, 228 (1952).

Die Plattengleichung  $\Delta \Delta w = q/D$  ( $w$  = Durchbiegung,  $q$  = Querbeltung je Flächeneinheit,  $D$  = Plattensteifigkeit,  $\Delta$  = Laplacescher Operator) enthält die Poissonsche Zahl  $\nu$  nicht explizite, weil der Ausdruck  $2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)$ , der in der Formel für die gesamte potentielle Energie der Platte auftritt, die Eulerse Gleichung der Variationsrechnung identisch befriedigt (siehe z. B. I. S. Sokolnikoff, Tensor Analysis, p. 155—157, New York 1951). Dieser Umstand ist eine Folge der Tatsache, daß das Oberflächenintegral des obigen Ausdrucks in ein Linienintegral längs des Randes mit Hilfe des Gaußschen Theorems der Differentialgeometrie überführt werden kann. Fälle, in denen das Linienintegral wegen der natürlichen Randbedingungen der Platte verschwindet, sind in Einzelfällen in der Literatur erörtert [A. Nadai, Elastische Platten, Berlin 1925, S. 275; A. Stodola, Schweizerische Bauzeitung 63, 251 (1914)], aber offenbar nie von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus gesehen, so wie dies in der vorliegenden Note geschieht.

*R. Gran Olsson.*

**Chang, C. C. and H. D. Conway:** The Marcus method applied to solution of uniformly loaded and clamped rectangular plate subjected to forces in its plane. J. appl. Mech. 19, 179—184 (1952).

Verff. geben eine Lösung im Sinne kleiner Durchbiegungen einer gleichmäßig belasteten rechteckigen Platte mit vollkommen eingespannten Rändern, wenn die Platte außerdem gleichmäßiger Zug- oder Druckspannung längs der Ränder und in ihrer Mittelebene unterworfen wird. Da eine exakte Lösung des Problems nach Ansicht der Verff. kaum möglich ist, wurde das Verfahren von H. Marcus [Der Bauingenieur 17, 40—44 (1936) sowie Ann. des Ponts et Chaussées 107, 538—567 (1937)], zur angenäherten Lösung der biharmonischen Differentialgleichung  $\Delta \Delta w - \frac{P}{D} \Delta w = \frac{q}{D}$  herangezogen. ( $w$  = Durchbiegung,  $P$  = Belastung je Längeneinheit, als Zug positiv gerechnet,  $q$  = Querbeltung je Flächeneinheit,  $D$  = Plattensteifigkeit,  $\Delta$  = Laplacescher Operator). Die Randbedingungen sind  $w = 0$ ,  $w_x = 0$  für  $x = \pm a/2$ ,  $w = 0$ ,  $w_y = 0$  für  $y = \pm b/2$  mit  $a$  und  $b$  als Seitenlängen der Platte. Durchbiegungen sowie Momente der Biegung und Drillung einer quadratischen Platte sind für vier verschiedene Werte der Last  $P$  ausgerechnet. Bei der Rechteckplatte sind für sieben verschiedene Verhältnisse Länge/Breite und einen Wert  $P$  ebenfalls Durchbiegungen und Momente angegeben.

*R. Gran Olsson.*

Ufljand, Ja. S.: Eine Anwendung der Mellintransformation auf das Problem der Verbiegung einer dünnen, elastischen, keilförmigen Platte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 463—465 (1952) [Russisch].

Verf. zeigt, daß sich der Spannungszustand einer durch  $0 \leq r < \infty$  und  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = \alpha$  begrenzten dünnen keilförmigen Platte bei beliebig verteilter transversaler Belastung  $q(r, \vartheta)$  durch Anwendung der Mellinschen Umkehrformel aufbauen läßt. Die in der Arbeit mitgeteilten Ergebnisse beschränken sich auf den Fall einer auf der Winkelhalbierenden  $\vartheta = \alpha/2$  angreifenden Einzellast, wobei der eine Plattenrand  $\vartheta = \alpha$  als gelenkig gestützt, der andere  $\vartheta = 0$  entweder ebenfalls als gestützt oder aber als eingespannt angenommen wird.

S. Woinowsky-Krieger.

Eringen, A. Cemal: Ripple-type buckling of sandwich columns. J. aeronaut. Sci. 19, 409—417 (1952).

Das Ausknicken (Falten) mehrschichtiger Stäbe, Platten, Balken und Schalen hat — meist unter vereinfachenden Annahmen — seit etwa einem Jahrzehnt eine Reihe von Autoren beschäftigt. Verf. behandelt das Problem für den dreischichtigen dicken Balken mit orthotropem Kern bei axialer Druckbelastung und an den Enden angreifenden Momenten. Die mathematischen Entwicklungen stützen sich zum Teil auf eine frühere Arbeit des Verf. [Thesis for Ph. D. in appl. Mech. Polytechnic Inst. Brooklyn, June 1948, siehe auch J. appl. Mech. 18, 195—202 (1951)], die das entsprechende Randwertproblem für die orthotrope Mittelschicht behandelte; eine weitere ausführliche Darstellung des mathematischen Teils wird angekündigt. Im Gegensatz zu anderen Autoren kommt Verf. zu dem Ergebnis, daß die beiden Ränder einer jeden der äußeren Schichten weder eine symmetrische noch eine antisymmetrische, sondern eine asymmetrische (d. h. zur jeweiligen Schichtmitte nicht symmetrische) Gestalt annehmen werden. In einer Reihe von numerischen Beispielen wird die Abhängigkeit von den elastischen Konstanten und der Dicke der äußeren Schichten und des Kernes untersucht. Soweit experimentelles Material vorliegt, ergibt sich gute Übereinstimmung.

F. Reutter.

Alumjaë, N. A.: Über den kritischen Wert eines axialsymmetrischen, momentenfreien Spannungszustandes einer langen Katenoidschale. Priklad. Mat. Mech. 16, 649—658 (1952) [Russisch].

Author extends the previous work of Vlassov and Novoshilov on shells, treating the stability of axially symmetric shapes, free of moment, subjected to line loads. This subject has also been considered by Federhofer who assumed only axially symmetric deformations in investigating the instability of moment-free equilibrium.

M. P. White.

Weber, C.: Verhinderte Torsionsverwölbung. Z. angew. Math. Mech. 32, 305—307 (1952).

Das bekannte auf Timoshenko [Z. Math. Phys. 58, 361 (1910)] zurückgehende Verfahren zur Berechnung der Torsionsspannungen bei behinderter Verwölbung wird in einer neuen, auf der Extremaleigenschaft der Formänderungsenergie fußenden Form dargelegt.

H. Neuber.

Fröhlich, O. K.: Über eine einfache Anwendung der Potentialtheorie auf die Berechnung der Schiefstellung von Bauwerken. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1952, 47—53 (1952).

Die Ursachen der manchmal bei Bauwerken beobachteten Schiefstellung liegen entweder in Unregelmäßigkeiten des Baugrundes oder in einer exzentrischen Belastung der Gründungssohle. Der zweite Fall wird hier betrachtet. Dabei wird der „wirkliche“ Baugrund durch ein Modell ersetzt, das als elastisch-isotroper Halbraum angesehen wird. An ihrer ebenen Grenzfläche liegt eine starre kreisförmige Platte auf, die durch ein Moment belastet wird, dessen Vektor in der Plattenebene liegt. Die erhaltenen einfachen Gleichungen, die auf einer von J. Boussinesq angegebenen



Lösung beruhen, können zur Berechnung der Schiefstellung von gedruckenen Fundamenten von Türmen, Schornsteinen, Stütz- und Kaimauern u. dgl. dienen.  
*Th. Pöschl.*

**Yu, Yi-Yuan:** Gravitational stresses on deep tunnels. *J. appl. Mech.* **19**, 537—542 (1952).

Anwendung der Methode der Integration von zweidimensionalen Problemen der Elastizitätstheorie mittels komplexer Veränderlicher (nach Muschelišvili u. a.) auf das Problem der Spannungsbestimmung in einem Tunnel, der sich in einer großen Tiefe unter der waagerechten Grenzfläche befindet. Der Querschnitt des Tunnels wird in Form eines allgemeinen Ovaloids, eines Quadrats mit abgerundeten Ecken, eines Kreises oder einer Ellipse und das umgebende Material als elastisch und homogen angenommen. Zwei von diesen Problemen werden auch zahlenmäßig gelöst: In dem einen wird ein Tunnel ohne festen Rand (Haut) betrachtet, im zweiten ein Tunnel mit einer Haut, die mit dem umgebenden Material in fester Verbindung steht.  
*Th. Pöschl.*

**Lufe, A. I.:** Der Spannungszustand um einen ellipsoidförmigen Hohlraum herum. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **87**, 709—710 (1952) [Russisch].

Das Problem der Spannungskonzentration in der Umgebung eines ellipsoidalen Hohlraumes wurde erstmalig von M. Sadovsky und E. Sternberg (dies. Zbl. **33**, 314) unter Verwendung elliptischer Koordinaten und ausgiebiger Benutzung elliptischer Funktionen gelöst. Der Spannungszustand im Unendlichen wird dabei als gleichförmig vorausgesetzt. Verf. gelangt unter Verwendung rechtwinkliger Koordinaten zu einer einfacheren Lösung derselben Aufgabe. Hierbei wird der harmonische Vektor  $B$  und die harmonische Funktion  $B_0$  von P. Papkovič durch fünf harmonische Funktionen in Form elliptischer Integrale erster und zweiter Art ausgedrückt. Vier dieser Funktionen wurden vom Verf. bereits in seiner Arbeit [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **28**, Nr. 2 (1940)] über die Druckverteilung zwischen einem elliptischen Stempel und elastischem Halbraum benutzt, während die fünfte das Potential eines homogenen Ellipsoids ausdrückt. *S. Woinowsky-Krieger.*

**Cattaneo, Carlo:** Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* **6**, 1—16 (1952).

Das von J. L. Lubkin (dies. Zbl. **42**, 426) behandelte Problem der Berührung zweier elastischer Kugeln unter gleichzeitiger Torsion läßt sich, wie Verf. im Anschluß an seine schon 1938 (dies. Zbl. **19**, 374) erschienene Arbeit über das Berührungsproblem zeigt, mit Hilfe einer Integralgleichungsmethode behandeln.  
*H. Neuber.*

**Adkins, J. E. and R. S. Rivlin:** Large elastic deformations of isotropic materials. IX. The deformation of thin shells. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **244**, 505—531 (1952).

Die vom zweiten Verf. in zahlreichen vorhergehenden Arbeiten entwickelte Theorie der großen Verformungen eines unzusammendrückbaren, isotropen Materials wird auf Probleme angewendet, die dünne Schalen betreffen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Hauptkrümmungsradien groß gegen ihre Dicke sind. Das Aufblähen einer Membrane aus diesem Stoff wird in allen Einzelheiten untersucht, wobei die Längsdehnungen und Krümmungsänderungen in der unmittelbaren Umgebung des Pols exakt berechnet werden können, während für die Berechnung dieser Größen über die ganze Membrane eine numerische Integration empfohlen wird. Diese gilt zwar für eine beliebige Form der potentiellen Energie, wird aber nur für eine besondere, von M. Mooney [*J. appl. Phys.* **11**, 582 (1940)] angegebene Form ausgeführt. Am Schlusse wird das Aufblähen eines Kugelballons weiter behandelt, das früher schon von A. E. Green und R. T. Shield untersucht wurde (dies. Zbl. **39**, 410).  
*Th. Pöschl.*

**Anderson, Orson L.:** Conditions for the derivation of the stress deviator tensor. Amer. J. Phys. **27**, 236—242 (1952).

Nach Ansicht des Verf. ist die in der Plastizitätstheorie übliche Zerlegung des Spannungstensors in Kugeltensor und Deviator nur zulässig, wenn beiden Anteilen physikalisch voneinander unabhängige Wirkungen zukommen. Es wird gezeigt, wie die Zerlegung durch Energiebetrachtungen einerseits, durch Betrachtung von Ursache und Wirkung andererseits gerechtfertigt werden kann. *H. Neuber.*

**Geiringer, Hilda:** Das allgemeine ebene Problem des idealplastischen isotropen Körpers. Österreich. Ingenieur-Arch. **6**, 299—314 (1952).

Nach einer allgemeinen Einführung in die Saint-Venant-Misesche Theorie des idealplastischen Körpers wird das vollständige Gleichungssystem für einen solchen mit allgemeiner Fließbedingung angesetzt, wobei die Beziehung zwischen dem Spannungstensor und dem der Deformationsgeschwindigkeit in allgemeiner Form angenommen wird. Die Integration der erhaltenen Gleichungen wird insbesondere für das ebene Problem durchgeführt und dabei der Zusammenhang mit der Theorie der Charakteristiken und deren physikalische Bedeutung dargelegt. Auf die Notwendigkeit der Einführung einer allgemeineren Fließbedingung für nicht-metallische Stoffe wird hingewiesen. *Th. Pöschl.*

**Geiringer, Hilda:** Über die Charakteristiken des vollständigen ebenen Plastizitätsproblems. Z. angew. Math. Mech. **32**, 379—387 (1952).

Als vollständiges ebenes Plastizitätsproblem kennzeichnet Verf. die Bestimmung der drei Komponenten des ebenen Spannungstensors und der beiden Geschwindigkeitskomponenten für eine vorgegebene, isotrope Fließbedingung und ein isotrop-plastisches, tensorielles Fließgesetz zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitstensors. Es wird gezeigt, daß die Charakteristiken des reinen Spannungsproblems im allgemeinen weder mit denen des Geschwindigkeitsproblems zusammenfallen, noch mit den „Gleitlinien“, worunter Verf. die vom Prandtlischen Fließgesetz her bekannten Schublinien versteht, welche unter 45° zu den Hauptspannungslinien verlaufen. *H. Neuber.*

**Petriščev, P. P.:** Die elasto-plastischen Deformationen eines anisotropen Körpers. Vestnik Moskovsk. Univ. **7**, Nr. 8 (Ser. fiz. mat. estestv. Nauk Nr. 5), 63—72 (1952) [Russisch].

Verf. geht von den Definitionen

$$E^2 = \sum_{kl ij} \alpha_{ijkl} \bar{e}_{ij} \bar{e}_{kl}, \quad S^2 = \sum_{mnpq} \beta_{mnpq} \bar{\sigma}_{mn} \bar{\sigma}_{pq}$$

für die Intensität  $E$  der Deformationen, sowie die Intensität  $S$  der Beanspruchungen aus, wobei zwischen den Komponenten der betreffenden Tensoren die linearen Beziehungen

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \sum \alpha_{ijkl} \bar{e}_{kl}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{1}{\lambda} \sum \beta_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}$$

mit  $\lambda = S/E$  bestehen sollen. Letztere Beziehung setzt die Existenz eines Potentials der Plastizität  $W$  voraus, so daß  $\delta W = (dW/dE) \delta E$ . Verf. behandelt insbesondere den Fall transversaler Isotropie, wobei in einer zur  $Z$ -Achse normalen Ebene sämtliche Richtungen plastisch gleichberechtigt sind und die Intensitäten  $E$  und  $S$  von nur 5 Konstanten, anstatt von ihrer Höchstzahl 9, abhängen. Unter der Annahme eines inkompressiblen Stoffes untersucht dann Verf. den Fall einer Zugbeanspruchung in beliebiger Richtung hinsichtlich  $Z$ . Die Größe der Konstanten sowie die Abhängigkeit zwischen  $S$  und  $E$  wird schließlich für einige Stahlsorten aus Zugversuchen an Versuchs-Stäben abgeleitet, die a) in der Richtung  $Z$ , b) normal zu  $Z$ , c) unter 45° zu  $Z$  aus dem Material herausgeschnitten sind. Die Ergebnisse sind in einer Zahlentafel und einigen Diagrammen wiedergegeben.

*S. Woinowsky-Krieger.*

Lee, E. H.: On the significance of the limit load theorems for an elastic-plastic body. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **43**, 549—561 (1952).

Die Grenzlasttheoreme von Drucker, Greenberg und Prager für elastisch-plastischen Stoff, der unter konstanter Oberflächenbelastung fließt, werden der Theorie von Hill für den plastisch-starren Körper gegenüber gestellt, welche in jenen Fällen als gute Näherung bezeichnet werden kann, bei denen die rein plastischen Verformungen als sehr groß gegenüber den elastischen angesehen werden können. Da die Grenzlast für den elastisch-plastischen Körper meist schon erreicht ist, wenn die Verformungen noch von der Größenordnung der rein elastischen Verformungen sind, vertritt Verf. die Auffassung, daß die plastisch-starre Theorie unter Ausnutzung der Eindeutigkeits- und Variationstheoreme nur bedingt zu Ergebnissen von ausreichender Genauigkeit führen kann. Der anschließende Kommentar von Hill läßt erkennen, daß beide Theorien in der Regel doch als gleichwertig anzusehen sind.

H. Neuber.

Mandel, Jean: Sur le tassement d'une couche d'argile sous l'effet d'une force concentrée. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **235**, 1104—1106 (1952).

In Weiterführung einer vorhergehenden Note (dies. Zbl. **43**, 321) wird der Fall betrachtet, daß die eingedämmten Schichten verschiedene Elastizitätseigenschaften von denen der Tonschichten haben, auf welche eine Einzelkraft wirkt, und daß an den Seitenflächen andere Grenzbedingungen zugelassen werden. Die Senkung wird als Funktion von  $r$  und der Zeit  $t$  durch ein Integral über eine Summe von Exponential- und Besselschen Funktionen gegeben.

Th. Pöschl.

Craggs, J. W.: The normal penetration of a thin elastic-plastic plate by a right circular cone. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* **63**, 359—370 (1952).

Im Anschluß an eine unveröffentlichte Untersuchung von G. J. Taylor über den senkrechten Beschuß eines unendlich langen Drahtes, über die kurz referiert wird, untersucht Verf. die elastische und plastische Deformation einer unendlich ausgedehnten dünnen Platte, die von einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegenden kegelförmigen Geschos getroffen wird. Elementare geometrische und kinematische Betrachtungen führen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für die Plattenneigung  $\psi$  in Abhängigkeit von  $\lambda = r/t$  ( $r$  = Radius,  $t$  = Zeit); sie enthält außer Materialkonstanten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  und die Radialkomponente der Geschwindigkeit. Mit dieser Differentialgleichung ist die Fortpflanzung einer Unstetigkeit in  $\psi$  und  $\sigma_r$  verträglich. Im plastischen Gebiet wird das Huber-Mises'sche Plastizitätsgesetz, die Mises'sche Fließbedingung und das Verfestigungsgesetz von R. Schmidt herangezogen. Im einzelnen ergeben sich vier Lösungstypen, je nach der Geschwindigkeit und dem Öffnungswinkel des kegelförmigen Geschosses, die insbesondere hinsichtlich der Plattenausbeulung ein verschiedenes Verhalten zeigen.

R. Moufang.

Seth, B. R.: Finite elastic-plastic torsion. *J. Math. Physics* **31**, 84—90 (1952).

Die Torsion eines kreiszylindrischen Stabes wird bei endlichen Verschiebungen und Verzerrungen bei Heranziehung der Fließtheorie und der Deformationstheorie diskutiert. Bei Beschränkung auf infinitesimale Verzerrungen ergeben beide Theorien bei Vernachlässigung der Normalspannungen dasselbe Ergebnis. Bei Verwendung endlicher Verschiebungen und Verzerrungen gewinnt Verf. nach einer früheren Arbeit [*Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **234**, 257—285 (1935)] die Lösung des elastischen Problems in Form von konvergenten Potenzreihen in  $r$ . Benutzt man für die plastischen Formänderungen formal analoge Entwicklungen, und behält man zur Bestimmung der freien Parameter bei der Erfüllung der Randbedingungen an der Grenze des elastischen und des plastischen Bereiches 2. Potenzen des Verdrehungswinkels  $\alpha$  pro Längeneinheit bei, so lassen sich die Grenzbedingungen: Fließbedingung für die Spannungskomponenten und Stetigkeit der Radialspannung nicht beide erfüllen, wenn die Deformationstheorie zugrunde gelegt wird. Bei der



Fließtheorie tritt diese Komplikation nicht ein. Die Normalspannungen, nach der Theorie der endlichen elastischen Formänderungen bzw. nach der Fließtheorie berechnet, enthalten  $\alpha^2$  als kleinste Potenz von  $\alpha$ . Die Koeffizienten von  $\alpha^2$  sind aber bei  $r = 0$  nicht alle regulär. — *R. Moufang.*

**Schaefer, H.: Über Anwendungen der Variationsrechnung auf technische Eigenwertprobleme.** Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 4, 166—175 (1952).

Es werden verschiedene Variationsprinzipien am Beispiel der drehsymmetrischen Dehnungsschwingungen einer Kreisscheibe entwickelt. Es seien  $y(r)$  radiale Verschiebung,  $h(r)$  Dicke der Scheibe,  $\rho$  Dichte,  $\nu$  Querkontraktionsziffer,  $E$  Elastizitätsmodul,  $\omega$  Eigenkreisfrequenz,  $R$  Scheibenradius,  $D = E h / (1 - \nu^2)$ ; das Variationsproblem  $\int_0^R G(y', y, r) dr = \text{Extremum}$  mit  $2G = Dr \left( y'^2 + \frac{2\nu}{r} y' y + \frac{1}{r^2} y^2 \right) - \omega^2 \rho h r y^2$  geht mit  $p = \frac{\partial G}{\partial y'}$  und  $H(p, y) = p y' - G(y', y, r)$  in das kanonische

Variationsproblem  $\int_0^R \left\{ p \frac{dy}{dr} - H(p, y) \right\} dr = \text{Extremum}$  über, aus dem zwei weitere

Variationsprobleme mit Nebenbedingungen hergeleitet werden. Diese führen zum Ritzschen und Grammelschen Verfahren, welche miteinander hinsichtlich ihrer praktischen Anwendbarkeit und ihrer Genauigkeit verglichen werden. *L. Collatz.*

**Weidenhammer, F.: Biegeschwingungen des Stabes mit nichtlinearem Elastizitätsgesetz.** Z. angew. Math. Mech. 32, 265—266 (1952).

Neben endlichen Verschiebungen in der Quer- und Längsrichtung der Stabachse berücksichtigt Verf. auch eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Relation  $\sigma(\varepsilon) = E \varepsilon (1 + \Delta \varepsilon^2)$ , wo  $\Delta$  eine zusätzliche, meist negative, Materialkonstante bezeichnet. Das Hamiltonsche Prinzip liefert für die beiden Verschiebungen eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die bei festgehaltenen Stabenden in eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung für die Querverschiebung allein übergeht. In Anwesenheit von  $\Delta$  ist eine strenge Lösung dieser Gleichung nicht möglich, doch gibt Verf. einen Reihenansatz für eine Näherungslösung an, der auf ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen führt. Verf. unterzieht schließlich den Schwingungstypus, der sich aus jedem System in erster Näherung ergibt, einer kurzen Diskussion. *S. Woynowsky-Krieger.*

**Weidenhammer, F.: Nichtlineare Biegeschwingungen des axial-pulsierend belasteten Stabes.** Ingenieur-Arch. 20, 315—330 (1952).

Die allgemeinen Untersuchungen von Mettler über die Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper werden hinsichtlich der Nachbarbewegungen ergänzt, welche neben den instabilen Grundbewegungen noch als stabil zu erwarten sind, sofern die Amplituden der in der Technik auftretenden pulsierenden äußeren Kräfte gegenüber der statischen Knicklast des jeweiligen Systems genügend klein bleiben. Der Sachverhalt wird für den axial pulsierend belasteten Stab untersucht, bei welchem nach der Stabilitätstheorie die gestreckte Ausgangslage des Stabes bei freier Auflagerung an beiden Enden instabil wird gegenüber einer Störung in Querrichtung, sobald die harmonisch pulsierende Längslast in der Nähe der kritischen Frequenz liegt. Verf. behandelt das Problem in Anlehnung an das Hamiltonsche Prinzip und gewinnt gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen für Quer- und Längsbewegung, welche er mittels eines gemischten Ritzansatzes auf gewöhnliche Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Funktionen zurückführt. Für eine Anregungsfrequenz, welche wesentlich unterhalb der Längsresonanzfrequenz liegt, wird eine erweiterte Mathieu-Gleichung aufgestellt. Die Auswertung bestätigt die Existenz stabiler Querbewegungen bei instabiler Ausgangslage des Stabes. Auch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft wird in Betracht gezogen. *H. Neuber.*

**Schirmer, H.: Über Biegewellen in Stäben.** Ingenieur-Arch. 20, 247—257 (1952).

Die Untersuchung des Stoßes auf einen Biegestab führt auf sogenannte Biegewellen. In einer Arbeit von Flügge [Z. angew. Math. Mech. 22, 312 (1942)] wurde der Stab als eindimensionaler Wellenleiter behandelt und eine von Timoshenko

angegebene Gleichung zugrunde gelegt [Philos. Mag., VI. Ser. 41, 744 (1921)]. Hierbei muß sowohl die Querkraftverformung als auch die Drehträchtigkeit der Querschnitte berücksichtigt werden. Verf. zeigt, daß der Ausbreitungsvorgang der Biegewellen im wesentlichen durch Betrachtung von zwei Elementarwellen darstellbar ist, von denen bei sehr hohen Frequenzen eine Wellenform allein das Biegemoment überträgt. Die Ausbildung des Wellenkopfes wird durch besondere Eigenschaften der Wellenform erklärt.

*H. Neuber.*

**Haacke, Wolfhart:** Eine Bemerkung zur Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper von Herrn Mettler. *Z. angew. Math. Mech.* 32, 256—258 (1952).

Die Mettlersche Analyse der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper wird hinsichtlich der Folgerungen für die Existenz der Instabilitätsbereiche erster und zweiter Art verschärft.

*H. Neuber.*

**Reckling, K. A.:** Die Stabilität erzwungener harmonischer Schwingungen gerader I-Träger im Verband eines Tragwerkes. *Ingenieur-Arch.* 20, 137—162 (1952).

Die Arbeit gehört in das Gebiet der Stabilität elastischer Schwingungen, das durch E. Mettler in einer Reihe von Arbeiten behandelt wurde. Einen von der Mettlerschen Methode abweichenden Rechnungsweg beschritt W. Kucharski, der die auftretende partielle Differentialgleichung mit Hilfe einer Störungsrechnung integrierte, wobei die dem Grundbewegungszustand benachbarten Verschiebungen nach wachsenden Potenzen eines kleinen Parameters entwickelt wurden; die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten sind Zeitfunktionen. Verf. wendet die Kucharskische Methode auf einen I-Träger an, der als Glied einer schwingenden Baukonstruktion durch pulsierende Belastungen mit gegebener Erregerfrequenz dynamisch beansprucht wird, wobei sich erzwungene stationäre Schwingungen einstellen. Unter Benutzung eines kleinen, mit der Belastung in Zusammenhang stehenden Parameters für die Entwicklung der Nachbarverschiebungen erhält Verf. zunächst unendlich viele Differentialgleichungen. Durch besondere Umformungen gelingt die Zurückführung auf eine Reihe gewöhnlicher inhomogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, wodurch die Diskussion der Instabilitätsbereiche vereinfacht wird. Zahlenbeispiele zeigen brauchbare Ergebnisse. Für den axial pulsierend belasteten Stab stellt sich Übereinstimmung mit den Mettlerschen Ergebnissen heraus.

*H. Neuber.*

**Wittmeyer, H.:** Ein einfaches Verfahren zur näherungsweise Berechnung sämtlicher Torsionseigenfrequenzen eines Stabes veränderlichen Querschnitts. *Ingenieur-Arch.* 20, 331—336 (1952).

Abweichend von den bisherigen Näherungsverfahren führt Verf. eine Störungsrechnung an den Variationsgleichungen des Torsionsschwingungsproblems durch und gewinnt einfache Aussagen über die Eigenfrequenzen, welche auch für die niederen Frequenzen einschließlich der Grundschiwingung empfohlen werden. Die praktische Anwendung des Verfahrens führt auf eine Verzerrung der Stabelemente proportional der Wurzel aus dem Verhältnis des auf die Längeneinheit bezogenen Massenträgheitsmomentes zur Drillsteifigkeit. Die Auftragung des Produktes aus Trägheitsmoment und Steifigkeit über der verzerrten Stabachse in logarithmischem Maßstab liefert eine Kurve, welche durch eine Gerade approximiert wird, deren Neigung bei der Frequenzermittlung als Parameter auftritt. Die Grundfrequenz kann unmittelbar aus einer für alle Systeme gemeinsamen Kurve oder Tabelle abgelesen werden, während für die höheren Frequenzen die asymptotische Formel von Ince angegeben wird.

*H. Neuber.*

**Sapiro, G. S.:** Die Fortpflanzung von elasto-plastischen Wellen in Stäben von veränderlichem Querschnitt. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 335—340 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt die Fortpflanzung elasto-plastischer Wellen in einem Stabe  $0 \leq x < \infty$  von veränderlichem Querschnitt, unter der Einwirkung eines in  $x = 0$  plötzlich angebrachten und weiterhin zunehmenden axialen Druckes, wobei mit linearem Verfestigungsgesetz innerhalb der plastischen Welle gerechnet wird. Die Differentialgleichung der Längsschwingungen erfährt in der elastischen und der plastischen Zone eine getrennte Behandlung. In der ersteren ist die Bedingung an der Wellenfront, in der letzteren die Bedingung in  $x = 0$ , für beide Zonen schließlich

die Eindeutigkeit der Deformationen an ihrer Grenze zu beachten. Es zeigt sich, daß die Deformationen und die Geschwindigkeiten an der Wellenfront sowie an der Vorderfront der plastischen Zone nur von dem Anfangswert des Axialdruckes am Stabende abhängen. Im Sonderfall eines konischen Stabes läßt sich die vollständige Lösung auch ohne numerische Integration angeben. Verf. geht zum Schluß auf den Fall einer absolut starren Umhüllung des schwingenden Stabes sowie den Fall von Stabschwingungen bei einem nicht-linearen elastischen Gesetz und endlichen Deformationen ein.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Newlands, Margery:** The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium with a single surface layer. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **245**, 213—308 (1952).

Es wird die zweidimensionale Ausbreitung eines Stoßes (pulse) von longitudinalem und transversalem Typ in einem zweidimensionalen, einfach geschichteten, elastischen Medium untersucht, bei dem über einem elastischen Halbraum eine Deckschicht mit anderen elastischen Konstanten und anderer Dichte liegt. Die Lösung wird in Form einer Summe von Doppelintegralen erhalten, die physikalisch eine Folge von „Pulsen“ darstellen. Diese Integrale werden mit Hilfe einer von Bromwich angegebenen Näherungsmethode berechnet. Die einzelnen Pulse erreichen einen entfernten, oberflächennahen Punkt nach Zeiten, wie man sie für Strahlen aus dem Fermatschen Prinzip berechnet. Sie sind ähnlich geformt wie der ursprüngliche Stoß. Außer den Pulsen gibt es eine ganze Reihe von Beugungsstörungen. Diese haben aber im allgemeinen ein glatteres Aussehen. Von einer bestimmten Entfernung an erlangen die Interferenzen zwischen den einzelnen Pulsen Bedeutung, und schließlich bleibt in sehr großer Entfernung nur noch ein Zug von Rayleigh-Wellen. Zum Schluß der Arbeit wird angegeben, wie man die vorliegenden Rechnungen auf einen mehrfach geschichteten Untergrund ausdehnen könnte.

*W. Kertz.*

**Čeban, V. G.:** Der Zusammenstoß in der Längsrichtung von elastoplastischen Stäben. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **7**, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 4), 15—21 (1952) [Russisch].

The author analyzes the longitudinal impact of two elasto-plastic cylindrical bars of identical cross-section, density, and stress-strain characteristics. The stress-strain relation for increasing stress is assumed to consist of two straight lines, the plastic less steep than the elastic. Unstressing follows a straight line parallel to the elastic stressing line. One bar is of finite, the other of infinite length. Expressions for stresses, material velocities, etc. at various times and at different points are obtained in terms of the velocity of impact and the material characteristics of the bars.

*M. P. White.*

**Ziegler, H.:** Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck. *Ingenieur-Arch.* **20**, 377—390 (1952).

Bei der Berechnung der kritischen Drehzahlen von rotierenden Wellen unter Torsion und Druck werden — ähnlich wie bei der gewöhnlichen Knickaufgabe — Belastungen durch quasitangentiale und semitangentiale Momente unterschieden, je nachdem die Belastung durch ein einziges Kräftepaar oder durch mehrere bis gleichmäßig rundherum verteilte Kräfte erfolgt. Es sind dann andere kritische Drehzahlen zu erwarten als unter der Annahme rein axialer Momente. Die Rechnung wird für zylindrische Wellen mit gleichen Biegesteifigkeiten und eine einzige Scheibe und für Belastungen durchgeführt, die im Vergleich zur statischen Knicklast klein sind. Hierbei werden in bekannter Weise die Zentrierungsfehler der Scheibe durch Zusatzmassen u. dgl. berücksichtigt. Die lange gelagerte Welle besitzt ohne Kreiselwirkung bei semitangentialer Belastung eine einzige kritische Geschwindigkeit und bei quasitangentialer Belastung zwei solcher, die — in erster Näherung — auch zusammenfallen können. Bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung ergibt sich für abgeplattete Rotoren nur eine und bei verlängerten zwei kritische Geschwindigkeiten des Gleichlaufs, für den Gegenlauf deren zwei, die sich jedoch weder durch statische noch dynamische Unwuchten erklären lassen.

*Th. Pöschl.*



**Hydrodynamik:**

Truesdell, Clifford: *La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 378—379 (1952).

Bewegungen von Gromeka-Beltrami sind solche, bei denen die Richtung des Rotors mit der der Geschwindigkeit übereinstimmt. Für solche läßt sich ein rein kinematischer Satz aussprechen, der  $\nabla^2 v^2$  in Beziehung zu  $W^2$  setzt, wo der Vektor  $W$  der Rotor, dividiert durch die Wurzel aus dem doppelten Betrag des symmetrischen Teils des Deformationstensors der Geschwindigkeit ist. Wesentlich ist, ob  $W^2$  kleiner, gleich oder größer als 1 ist. Außerdem spielt noch das innere Produkt der Geschwindigkeit mit dem Gradienten der Divergenz eine Rolle.

G. Hamel.

Moreau, Jean-Jacques: *Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel*. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 355—375 (1952).

Eine groß angelegte Studie über die Wirbelbewegung von Flüssigkeiten und ihre dynamische Einwirkung nach außen. Außer den klassischen Untersuchungen von Kutta und Joukowski seien keine wirklich bemerkenswerten Resultate vorhanden, soweit Verf. sie kenne. Ref. meint, daß man doch einmal die Arbeiten von Lagally u. a. zum Vergleich heranziehen sollte. In diesem ersten Kap. eine gründliche Studie über Vektoranalysis mit teilweise neuen Ergebnissen, die Verf. später braucht.

G. Hamel.

Moreau, Jean-Jacques: *Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel*. II. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 32, 1—78 (1953).

Mit dem zweiten Kap. beginnt die eigentliche Untersuchung. Im Mittelpunkt steht das Integral  $\tilde{K}$  über den Rotor der Geschwindigkeit sowie das Energieintegral. Zahlreiche Umformungen mit Hilfe der Sätze von Gauß und Green. Besonders werden auch die uneigentlichen Wirbel in Gestalt von Singularitäten in Betracht gezogen. Im zweiten Kapitel spielen die Raumintegrale über das Moment des Rotors und über sein Virial eine besondere Rolle. Endlich im vierten Kap. die Betrachtung einer irgendwie beschaffenen Flüssigkeit inmitten einer solchen, für die die Helmholtzschen Sätze gelten. Als Nutzenanwendung Sätze über die Wirkung auf begrenzende Körper.

G. Hamel.

Gibellato, Silvio: *Determinazione delle velocità indotte da un sistema di  $p$  vortici elicoidali variabili sinusoidalmente e dal sistema vorticoso associato*. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 86, 340—361 (1952).

Vorgelegt sind  $p$  Wirbelsysteme, die aus 1. der schraubenförmigen Wirbellinie  $\vartheta - \frac{\omega}{v}z = h \frac{2\pi}{p}$ ,  $r = r_0$  mit der Intensität  $\Gamma_0 e^{i\vartheta}$ , 2. dem auf der  $z$ -Achse gelegenen Wirbel der Intensität  $\Gamma_0 e^{i\omega z/v}$  (nur für  $p = 1$ ) und 3. den Radialwirbeln auf der Schraubenfläche  $\vartheta - \frac{\omega}{v}z = h \frac{2\pi}{p}$ ,  $r < r_0$  bestehen ( $v, \omega$  reelle positive Konstanten,  $h = 0, 1, \dots, p-1$ ;  $r, \vartheta, z$  Zylinderkoordinaten). Sie entsprechen den Wirbelsystemen hinter einem  $p$ -blättrigen, in Richtung der  $z$ -Achse sich bewegendem Propeller. Es wird das Potential der induzierten Geschwindigkeit mit Hilfe einer Reihenentwicklung gewonnen. Der Grenzfall  $r_0 \rightarrow \infty$  liefert hierbei ein zweckmäßiges Hilfspotential.

K. Maruhn.

Dengler, M. A. and Martin Goland: *The subsonic calculation of circulatory spanwise loadings for oscillating airfoils by lifting-line techniques*. J. aeronaut. Sci. 19, 751—759 (1952).

Die Verff. übertragen die Traglinientheorie des Ref. auf den Fall harmonischer Schwingungen, in dem sie mittels physikalisch-anschaulicher Überlegungen durch Überlagerung von Hufeisenwirbeln ein der Rechnung zugängliches Wirbelmodell aufbauen. Als Vorstufe werden das stationäre Prandtlsche und das instationäre

Modell von Cicala betrachtet. Für einen Rechteckflügel der Streckung 5 sind für sechs verschiedene, spannweise symmetrische Schwingungsarten der reduzierten Frequenz  $1/3$  die Zirkulationsverteilungen berechnet worden und in Diagrammen den nach Cicala und nach Reissner berechneten Verteilungen gegenübergestellt. Im Gegensatz zu den älteren Methoden ist das neue Verfahren auf Flügel beliebigen Grundrisses anwendbar; als Beispiel enthalten die Diagramme auch die Verteilungen des um 45 Proz. rückgepeilten Flügels. Zum Schluß werden Vorschläge zur Herabsetzung des Rechenaufwandes und zur Erweiterung der Theorie gemacht

*J. Weissinger.*

**Nickel, K.: Über spezielle Tragflächensysteme.** Ingenieur-Arch. **20**, 363—376 (1952).

Nach der Methode der Wirbelbelegung werden Untersuchungen über die Auftriebsverteilung verschiedener Tragflügelanordnungen ausgeführt. Dabei werden einmal mehrere Tragflügel endlicher Spannweite behandelt, die sich nebeneinander befinden, und zum anderen mehrere Tragflügel unendlicher Spannweite, die hintereinander angeordnet sind. Im ersten Fall wird u. a. für zwei nebeneinander liegende Tragflügel (oder einen Tragflügel mit Spalt) die Auftriebsverteilung über die Spannweite erhalten. Wegen der mathematischen Einzelheiten wird auf eine frühere Arbeit verwiesen (dies. Zbl. **42**, 108).

*H. Schlichting.*

**Lawrence, H. R. and E. H. Gerber: The aerodynamic forces on low aspect ratio wings oscillating in an incompressible flow.** J. aeronaut. Sci. **19**, 769—781 (1952).

Die von Lawrence (dies. Zbl. **43**, 404) entwickelte Theorie zur Berechnung der Auftriebsverteilung über die Tiefe für Flügel kleiner Streckung  $\Lambda$  wird auf harmonisch schwingende Flügel (Schlag- und Drehschwingung, evtl. nur des Ruders) ausgedehnt. Sie ist anwendbar auf Flügel beliebigen Grundrisses mit gerader Hinterkante und geht für  $k$  (reduzierte Frequenz)  $\rightarrow 0$  in die frühere Theorie über. In den Grenzfällen  $\Lambda \rightarrow 0$  bzw.  $\Lambda \rightarrow \infty$  stimmt sie mit der Theorie von Garrick-Jones bzw. mit der ebenen Theorie überein. Die (eindimensionale) Integralgleichung für die Auftriebsverteilung über die Tiefe wird durch Kollokation in ein lineares Gleichungssystem überführt, dessen Lösung für  $k \neq 0$  nicht mehr viel Arbeit macht, wenn — wie gewöhnlich — die Lösung für  $k = 0$  schon vorliegt, zumal die auftretenden Hilfsfunktionen tabelliert vorgelegt werden. Numerische Ergebnisse für Auftrieb und Moment im Bereich  $0 \leq \Lambda \leq 4$ ,  $0 \leq k \leq 1$  werden für den Rechteckflügel (auch mit Ruder in 25%, 37% und 50% Flügeltiefe) sowie den Dreieckflügel in Tabellen und Diagrammen mitgeteilt.

*J. Weissinger.*

**Dorrance, William H.: Two-dimensional airfoils at moderate hypersonic velocities.** J. aeronaut. Sci. **19**, 593—600 (1952).

Bezeichnungen:  $M$  = Mach-Zahl,  $\gamma$  = Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $\alpha$  = Anstellwinkel,  $l$  = Tiefe,  $t$  = Dicke,  $\delta = t/l$ ,  $\beta = \alpha/\delta$ ,  $\xi = 2x/l$  und  $\eta = 2y/t$  dimensionslose Koordinaten,  $\eta(\xi)$  = Profilkontur,  $f(\xi, \beta) = \pm \{d\eta/d\xi - \beta\}$  auf der Profitober- bzw. Unterseite,  $K = M_0 \delta$ , Index 0: ungestörte Strömung. Durch Reihenentwicklung der exakten Beziehungen nach Potenzen von  $K$  ergibt sich für den Druckbeiwert  $c_p = 2(p/p_0 - 1)/\gamma M_0$  an einer beliebigen Profilstelle im Bereich  $M_0 \geq 3,19$ ,  $|fK| \leq 1$  näherungsweise

$$\frac{C_p}{\delta^2} = \frac{2}{K} f + \frac{\gamma+1}{2} f^2 + \frac{(\gamma+1)K}{6} f^3,$$

woraus man durch Integration sofort die Beiwerte für Auftrieb, Widerstand und Moment erhält. Für eine große Zahl von Profilformen werden diese Beiwerte explizit angegeben. Vergleiche mit der exakten Theorie und mit Versuchsergebnissen zeigen gute Übereinstimmung bis zu Mach-Zahlen der Größenordnung 10—12. Die Ergebnisse gelten auch für Flügel endlicher Spannweite mit praktisch ausreichender Genauigkeit.

*J. Weissinger.*

Lance, G. N.: The drag on slender pointed bodies in supersonic flow. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 165—177 (1952).

Für den Widerstand von Rotationskörpern und Körpern kleiner Spannweite werden verschiedene Widerstandsformeln auf verschiedenen Wegen abgeleitet. Neu ist dabei, daß einmal die Kontrollfläche auch völlig in den Körper hineinverlegt wird. Wie erstmalig von G. N. Ward gezeigt, hängt der Widerstand zylindrisch oder spitz endender Körper nur vom Querschnittsverlauf ab. Hier sei auf eine Arbeit von F. Kenne (Kungl. Tekniska Högskol., AERO TN 21, Stockholm 1952) verwiesen, mit einer anderen und allgemeineren Behandlung solcher Strömungen. Siehe ferner Mac C. Adams and W. R. Sears, *J. aeronaut. Sci.* **20**, 85—98 (1953).

K. Oswatitsch.

Kravtchenko, Julien: Note sur les solutions approchées du problème déterminé des sillages. *Ann. Inst. Fourier* **3**, 287—299 (1952).

Verf. referiert zunächst eine Arbeit von Rapoport (dies. Zbl. **41**, 541) über die ebene Totwasserströmung in der Ebene  $z = x + i y$  um ein Hindernis, das von zwei symmetrisch zur  $x$ -Achse gelegenen und vom Punkte  $z = 0$  ausgehenden glatten Kurvenstücken begrenzt wird. Die Aufgabe läuft darauf hinaus, den von der negativen  $x$ -Achse, dem Bogen mit  $y \geq 0$  und der zugehörigen freien Stromlinie begrenzten „oberen“ Teil der Halbebene  $y \geq 0$  auf die obere Halbebene einer  $\zeta$ -Ebene ( $\zeta = \xi + i \eta$ ) so konform abzubilden, daß dem genannten Linienzug in passender Weise die Gerade  $\eta = 0$  entspricht. Die gesuchte Funktion  $\zeta(z)$  muß dabei eine Reihe physikalisch begründeter Bedingungen erfüllen. Der von Rapoport angegebene Näherungsansatz für eine solche Funktion wird vom Verf. kritisch diskutiert; es gelingt ihm, eine Reihe von Verallgemeinerungen (z. B. Ecken auf den Kurvenstücken) durchzuführen. Ferner wird die Rapoport'sche Lösung daraufhin untersucht, inwieweit sie physikalisch sinnvoll ist.

K. Maruhn.

Ashley, Holt, John Dugundji and Donald O. Neilson: Two methods for predicting air loads on a wing in accelerated motion. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 543—552 (1952).

Zunächst wird mittels der Laplacetransformation nach v. Kármán und Sears die Auftriebsformel eines nahezu gradlinig instationär bewegten, dünnen Flügels in ebener, reibungsloser, inkompressibler Strömung hergeleitet und dann ein einfaches Iterationsverfahren beschrieben, das z. B. für den Fall eines aus der Ruhe mit konstantem Anstellwinkel und konstanter Geschwindigkeit anfahrenden Flügels (verglichen mit der exakten Lösung von Wagner) beim ersten Iterationsschritt einen maximalen Fehler von +8%, beim zweiten Schritt von -3% liefert, wobei überdies die erste Näherung durchweg zu große Werte liefert, so daß man bei Festigkeitsuntersuchungen auf der sicheren Seite liegt. Auch in anderen durchgerechneten Beispielen, insbesondere Übergängen von stationärer zu instationärer Bewegung, zeigt sich gute Übereinstimmung mit der strengen Lösung. Die Rechnungen sind z. B. für das Abheben von Flugzeugen bei kurzen Startstrecken (25 Flügeltiefen oder weniger) von praktischer Bedeutung.

J. Weissinger.

Riegels, F.: Zur Darstellung von Potentialströmungen durch ringförmige Quellbelegungen. *Abh. Braunschweig. wiss. Ges.* **4**, 146—165 (1952).

Leicht gekürzte Darstellung der in dies. Zbl. **47**, 182 referierten Theorie. Ohne Tabellen.

J. Weissinger.

Payne, L. E.: On axially symmetric flow and the method of generalized electrostatics. *Quart. appl. Math.* **10**, 197—204 (1952).

In noch unveröffentlichten Arbeiten von Weinstein (The method of singularities in the physical and in the hodograph plane, Fourth Symp. Appl. Math.) bzw. von Verf. und Weinstein (Capacity, virtual mass and symmetrisation) wurde für eine gleichförmige Strömung um einen axialsymmetrischen Körper parallel zur



Symmetrieachse der Zusammenhang zwischen Stromfunktion  $\psi \{n\}$  im  $n$ -dimensionalen und dem elektrostatischen Potential  $\varphi \{n+2\}$  im  $(n+2)$ -dimensionalen Raum bzw. der Zusammenhang zwischen der virtuellen Masse (virtual mass)  $M \{n\}$  im  $n$ -dimensionalen und der Kapazität  $C \{n+2\}$  im  $(n+2)$ -dimensionalen Raum hergeleitet. In der vorliegenden Arbeit werden, in erster Linie für ungerade  $n$ , nach Herstellung expliziter Ausdrücke für  $\varphi$  für spindel- und linsenförmige Körper diese Ergebnisse zur Bestimmung von  $\psi$ ,  $C$  und  $M$  (unter besonderer Berücksichtigung von  $n=3$ ) angewendet. K. Maruhn.

● Gessow, Alfred and Garry C. Myers jr.: *Aerodynamics of the helicopter*. New York: The Macmillan Company 1952. 343 p. \$ 6,00.

Vorliegendes Buch ist auf der Grundlage von etwa 70 NACA-Forschungsberichten entstanden, darunter mehreren Arbeiten, die von den Verff. im Langley Aeronaut. Lab. durchgeführt wurden. Da das Buch sich vorwiegend an Studenten und Ingenieure richtet, haben Verff. umfangreiche mathematische Entwicklungen vermieden und sich mit bestem Erfolg bemüht, den physikalischen Kern der jeweils behandelten Probleme klar herauszuschälen. Nach einer geschichtlichen Einführung und einem Überblick über die verschiedenen Bauformen von Hubschraubern wird zunächst als einfachster Fall der ideale, gleichförmig belastete und alleinfahrende Rotor im Schwebeflug (Steiggeschwindigkeit = 0) behandelt. Abweichungen vom idealen Verhalten entstehen durch die endliche Blattzahl, den Profilwiderstand und den Machzahl einfluß der Flügelspitzen. Auch Verwindung und Umrißform des Flügels haben Einfluß auf die optimalen Bedingungen, die genauer untersucht werden. Der Bodeneinfluß wird nach dem Spiegelungsverfahren berechnet und mit Meßergebnissen verglichen. Ein weiterer Abschnitt ist dem antriebslosen Abwärtsgleiten (Autorotation) gewidmet, wobei der günstigste Anstellwinkel für geringste Sinkgeschwindigkeit bestimmt wird. Den Übergang zur Theorie des Vorwärtsfluges bildet ein Abschnitt über das physikalische Verhalten der beweglich aufgehängten Schraubenblätter, die unter dem Einfluß von Auftriebs-, Zentrifugal- und Schwerkraften bestimmte im Vorwärtsflug periodisch veränderliche Gleichgewichtslagen einnehmen. Nach einer vereinfachten Theorie des Waagerechtfuges (bei der die Vereinfachungen aber weniger weit gehen als in der Glauertschen Theorie) werden die verfeinerten Theorien von Wheatley (1934) und Bailey (1941) ausführlich und mit vielen Zahlentafeln wiedergegeben. Die Berechnung der Flugleistungen wird durch graphische Darstellungen wesentlich erleichtert. Dem Verhalten des Rotors bei abgerissener Strömung ist ein ganzer Abschnitt gewidmet, weil bei größeren Vorwärtsgeschwindigkeiten die Strömungsablösung (an dem rückwärts gehenden Flügel) eine wesentliche Begrenzung darstellt. Die beiden abschließenden Abschnitte behandeln kurz Stabilitäts- und Schwingungsfragen. Leider haben sich Verff. auf den freifahrenden Rotor beschränkt, so daß also der sicher nicht unwesentliche Einfluß des Rumpfes nirgends in Erscheinung tritt. Im Anhang ist eine Bibliographie von insgesamt 166 Arbeiten über Hubschrauber wiedergegeben, darunter eine vollständige Liste der NACA-Berichte. W. Wuest.

Lord, W. T.: *Free-streamline jets in shear flow*. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 197—201 (1952).

Ist eine ebene, konstante Parallelströmung einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit längs einer Wand gegeben, so entsteht nach Anbringung eines Spaltes in der Wand ein Strahl, dessen Gestalt von Watson [Ministry of Supply (London), Aeronaut. Res. Council; Rep. and Memoranda no. 2177 (1946)] mittels der Hodographenmethode bestimmt worden ist. Im Hinblick auf Fragen der Grenzschichtabsaugung behandelt Verf. dasselbe Problem für den Fall, daß die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung eine lineare Funktion des Wandabstandes ist, und gibt eine Näherungslösung unter der Voraussetzung, daß man zweite und höhere Potenzen der Wirbelstärke der Grundströmung vernachlässigen darf. Eine ausführliche (ausleihbare) Darstellung ist erschienen unter dem Titel: *Free-streamline jets in shear flow and their application to the design of suction slots* [Rep. aeronaut. Research Council, London 13, 197 (1950)]. J. Weissinger.

Wendt, H.: *Das Problem der Jungfernquelle*. Z. angew. Math. Mech. 32, 338—358 (1952).

Gegeben ist im dreidimensionalen Raum ein unendlich ausgebreitetes und unendlich tiefes, unter der Wirkung der Schwerkraft stehendes „Meer“. Unterhalb der Oberfläche befindet sich in endlichem Abstand eine (räumliche) Quelle, im Unendlichen ist das Meer in Ruhe. Gesucht ist die Gestalt der Oberfläche bei stationärer inkompressibler, reibungs- und wirbelfreier Strömung. Die Meeresoberfläche ist

zugleich Stromfläche und freie Oberfläche; dies liefert die Grundgleichungen des Problems. Die Lösung wird nicht mit der Hodographenmethode, sondern mittels eines geeigneten Näherungsverfahrens unter Annahme kleiner Quellergiebigkeit vorgenommen. Es wird das Prinzip der Bildung dieser Näherungen auseinander-gesetzt; die ersten drei Näherungen werden berechnet. Konvergenzbetrachtungen erfolgen nicht.

*K. Maruhn.*

**Lewy, Hans:** On steady free surface flow in a gravity field. Commun. pure appl. Math. **5**, 413—414 (1952).

Beziehungen für den Zusammenhang zwischen der freien Oberfläche einer zwei-dimensionalen, der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeitsmasse und der entsprechenden wirbelfreien stationären Bewegung.

*K. Maruhn.*

**Nadile, Antonio:** Configurazioni ellissoidali di equilibrio di una massa liquida omogenea attratta da un anello circolare concentrico. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena **5** (1950—51), 178—189 (1952).

Es werden Bewegungen einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeitsmasse, die unter dem Einfluß der Eigengravitation und der Anziehung einer außerhalb gelegenen Kreislinie  $k$  steht, untersucht. Von besonderem Interesse ist der Fall einer ellipsoidischen Gleichgewichtsfigur, bei der der Körper starr um eine seiner Achsen rotiert, während  $k$  in der Ebene der beiden anderen Achsen liegt. Berücksichtigt man bei dem Potential von  $k$  nur die Anfangsglieder, so verläuft die Bestimmung der Gestalt und der Winkelgeschwindigkeit analog zu den Betrachtungen beim Maclaurinschen bzw. Jacobischen Ellipsoid.

*K. Maruhn.*

**Prakash, Prem:** General steady flow superposable on a constant velocity. Ganita **3**, 91—93 (1952).

Es werden die stationären, ebenen und inkompressiblen Strömungen mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  und der Wirbelkomponente  $\zeta$  explizit angeben, die im Sinne von Ram Ballabh [Proc. Benares Math. Soc., n. Ser. **71** (1940)] einer wirbelfreien Strömung mit den konstanten Komponenten  $U, V = 0$  überlagert werden können. Im Falle verschwindender Zähigkeit muß entweder  $\zeta = \text{const.}$  oder  $v = 0$  sein.

*C. Heinz.*

**Viguié, Gabriel:** La transition en écoulement incompressible le long d'une plaque plane. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 1055—1059 (1952).

Verf. betrachtet die Strömung in der Grenzschicht einer inkompressiblen Flüssigkeit längs einer ebenen Platte, wobei für die Schubspannung außer dem klassischen Term additiv ein zweiter eingeführt wird, der der dritten Potenz des transversalen Geschwindigkeitsgradienten proportional ist. Die dadurch bedingten Korrekturen werden berechnet.

*Th. Pöschl.*

**Morawetz, Cathleen S.:** The eigenvalues of some stability problems involving viscosity. J. rat. Mech. Analysis **1**, 579—603 (1952).

In der laminaren, ebenen Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit werden kleine Störungen in Form von sich in Hauptströmungsrichtung ausbreitenden Wellen betrachtet, wie sie der Tollmien-Schlichtingschen Stabilitätstheorie zugrunde liegen, also mit der Stromfunktion  $\Phi(y) \exp \{i\alpha(x - ct)\}$ . Untersucht werden die drei Fälle (1) der Strömung zwischen zwei parallelen, sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegenden ebenen Wänden, (2) der Strömung mit symmetrischem Geschwindigkeitsprofil zwischen zwei festen, parallelen ebenen Wänden, (3) der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte. Das resultierende Eigenwertproblem der Stabilitätstheorie laminarer, zäher Strömungen wird für große Reynoldssche Zahlen in Vergleich gesetzt mit dem entsprechenden Eigenwertproblem der reibungslosen Strömungen. Es seien  $y_1$  und  $y_2$  im Falle (1) die Koordinaten der Wände, im Falle (2) die Koordinaten der einen Wand und der Mittellinie der ungestörten Strömung, im Falle (3) sei  $y_1$  die Koordinate der Platte. Wird dann mit  $w(y)$  die ungestörte Strömung bezeichnet und schließt man die unmittelbare Umgebung von  $c = w(y_1)$  und  $c = w(y_2)$  aus — hier sind die Methoden der Verf. nicht anwendbar —, so wird unter recht allgemeinen Annahmen eine Relation zwischen  $c, \alpha$  und  $\alpha R$  hergeleitet, die im Falle  $R \rightarrow \infty$  in die Relation für die Eigenwerte der entsprechenden reibungslosen Strömungen übergeht. Ferner wird gezeigt, daß es in den Fällen (1) und (2) andere, zu gedämpften Schwingungen gehörige Eigenwerte gibt, die keine entsprechenden Eigenwerte im reibungs-



losen Fall haben. Als wesentliches Resultat kann unter den gemachten Annahmen formuliert werden: Außer in der Nachbarschaft von  $c = w(y_1)$  und  $c = w(y_2)$  können keine anderen instabilen oder neutralen Wellen in den zähen Strömungen existieren als jene, denen instabile bzw. neutrale Wellen in den gleichen Fällen reibungsloser Strömung entsprechen. *H. Görtler.*

**Shiffman, Max:** On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. *J. rat. Mech. Analysis* 1, 605—652 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Existenz der ebenen, reibungsfreien, stationären Unterschallströmung und bedient sich dabei des Variationsproblems, wie es zuerst von Bateman formuliert wurde. Abschließend werden Strömungen mit Zirkulation behandelt. *K. Oswatitsch.*

**Ward, G. N.:** On the integration of some vector differential equations. II. Application to the linearized theory of steady compressible fluid flow. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 441—446 (1952).

Die Darstellungsformeln in Teil I (siehe dies. Zbl. 48, 74) werden auf die linearisierte Theorie der stationären Strömung reibungsloser kompressibler Flüssigkeiten angewendet. Ist  $\mathbf{U}$  die konstante Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,  $\boldsymbol{\zeta}$  der Wirbelvektor,  $\mathbf{v}$  die Störgeschwindigkeit,  $Q$  die Quelldichte,  $\mathbf{I}$  der Einheitsensor und  $a$  die Schallgeschwindigkeit, so gilt hier  $\nabla \wedge \mathbf{v} = \boldsymbol{\zeta}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{w} = Q$ ,  $\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}/a^2) \cdot \mathbf{v}$ . Je nachdem die Machsche Zahl  $M = |\mathbf{U}|/a < 1$  bzw.  $> 1$  ist, liegt der elliptische bzw. hyperbolische Fall vor. Spezielle Diskussion der Fälle der Wirbelfreiheit und der Quelfreiheit. *K. Maruhn.*

**Ievlev, V. M.:** Einige Fragen der hydrodynamischen Theorie des Wärmeinhalts bei einer Gasströmung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 87, 21—24 (1952) [Russisch].

• **Oswatitsch, Klaus:** *Gasdynamik*. Wien: Springer-Verlag 1952. XII, 456 S.

Bei dem großen Aufschwung, den die wissenschaftliche Tätigkeit auf dem Gebiet der Gasdynamik besonders im letzten Jahrzehnt genommen hat, fehlte bisher — zumindest im deutschen Sprachgebiet — eine zusammenfassende Darstellung des heutigen Standes in mehr physikalischer als mathematischer Betrachtungsweise. Verf. des Buches, der acht Jahre in Göttingen unter Prandtl arbeitete und heute in Schweden als Gasdynamiker tätig ist, hat es in vorzüglicher Weise verstanden, die Grundlagen und die technischen und wissenschaftlichen Anwendungen des Gasdynamik miteinander zu verbinden. Die Darstellung bleibt dabei nicht auf mathematische Idealisierungen beschränkt; beispielsweise werden für die Zustandsänderung im Stoß die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen und Dissoziations- und Ionisationsvorgänge berücksichtigt. Nach einer thermodynamischen Einleitung behandeln das 2. und 3. Kapitel die stationäre und nichtstationäre „Fadenströmung“ (nur von einer Ortsveränderlichen abhängige Strömungsform). Hierunter fallen vor allem Stoßvorgänge sowie die Strömung in Kanälen mit und ohne Energiezufuhr und mit Berücksichtigung der Reibung. Für die Überschall-Windkanaltechnik ist dabei das Problem des Kanals mit zwei Verengungen wichtig. Zu den instationären Problemen zählen Ausbreitung und Reflexion von Stößen im Rohr mit Anwendungen auf innerballistische Probleme und auf das in der Versuchstechnik benutzte Stoßwellenrohr. Zylindrische und kugelige Stöße werden sowohl in der Nähe des Störzentrums als auch in großer Entfernung davon untersucht. Bei der Ableitung allgemeiner Gleichungen führt der vom Verf. bevorzugte Weg über die Integralsätze der Bewegung (in Eulerscher und Lagrangescher Darstellung) zu einer klareren Auffassung insbesondere instationärer Vorgänge als das unmittelbare Aufstellen von Differentialgleichungen. Die Ähnlichkeitssätze werden in sehr allgemeiner Form unter Ein-schluß von instationären Vorgängen und Detonationsvorgängen abgeleitet. Die Gültigkeit des Kutta-Joukowski'schen Satzes wird für isentrope Strömungen allgemein nachgewiesen. Beziehungen für Widerstand und Schub werden in Integralform abgeleitet. Die Integralsätze der Bewegung finden im 5. Kapitel spezielle Anwendungen auf Mischvorgänge, Schaufelgitter und auf den Strahl- und Raketenantrieb. Die Grundgleichungen der räumlichen Strömung werden im 6. Kapitel auf ebene und rotationssymmetrische Strömungen spezialisiert und auf allgemeine krummlinige Koordinaten transformiert. Als spezielle Lösungen werden Quelle und Wirbel, spiralförmige Strömungen, die Prandtl-Meyersche Eckenströmung und kegelförmige Strömungen behandelt. Zu den Linearisierungen durch Legendre-, Molenbroek- und Tschaplygintransformation gesellt sich die Linearisierung bei Schräganströmung unter kleinem Winkel. Das 7.—9. Kapitel behandeln stationäre Unterschall-, Überschall- und Schalldurchgangsströmungen. Die Darstellung beginnt für Unter- und Überschall mit der Linearisierung bei schwach gestörter Parallelströmung, wobei die Lösungen als quell- und wirbelartige Singularitäten dargestellt werden können. Die Voraussetzungen der damit in Zusammenhang stehenden „Prandtl'schen Regel“ sind schon zuvor eingehend untersucht und zu Aussagen über den Pfeilflügeleffekt benutzt worden,



Eine Verbesserung der Prandtlschen Regel ergibt die Krahnische Methode, der das geometrische Mittel zwischen Stromdichte- und Geschwindigkeitsverteilung zugrunde liegt. Als weitere Verfahren zur Berechnung von Unterschallströmungen werden die Iteration nach Jansen-Raleigh, das Relaxationsverfahren von Southwell und die Hodographenverfahren dargestellt. Auf die Erwähnung und Wiedergabe spezifisch mathematischer Verfahren, wie z. B. die Bergmannsche Operatorenmethode und die Integration durch hypergeometrische Reihen, hat Verf. bewußt verzichtet. Bei Überschallströmungen treten schiefe Verdichtungsstöße hinzu, deren Reflexion an Wänden und freien Strahlgrenzen und deren Zusammentreffen unter Einfluß des Sonderfalles eines Gabelstoßes untersucht wird. Im Hinblick auf praktische Anwendungen im Überschall-Strahlantrieb wird auch die Hintereinanderfolge mehrerer schiefer Stöße („Stoßströmung“) mit kleinstem Ruhedruckverlust berechnet. Da Verf. das Hauptgewicht auf eine anschauliche Behandlung der physikalischen Probleme legt, ist der Begründung und Anwendung des Charakteristikenverfahrens in ebener und rotationssymmetrischer isentroper und anisentroper Strömung ein breiter Raum gewidmet. Ein dem Buch beigelegtes Charakteristikendiagramm für  $\kappa = 1,400$  in großem Maßstab wird bei der praktischen Anwendung nützliche Dienste leisten. Bei der Diskussion schallnaher Strömungen leisten die vom Verf. mitentdeckten Ähnlichkeitsgesetze wertvolle Dienste. Zur Darstellung lokaler Überschallgebiete führt Verf. wegen der Ungelöstheit vieler Probleme alle wichtigen Verfahren (Methode der Integralgleichungen, Relaxationsverfahren, Hodographenmethode) an. Das 10. Kapitel ist speziellen stationären und instationären räumlichen Strömungen gewidmet, insbesondere der linearisierten räumlichen Strömung um Tragflügel und instationären „Nachbarlösungen“ stationärer Strömungen. Wegen der Anwendung auf den schwingenden Tragflügel ist hier ein umfangreiches Forschungsgebiet an der Grenze zwischen Gasdynamik und Akustik entstanden, auf dessen eingehende Behandlung Verf. verzichten mußte. Als Anwendungsbeispiel einer instationären schallnahen Strömung wird der verzögert bewegte Keil bei Schallgeschwindigkeit untersucht. Das 11. Kapitel ist Strömungen mit Reibung, also insbesondere der „Mikrophysik“ des Verdichtungsstoßes und den Grenzschichten gewidmet, wobei auch die von Mangel entdeckten Beziehungen zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten dargestellt werden. Ein abschließendes Kapitel gibt einen gedrängten Überblick über die Versuchstechnik, Kanalkorrekturen und die Analogien (Schaumströmung, Wasserströmung mit freier Oberfläche und elektrische Analogien). Im Anhang ist eine ausführliche Tabelle zum Charakteristikendiagramm und eine Zusammenstellung von Integralen und Integralformeln enthalten. Die jedem Kapitel beigelegten sehr zahlreichen Literaturnachweise machen das Buch zu einem unentbehrlichen Nachschlagewerk.

W. Wuest.

Leslie, D. C. M.: Supersonic theory of downwash fields. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 292—300 (1952).

Zur Berechnung des Abwinds im Nachlauf eines dünnen tragenden Flügels  $F$  in Überschallströmung bedient man sich allgemein (der Schwierigkeit des Problems wegen die physikalischen Verhältnisse vergrößernd) der linearisierten Theorie. Der Strömungsraum wird auf ein Cartesisches Koordinatensystem  $Oxyz$  bezogen,  $F$  nur wenig aus der Ebene  $z = 0$  herausbewegt gedacht,  $x$  in Strömungsrichtung,  $y$  nach Steuerbord positiv. Die Randbedingungen werden in der senkrechten Projektion  $G$  von  $F$  auf  $z = 0$  erfüllt. Ist das Störgeschwindigkeitspotential  $\varphi$  in  $z = 0$  bekannt (dies Problem wird dabei als bereits gelöst vorausgesetzt), so ist also  $\varphi(x, y, +0)$  auf  $G$  gegeben und im Nachlauf  $N$  (Parallelstreifen zur  $x$ -Achse in  $z = 0$  mit der Breite  $b$  [= Spannweite von  $F$ ]) als Funktion nur von  $y$  mit stetigem Anschluß an seine Werte auf  $G$  gleichfalls bekannt. Aus Hadamards Darstellungsformel 2. Art [siehe den zusammenfassenden Bericht zur Überschalltragflügeltheorie des Ref. in Z. f. Flugwissenschaft 1, 62—79 (1953)] findet G. N. Ward [Aeronaut. Quarterly 1, 35—38 (1949)] durch partielle Integration in Strömungsrichtung dann die Darstellung von  $\varphi$  im ganzen Raum

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{z}{\pi} \iint_E \frac{u(\xi, \eta, +0) (x - \xi) d\xi d\eta}{[(y - \eta)^2 + z^2] \sqrt{(x - \xi)^2 - B^2(y - \eta)^2 - B^2 z^2}}$$

[ $u = \varphi$ ,  $B = \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $M$  Anblase-Machzahl,  $E$  der in  $G$  liegende Teil des Abhängigkeitsgebietes des Aufpunktes  $P(x, y, z)$ ], die er allgemein zur Abwindberechnung auf  $N$  vorschlägt

$\left( u_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$  und auf den Dreiecksflügel mit reinen Unterschallvorderkanten anwendet. —

In der vorliegenden Note formt Verf. (1) abermals durch partielle Integration nach  $\eta$  um und entwickelt die  $z$ -Ableitung der entstehenden  $\varphi$ -Darstellung asymptotisch nach  $x$ . Er gewinnt dadurch vereinfachte Näherungsformeln für den Abwind in einiger Entfernung hinter  $F$ , die durch Vergleichsrechnungen geprüft werden sollen. — Speziell für kegelige Felder enthält seine (noch nicht asymptotisch entwickelte) Formel die bekannte Abwindformel hinter einem Rechteckflügel in der Trefftz-Ebene ( $x \rightarrow \infty$ ), die P. A. Lagerstrom und M. E. Graham 1947 mittels der Methode der „lift-cancellation“ gewonnen hatten (Douglas Aircraft Co., Rep. SM 13007). — Auch die vereinfachte Überschallabwindrechnung von H. Mirels und R. C. Haefeli [NACA Rep. 983 (1950)], mittels einer Ersetzung von  $F$  durch eine geeignete in  $F$  gelegte tragende Linie, steckt bis auf Glieder  $O(x^{-3})$  in der asymptotischen Näherungsformel des Verf.

H. Behrbohm.

**Wylly, Alexander:** A second-order solution for an oscillating two-dimensional supersonic airfoil. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 685—696, 704 (1952).

Betrachtet wird die harmonische Drehschwingung (um einen vor der Vorderkante gelegenen Drepunkt) eines beliebigen, nicht zu dicken Profils in ebener, wirbel- und reibungsfreier Strömung eines vollkommenen Gases bei kleiner Amplitude und reduzierter Frequenz  $\omega$ . Wird das Störpotential in eine Potenzreihe nach  $\alpha$  entwickelt:  $\Phi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} \varphi_{\nu+1}$ , so genügt  $\varphi_1$  einer

homogenen Wellengleichung, die Verfasser näherungsweise durch Reihenentwicklung nach  $\omega$  bis zum Glied 6-ter Ordnung geschlossen löst (einschl. der zugehörigen Randbedingungen erster Ordnung in  $\alpha$ ). Diese Näherungslösung  $\varphi_1$  stimmt im Bereich  $0 \leq \omega \leq 1,3$  bis auf wenige Prozent mit der exakten Lösung des nach  $\alpha$  linearisierten Problems überein. Das Glied  $\varphi_2$  genügt derselben, aber inhomogenen Wellengleichung, deren inhomogener Bestandteil von  $\varphi_1$  abhängt und die Verf. ebenfalls näherungsweise geschlossen löst, indem er für  $\varphi_1$  die obige Näherung, aber nur bis zur zweiten Ordnung in  $\omega$ , einsetzt. Das Resultat ist eine Näherungslösung von zweiter Ordnung in Anstellwinkel (und Dicke) und Frequenz. Es zeigt sich, daß der Einfluß von  $\varphi_2$  beträchtlich sein und die Ergebnisse der bisherigen linearen Theorie vollständig ändern kann, z. B. wird in einem durchgerechneten Beispiel das anfachende Moment immer kleiner mit wachsender Dicke derart, daß von 4,5% Dickenverhältnis ab überhaupt keine Instabilität mehr auftritt im Gegensatz zur linearen Theorie. Für ein 7,5% dickes Profil und Machzahlen zwischen 1,2 und 1,5 stimmt das gerechnete Dämpfungsmoment mit dem gemessenen qualitativ überein (wenn es auch zahlenmäßig noch zu klein ist), während die lineare Theorie völlig unbrauchbare Werte liefert. [Sinnstörende Druckfehler: z. B.  $\alpha V_0$  statt  $\dot{\alpha} V_0$  im letzten Glied von (17) und  $G = 1/2\beta^3$  statt  $G = \beta^2/2$  in den Formeln vor (17)]. *J. Weissinger.*

**Yeh, Hsuan:** The development of cascade profiles for high subsonic potential flows. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 630—638 (1952).

Im Anschluß an Lin [*J. Math. Physics* **28**, 117—130 (1949)] wird eine einfache Methode zur Berechnung von Gitterprofilen für hohe Unterschallgeschwindigkeiten bei vorgegebenen Ein- und Ausflußbedingungen sowie näherungsweise vorgegebener Gitterkonstante (Profil-Tiefe durch Abstand) beschrieben. Das Verfahren setzt die Kármán-Tsiensche Linearisierung der Druck-Volumen-Beziehung voraus und beruht auf einer konformen Abbildung des Kreises auf ein Gitter; für die zweckmäßige Berechnung der Abbildungsparameter werden detaillierte Anweisungen gegeben. Zahlenbeispiele zeigen, daß die genannte Linearisierung keine wesentlichen Fehler verursacht und daß einige der Ergebnisse mit experimentellen Erfahrungen übereinstimmen. *J. Weissinger.*

**Dean, W. R.:** Slow motion of a viscous liquid near a half-pitot tube. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 149—167 (1952).

Verf. behandelt die zähe Strömung längs einer unendlich langen ebenen Platte ( $-\infty \leq x \leq +\infty$ ), zu der eine zweite Platte in geringem Abstand  $y = b$  parallel angeordnet ist, die von  $x = 0$  (C) bis  $x = \infty$  (D) reicht. Längs der ersteren Platte AB ist eine gleichförmige Scherströmung in der positiven  $x$ -Richtung angenommen, die durch die Platte CD gestört wird. Durch einen geeigneten Ansatz für die Stromfunktion wird erreicht, daß die Tangentialgeschwindigkeit längs CD möglichst klein wird. Ziel der theoretisch verwickelten Untersuchung ist eine Aussage über den Druckverlauf längs AB. Es ergibt sich ein Druckanstieg, der größtenteils bereits vor  $x = 0$  erfolgt, bei kleinen Werten  $x > 0$  sein Maximum von  $1,75 \mu V/b$  erreicht und danach schwach abfällt auf den Enddruck  $1,67 \mu V/b$ .  $V$  ist dabei der Betrag der Scherströmung bei  $y = b$  weit vor der Öffnung, also im ungestörten Bereich  $x \rightarrow -\infty$ , und  $\mu$  die Zähigkeit der Flüssigkeit. — Die Arbeit bezweckt die theoretische Aufklärung eines von G. I. Taylor [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **164**, 476—490 (1938)] bei Versuchen an rotierenden Zylindern empirisch eingeführten Korrekturfaktors. Die Messungen wurden — um sehr nahe an der Wand arbeiten zu können — mit einem Halb-Pitot-Rohr ausgeführt, also einem halbkreisförmigen an der Wand aufliegenden Pitotrohr, dessen andere Hälfte gewissermaßen an der Wand gespiegelt zu denken ist. *F. Riegels.*

**Comolet, Raymond:** Écoulement radial d'un fluide compressible visqueux entre deux plans parallèles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 1190—1193 (1952).

Die radiale Strömung zwischen zwei Scheiben geringen Abstandes wird unter Vernachlässigung der Trägheitsglieder behandelt. Dabei erscheint das Temperaturproblem wenig klar herausgearbeitet. Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß neben dem Druck auch die Dichte nur Funktion des Radius ist. Für verschiedene Polytropen-koeffizienten werden Durchflußmengen-Formeln aufgestellt. *K. Oswatitsch.*



**Comolet, Raymond:** Étude expérimentale d'un écoulement radial de fluide visqueux entre deux plans parallèles. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1366—1369 (1952).

Die in einer vorangegangenen Arbeit (siehe vorsteh. Referat) abgeleiteten Formeln werden in Versuchen geprüft und die gewonnenen Gesetzmäßigkeiten bestätigt. Der noch offen gelassene Polytropenexponent wird im Versuch als jener der Isotherme bestimmt. *K. Oswatitsch.*

**Shen, Shan-Fu:** An estimate of viscosity effect on the hypersonic flow over an insulated wedge. J. Math. Physics **31**, 192—205 (1952).

Bei der Anströmung eines schlanken Keiles mit hohen Überschallgeschwindigkeiten bildet der anliegende Verdichtungsstoß mit der Keilfläche einen sehr kleinen Winkel. In einem gewissen Bereich hinter der Keilspitze ist daher die Schichtdicke zwischen Wand und Verdichtungsstoß sehr gering, so daß der Zähigkeitseinfluß nicht mehr vernachlässigbar ist. Da ähnliche Verhältnisse wie bei der Strömungsgrenzschicht vorliegen, sind die dort entwickelten Rechenverfahren mit abgeänderten Randbedingungen auch auf das vorliegende Problem anwendbar. Verf. benutzt zur näherungsweisen Berechnung ein Integralsatzverfahren ähnlich dem „Polhausenverfahren“, wobei ein lineares Geschwindigkeitsprofil angenommen ist. Die so gewonnene Lösung zeigt allerdings nicht genau das richtige asymptotische Verhalten, nämlich Übergang in die reibungslose Stoßwelle bei genügendem Abstand von der Keilspitze. Die Stoßwelle ist gekrümmt und geht allmählich in die Richtung der reibungslosen Stoßwelle über. Als Wirkungsbereich der Zähigkeit kann man die Strecke definieren, in der sich dieser Übergang vollzieht. Als Sonderfall werden die Verhältnisse an einer ebenen Platte berechnet. Die zunächst für wärmeisolierte Wand und  $Pr = 1$  durchgeführte Berechnung wird schließlich auch auf allgemeinere Fälle erweitert. *W. Wuest.*

**Broer, L. J. F.:** On the theory of shock structure. I. Appl. sci. Research A **3**, 349—360 (1952).

Die innere Struktur von Verdichtungsstößen wird untersucht. Dabei werden zu den Gliedern der Navier-Stokes-Gleichungen, die nur für sehr schwache Stöße ausreichen, noch Glieder hinzugenommen, welche die molekulare Struktur des Gases berücksichtigen. *K. Oswatitsch.*

**Mitchell, A. R. and Francis McCall:** The rotational field behind a bow shock wave in axially symmetric flow using relaxation methods. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **63**, 371—380 (1952).

Erweiterung einer früheren Arbeit von Mitchell (dies. Zbl. **44**, 409) vom zweidimensionalen auf den rotationssymmetrischen Fall. Die Machsche Zahl der Anströmung ist 1,8. *H. Wendt.*

**Corkan, R. H. and A. T. Doodson:** Free tidal oscillations in a rotating square sea. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **215**, 147—162 (1952).

Die Eigenschwingungen eines quadratischen, rotierenden Sees werden numerisch berechnet (Differenzenverfahren). Einige Näherungsformeln für die Eigenperioden werden diskutiert. *W. Kertz.*

## Wärmelehre:

**Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot:** A discussion of the first law of thermodynamics for open systems. Physica **18**, 780—790 (1952).

Der Begriff der Wärme und damit der Sinn des ersten Hauptsatzes in offenen Systemen, die mit ihrer Umgebung außer Arbeit und Wärme noch Materie austauschen, wird analysiert. Er hängt eng mit dem Begriff des Wärmeflusses in der Thermodynamik zusammen. Es wird festgestellt, daß der erste Hauptsatz für offene Systeme zum Teil eine Definition ist. Verschiedene Formulierungen für ihn



müssen als verschiedene Definitionen der Wärmezufuhr in offenen Systemen angesehen werden, die sich nicht in ihrer Richtigkeit sondern nur in ihrer Zweckmäßigkeit unterscheiden.

*J. Meixner.*

**Meixner, J.: Zur Theorie der Wärmeleitfähigkeit reagierender fluider Mischungen.** Z. Naturforsch. **7a**, 553—559 (1952).

Mit Hilfe der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse wird der Wärmeleitvorgang in chemisch reagierenden fluiden Mischungen behandelt. Außer der gewöhnlichen Wärmeleitung tragen die Diffusion und Thermodiffusion der Reaktionsenergie und der Diffusionsthermoeffekt zum Energiestrom bei. Es entsteht eine Verallgemeinerung der bekannten Nernstschen Beziehung für die Wärmeleitfähigkeit dissozierender Gase. Der Einfluß der Thermodiffusion und der Reaktionsgeschwindigkeit auf die Wärmeleitfähigkeit werden größenordnungsmäßig abgeschätzt.

*L. Waldmann.*

**Popoff, Kyrille: Sur la thermodynamique des processus irréversibles. II.** Z. angew. Math. Phys. **3**, 440—448 (1952).

**Greene, Richard F. and Herbert B. Callen: On a theorem of irreversible thermodynamics. II.** Phys. Review, II. Ser. **88**, 1387—1391 (1952).

Die in einer früheren Arbeit gewonnenen Ergebnisse über die Admittanz eines thermodynamischen Systems (dies. Zbl. **47**, 193) werden auf den Fall der Schwankungen von mehr als einem extensiven Parameter erweitert. Der bedingte Erwartungswert für einen Parameter  $\xi_j$  unter der Voraussetzung, daß die Parameter zu einer um  $\tau$  früheren Zeit die Werte  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k$  hatten, und die spektrale Dichte der spontanen Schwankungen werden berechnet und durch die Admittanzmatrix ausgedrückt, die hier an die Stelle der früheren einfachen Admittanzfunktion tritt. Eine für ihren Realteil gültige Symmetrieeigenschaft ist eine Verallgemeinerung der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen. Die Methode ist makroskopisch thermodynamisch und wird für adiabatische wie für mikrokanonische Bedingungen durchgeführt.

*J. Meixner.*

**Staverman, A. J. and F. Schwarzl: Thermodynamics of visco-elastic behaviour (model theory).** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B **55**, 474—485 (1952).

Thermodynamische Eigenschaften viskoelastischer Stoffe werden an mechanischen Modellen, bestehend aus Federn und Reibungselementen (dashpots), studiert, wobei die freie Energie der elastischen Energie der Federn, die Energiedissipation der Reibungsarbeit zugeordnet wird. Zunächst wird gezeigt, daß bei einfachen Relaxations- oder Kriechexperimenten — nämlich vom Gleichgewichtszustand aus eine plötzlich eingeschaltete zeitlich konstante Dehnung oder Spannung — die thermodynamischen Funktionen zur Zeit  $t$  einfach mit der Relaxations- oder Kriechfunktion zur Zeit  $2t$  zusammenhängen, unabhängig vom Relaxationsmechanismus. Dann wird bewiesen, daß verschiedene mechanische Modelle mit gleichem äußerem zeitlichem Verhalten hinsichtlich Kraft und Dehnung auch hinsichtlich der in den Federn gespeicherten und in den Reibungselementen dissipierten Energie in gleicher Weise von der Zeit abhängen, also auch thermodynamisch äquivalent sind. Diese Äquivalenz beruht wesentlich auf der Annahme starrer Verbindungen zwischen den Elementen des Modells und der Nichtberücksichtigung von Trägheitskräften.

*J. Meixner.*

**Staverman, A. J. and F. Schwarzl: Non-equilibrium thermodynamics of visco-elastic behaviour.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B **55**, 486—492 (1952).

Das Verhalten viskoelastischer Körper bei Deformationen im linearen Bereich wird durch eine willkürliche Anzahl von unabhängigen molekularen Prozessen beschrieben, und es werden die Zusammenhänge zwischen dem Zeitverhalten der freien Energie und der Energiedissipation einerseits, der Relaxations- und Kriechfunktion andererseits bei einfachen Relaxations- oder Kriechexperimenten — siehe vorsteh.

Referat, aber nun ohne Bezug auf irgendwelche Modellvorstellungen — hergeleitet. Die Methode ist im wesentlichen die thermodynamische Relaxationstheorie. Auf ihren Zusammenhang mit dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip wird hingewiesen. Die Informationen, welche aus rheologischen Experimenten über die molekularen Prozesse erhalten werden können, werden diskutiert. *J. Meixner.*

**Grad, Harold:** Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of integrals. Commun. pure appl. Math. 5, 455—494 (1952).

Die Erhaltungssätze der statistischen Mechanik, der Thermodynamik und der Dynamik fluider Medien werden so verallgemeinert, daß sie alle zeitunabhängigen Integrale der klassischen Punktmechanik umfassen. — Für eine Verallgemeinerung der statistischen Mechanik auf Systeme, bei denen neben dem Energieintegral noch andere Integrale der kanonischen Gleichungen existieren, sind zwei fundamentale Postulate notwendig: 1. die a priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum ist absolut stetig, d. h. es besteht keine endliche Wahrscheinlichkeit für einen Unterraum geringerer Dimension; 2. die Anzahl der zeitunabhängigen Integrale ist klein gegen die Zahl der Freiheitsgrade. Als erstes wird der Begriff der kanonischen Verteilung mit einer Modifikation der Khinchinschen Methode verallgemeinert. Jeder Observablen (d. i. jedem Integral) wird eine verallgemeinerte Temperatur zugeordnet mit der Eigenschaft, daß im Gleichgewicht jede Temperatur des Systems gleich der entsprechenden Temperatur der Umgebung ist. (Ist beispielsweise der Impuls des Systems ein Integral, so entspricht dies der beinahe trivialen Aussage, daß System und Umgebung im Gleichgewicht neben gleicher Temperatur im üblichen Sinne auch gleiche Geschwindigkeit besitzen.) Auch läßt sich eine verallgemeinerte Entropie definieren, die wie die übliche Entropie im abgeschlossenen System nicht abnehmen kann. Vier charakteristische Beispiele werden ausführlich behandelt: 1. Ein vollkommenes Gas mit Punktmolekülen und der Energie als einzigem Integral. 2. Dasselbe mit Energie und Impuls als Integralen. 3. Dasselbe mit Energie, Impuls und Drehimpuls als Integralen. 4. Ein vollkommenes Gas mit mehratomigen Molekülen und denselben drei Integralen. Die Ergebnisse werden schließlich für die Dynamik fluider Medien und ihre Behandlung mit der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse nutzbar gemacht. Besonders interessante Ergebnisse fließen hierbei aus der Betrachtung des Drehimpulsintegrals. Der makroskopische Drehimpuls eines fluiden Mediums ist eine unabhängige Größe und nicht gleich dem integrierten Moment des Linearimpulses. Der Spannungstensor ist im Nichtgleichgewicht im allgemeinen asymmetrisch, wenn auch der asymmetrische Anteil in der Regel sehr klein ist.

*J. Meixner.*

**Temperly, N. N. V.:** Statistical mechanics and the partition of numbers. II. The form of crystal surfaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 683—697 (1952).

Teil I siehe dies. Zbl. 41, 547. Verf. untersucht an einem zweidimensionalen Modell, bei dem die energetischen Verhältnisse bezüglich der Bindung im Kristall stark schematisiert werden müssen, die wahrscheinlichste Form, in der beim Kristallwachstum einspringende rechte Winkel ausgefüllt werden. Es werden einfache kubische Kristalle dabei betrachtet. Weiterhin werden der Zuwachs an Energie (Oberflächenenergie) und an Entropie (Zahl der möglichen erlaubten Anlagerungen — thermodynamische Wahrscheinlichkeit) abgeschätzt, der mit der Bildung eines Grates auf einer anfänglich ebenen Kristalloberfläche verbunden ist. Die Betrachtung der freien Energie erlaubt eine Abschätzung derjenigen Temperatur (als Funktion der Oberflächenenergie, die hier als Parameter eingeht, der empirisch zu bestimmen wäre), bei der eine Gratabbildung beginnen kann. Verf. kann die thermodynamische Wahrscheinlichkeit in einfache Beziehung setzen zum zahlentheoretischen Problem der Darstellbarkeit großer Zahlen durch Summen von gewissen Bedingungen unterworfenen Zahlen. Für die thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten werden erzeugende Funktionen konstruiert. Zur Berechnung der thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten aus den erzeugenden Funktionen durch Konturintegrale wird die Sattelpunktmethode angewendet. Parallel dazu behandelt Verf. die Gratabbildung nach einem Verfahren, das L. Onsager beim zweidimensionalen Isingschen Modell des Ferromagneten angewendet hatte. Die freie Energie wird damit in geschlossener Form darstellbar. Verf. führt auch Abschätzungen für ein sehr stark schematisiertes dreidimensionales Modell durch.

*G. U. Schubert.*

**Linnik, Ju. V.:** Bemerkungen zur klassischen Ableitung des Maxwell'schen Gesetzes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 1251—1254 (1952) [Russisch].

Bekanntlich kann man bei der Ableitung des klassischen Maxwell'schen Verteilungsgesetzes von einer Funktionalgleichung der Geschwindigkeitskomponenten ausgehen. Die Herleitung dieser Funktionalgleichung enthält als wesentliche Voraussetzung die Richtungsunabhängigkeit, sowie die statistische Unabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten, oder anders formuliert, die statistische Unab-

hängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem. Verf. zeigt, daß diese physikalische Hypothese zwar hinreichend, jedoch nicht notwendig ist. Er diskutiert unter Verwendung einiger Lehrsätze der mathematischen Statistik die Frage, inwieweit die Zahl der für die Ableitung notwendigen physikalischen Hypothesen auf ein Minimum reduziert werden kann, indem man das Schwergewicht der Ableitung auf rein mathematische Tatsachen legt und überflüssige physikalische Voraussetzungen vermeidet.

*G. Ecker.*

**Okayama, Taisuke:** Generalization of statistics. Progress theor. Phys. 7, 517—534 (1952).

Verf. verallgemeinert die Bose- bzw. Fermi-Statistik in der Weise, daß er Systeme betrachtet, die aus Teilchen bestehen, welche ihrerseits aus mehreren Fermiteilchen zusammengesetzt sind. Der Bosestatistik entspricht die identische Darstellung der symmetrischen Gruppe, der Fermistatistik die alternierende. Die verallgemeinerten Statistiken entsprechen den weiteren Darstellungen, die sich beim Ausreduzieren der symmetrischen Gruppe ergeben.

*G. U. Schubert.*

**Klein, Martin J.:** The ergodic theorem in quantum statistical mechanics. Phys. Review, II. Ser. 87, 111—115 (1952).

Ein ergodisches Theorem ist eine Aussage über Gleichheit von Zeit- und Scharmitteln physikalischer Eigenschaften eines Systems bzw. einer Gibbsschen Gesamtheit identischer Systeme. Für die klassische statistische Mechanik besteht Ergodizität unter der Voraussetzung der „metrischen Transitivität“, d. h. daß die einzigen Konstanten der Bewegung des Systems konstante Funktionen im Phasenraum sind. In der quantenstatistischen Mechanik läßt sich eine analoge Bedingung für die Ergodizität eines Systems, das in schwacher Wechselwirkung mit seiner Umgebung steht, herleiten. Notwendig und hinreichend für sie ist, daß sich alle zeitlich invarianten Operatoren für das Gesamtsystem (System + Umgebung) auf konstante Vielfache des Einheitsoperators reduzieren, wenn ihre Projektion auf das betrachtete System selbst gebildet wird. Wesentliche Voraussetzung für den Beweis ist, daß die Wechselwirkung des Systems mit seiner Umgebung nur Übergänge des Systems innerhalb eines schmalen Energiebereiches zuläßt. Annahmen über ein „molekulares Chaos“ werden nicht gemacht.

*J. Meixner.*

**Itô, Hirosi:** On the density matrix in Hartree-field. I. Progress theor. Phys. 7, 406—416 (1952).

Verf. stellt die Dichtematrix für ein System von vielen Teilchen im Wärmebad bestimmter Temperatur auf. Die Wechselwirkung der Teilchen des Systems ersetzt er durch ein Hartreefeld, worin jedes Teilchen dieselben Energiewerte und Eigenfunktionen besitzt. Er gewinnt die Dichtematrix mit Hilfe einer Störungsrechnung 1. Ordnung für entartete Systeme und gruppentheoretischer Überlegungen. Die Störungsrechnung führt zu einer Klassifizierung der Wellenfunktionen des Mehrkörperproblems nach irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe und ergibt einen Dichteausdruck für jede Verteilung der vielen Teilchen über die Zustände des Einzelteilchens. Durch Summieren über alle zur selben Klasse der symmetrischen Gruppe gehörenden Dichteausdrücke erhält Verf. die Dichtematrix für das dieser Klasse physikalisch zugeordnete Termsystem des Vielkörperproblems. Sukzessive Integration eines Diagonalglieds der Dichtematrix über die Koordinaten der Teilchen ergibt Dichteausdrücke mit immer weniger Koordinaten und führt schließlich nach Integration über alle Koordinaten zur Zustandssumme. Alle Ergebnisse des Verf. stimmen mit denjenigen einer Abhandlung des Referenten (dies. Zbl. 16, 93) über diesen Gegenstand überein; er geht bei deren Ableitung jedoch den logisch befriedigenderen, mathematisch komplizierteren, umgekehrten Weg.

*W. Kofink.*

**Callen, Herbert B., Murray L. Barasch and Julius L. Jackson:** Statistical mechanics of irreversibility. Phys. Review, II. Ser. 88, 1382—1386 (1952).



Untersucht wird ein System mit der Hamilton-Funktion  $H_0$ , auf welches eine Störung  $\sum_k V_k(t) \cdot Q_k(\dots q_r, p_r \dots)$  einwirkt. Die  $V_k(t)$  messen die Stärke der einwirkenden Störungen und spielen die Rolle von treibenden Kräften. Sind die  $V_k(\omega)$  die Fourier-Komponenten von  $V_k(t)$ , die  $\dot{Q}_j(\omega)$  die Fourier-Komponenten des Erwartungswertes von  $\dot{Q}_j(t)$ , so ergeben sich lineare Beziehungen  $\dot{Q}_j(\omega) = -\sum_k Y_{jk}(\omega) V_k(\omega)$  aus einer Störungsrechnung erster Ordnung unter der Voraussetzung eines dichten Spektrums der Energieeigenwerte. Ferner werden die Erwartungswerte  $\langle Q_i Q_j \rangle$  berechnet und durch die Admittanzmatrix  $Y_{jk}(\omega)$  ausgedrückt. Schließlich werden die Symmetrieeigenschaften der Admittanzmatrix bei Vertauschung der Indices und gleichzeitiger Ersetzung des Vektorpotentials eines eventuellen vorhandenen Magnetfeldes durch seinen entgegengesetzten Wert in Zusammenhang mit den Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen gebracht. Die Anwendung des Symmetrietheorems auf stationäre Prozesse wird kurz diskutiert.

*J. Meixner.*

**Cox, R. T.:** Brownian motion in the theory of irreversible processes. Reviews modern Phys. 24, 312—320 (1952).

In den üblichen Darstellungen der Theorie der Brownschen Bewegung werden eine Zufallsannahme und das makroskopische Gesetz der inneren Reibung zugrunde gelegt und daraus wird eine statistische Beschreibung der Bewegung gewonnen. Die vorliegende Arbeit schlägt einen konsequenten Weg ein, indem sie von Anfang an die Prinzipien der statistischen Mechanik anwendet, und zwar in einer bereits früher (dies. Zbl. 40, 414) entwickelten, für irreversible Prozesse abgewandelten Form der Gibbsschen Methode. Im einzelnen werden die Kramerssche Gleichung hergeleitet, ein Teilchen im homogenen Feld und der harmonische Oscillator behandelt, die Fourier-Analyse der Brownschen Bewegung gegeben und die Brownsche Bewegung mit mehreren Freiheitsgraden diskutiert.

*J. Meixner.*

**Ono, Syû:** Statistical mechanics of phase transition. Progress theor. Phys. 8, 1—12 (1952).

Verf. kritisiert J. E. Mayers Theorie [Statistical Mechanics, Kap. 13, 14; J. Chem. Phys. 10, 629 (1942)] über die Beziehung der Phasenübergänge zu den singulären Punkten einer Funktion, die durch analytische Fortsetzung einer Reihenentwicklung der Zustandssumme bzw. der Atomdichte nach einem Parameter entsteht, den Mayer Flüchtigkeit und Verf. Aktivzahldichte nennt. Mayer habe weder seine Aussage mathematisch bewiesen, noch den Charakter dieser Singularitäten bestimmt; es bleibe unerwähnt, welcher Zweig der analytischen Funktion im Falle ihrer Mehrwertigkeit die wirkliche Dichte darstellt. Verf. untersucht die Singularitäten gründlich, um die richtige statistische Deutung der Phasenübergänge vornehmen zu können. Durch Verknüpfung der Mayerschen Methode der Reihenentwicklung mit einer anderen, von Kramers und Wannier stammenden, schlüssigeren Matrizenmethode versucht er die ungeklärten Punkte der Mayerschen Schwarmtheorie der Phasenübergänge zu klären. Er zeigt, daß zwei Fälle möglich sind: 1. Die Atomdichte ist eine einzige analytische Funktion der Aktivzahldichte wenigstens auf der positiven reellen Achse und ihre erste Singularität ist ein wesentlich singulärer Punkt; dann findet der Phasenübergang an diesem Punkt statt. 2. Die Atomdichte besteht aus mehreren analytischen Funktionen der Aktivzahldichte; dann kann der Phasenübergang an einem analytisch nicht singulären Punkt stattfinden.

*W. Kofink.*

**Davenport jr., W. B., R. A. Johnson and D. Middleton:** Statistical errors in measurements on random time functions. J. appl. Phys. 23, 377—388 (1952).

Es werden die statistischen, quadratischen Fehler untersucht, die bei der Messung von Zeitmittelwerten auftreten, wenn die verfügbare Meßzeit nicht unendlich ist, wobei es sich um die Messung der statistischen Eigenschaften von zeitlich zufallsmäßig verlaufenden Größen handelt (z. B. Rauschspannungen usw.). Es wird unter-

sucht 1. das kontinuierliche Zeitmittel  $\frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt$ , 2. die Summation diskreter Amplituden  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z(n, T_0)$ , 3. das Glätten durch Tiefpaßfilter (z. B. Integratoren,

RC-Filter, Gleichstrommesser). Die Theorie wird angewendet auf die Messung der Autokorrelationsfunktion und des Leistungs-Frequenz-Spektrums bei gleicher Genauigkeit. In vielen Fällen scheint die Analyse mit einem Korrelator zeitsparender zu sein als mit einem Frequenzanalysator. Aus der Autokorrelationsfunktion wird in bekannter Weise durch Fouriertransformation das Frequenzspektrum gewonnen. Besonders bei Maschinen, die zu diesem Zweck gebaut worden sind, scheint dieser Zeitfaktor wichtig zu sein.

*W. O. Schumann.*

**Jackson, Julius L.:** A note on „irreversibility and generalized noise“. Phys. Review, II. Ser. 87, 471—472 (1952).

Callen und Welton (dies. Zbl. 44, 412) haben ein „Schwankungs-Zerstreuungs-Theorem“ aufgestellt. Dieses Theorem verbindet die spontanen Schwankungen um das Gleichgewicht in einem thermodynamischen System mit einem „verallgemeinerten Widerstand“, welcher sich gegenüber einer „verallgemeinerten Kraft“ bemerkbar macht, wenn das System in einem irreversiblen Prozeß beansprucht wird. Das Theorem ist eine Verallgemeinerung der Nyquistformel für den Johnsonseffekt auf andere, aber analoge physikalische Erscheinungen. Die Nyquistformel gibt den Zusammenhang zwischen den Spannungsschwankungen an den Enden eines elektrischen Leiters auf vorgegebener Temperatur und dem Widerstand des Leiters, den er bei einer angelegten Spannung entsprechend dem Ohmschen Gesetz, also bei einem irreversiblen Prozeß, zeigt. Das Theorem von Callen und Welton formuliert den Zusammenhang zwischen dem Realteil des „Leitwerts“ mit der irreversibel zerstreuten Leistung in Anwesenheit einer äußeren „Kraft“. Verf. berechnet den komplexen Leitwert unter den gleichen Voraussetzungen. Er bestätigt die Formel von Callen und Welton für den Realteil und erhält durch seine Mitberechnung des Imaginärteils einen neuen Ausdruck für den phasenverschobenen Anteil des Leitwerts eines zerstreuen Systems. Bei seiner Ableitung benutzt er die Störungsrechnung 1. Näherung für ein zeitlich periodisch schwach gestörtes, quantenmechanisches System, das ein kontinuierliches Eigenwertspektrum besitzt.

*W. Kofink.*

**Middleton, David:** On the distribution of energy in noise- and signal-modulated waves. II. Simultaneous amplitude and angle modulation. Quart. appl. Math. 10, 35—56 (1952).

Es wird die Energieverteilung einer Trägerwelle untersucht, die gleichzeitig durch 2 normale Zufallsgeräuschwellen amplituden- und phasen-moduliert ist. Dabei sollen die beiden Geräuschwellen relativ zueinander um die Zeit  $t_0$  verschoben, aber sonst kohärent sein. Das Problem ist für die Geräuscherzeugung in den üblichen Magnetronröhren von Bedeutung, oder auch für den Fall, daß dieses modulierende Signal als ein vereinfachtes Modell eines Sprachsignals gilt. Das Wesentliche dieses Problems ist, daß die beiden Geräuschstörungen zueinander korreliert sind. Es entsteht dadurch ein unsymmetrisches Leistungsspektrum relativ zur Trägerfrequenz, das nicht vorhanden ist, wenn keine Korrelation zwischen Amplituden- und Impulsmodulation vorhanden ist. Symmetrische Verteilungen können bei speziellen Werten der relativen Verzögerung  $t_0$  zwischen Amplituden- und Phasenmodulation auftreten. (Teil I s. dies. Zbl. 47, 443.)

*W. O. Schumann.*

**Zadeh, Lotfi A.:** On the theory of filtration of signals. Z. angew. Math. Phys. 3, 149—156 (1952).

Es werden einige Gesichtspunkte des Problems der Trennung von Information und Rauschen mit linearveränderlichen Filtern erörtert. Eine Theorie dieser Filter ist angegeben. Ein Filter  $N$  ist „ideal“, wenn es gleichwertig ist zu einer Ketten-schaltung von zwei Filtern, wobei jedes mit  $N$  identisch ist. Im allgemeinen können Informations- und Rauschgemische mit idealen Filtern getrennt werden, wenn die Gemische unzusammenhängende Mannigfaltigkeiten im Signalraum umfassen.

*W. O. Schumann.*

**Rubinštejn, L. I.:** Über die Dynamik des Verdampfens flüssiger Gemische, die dem Raoultischen Gesetz gehorchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 357—360 (1952) [Russisch].

•**Kourganoff, V. with the collaboration of I. W. Busbridge:** Basic methods in transfer problems. Radiative equilibrium and neutron diffusion. (International Series of Monographs on Physics.) Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press 1952. XV, 282 p. 35 s. net.

Das vorliegende Werk bedeutet eine wertvolle Ergänzung oder besser Vorbereitung zu der vor 2 Jahren erschienenen Monographie von Chandrasekhar (Radiative Transfer, Oxford 1950, dies. Zbl. 37, 432). Mehr im Charakter eines Lehrbuches, bietet es eine ausgezeichnete und übersichtliche Darstellung der mathematischen Methoden zur Lösung der Transportgleichungen. Diese werden — unter Verzicht auf die vielseitigen physikalischen Aspekte des Problems — an Hand der Lösung lediglich eines einfachen Beispiels, des Milneschen Problems des Strahlungsgleichgewichtes einer „grauen“ (Absorptionskoeffizient frequenzunabhängig), plan-geschichteten Atmosphäre expliziert. Dieses Beispiel kann als typisch für alle Transportprobleme gelten, und an ihm läßt sich die Brauchbarkeit und Anpassungsfähigkeit der verschiedenen Lösungsverfahren für die speziellen und komplexen Probleme der Praxis übersichtlich erproben. — Der 1. Teil enthält die grundlegenden Definitionen der physikalischen Größen, die Grundgleichungen des Strahlungsgleichgewichtes und ihre Übersetzung für das Problem der Neutronendiffusion (Kap. I), sowie die allgemeinen mathematischen Eigenschaften der im folgenden verwendeten Integraloperatoren (Kap. II). — Der 2. Teil ist ganz der Behandlung des Milneschen Problems für die graue Atmosphäre gewidmet und bildet den Hauptteil des Buches. Es wird zunächst von der Integro-Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes ausgegangen und die Näherungslösung von Milne-Eddington und die durch Entwicklung nach Kugelfunktionen besprochen (Kap. III). Es folgt die Darstellung in Integralgleichungsform und die Lösungen durch iterative Verfahren (Kap. IV) und durch Variationsmethoden (Kap. V). Kap. VI behandelt die exakten Lösungen des Problems, im wesentlichen fußend auf den Arbeiten von Chandrasekhar, Ambarzumian und vom Verf. — Der letzte Teil (Kap. VII) referiert in gedrängter Übersicht die verschiedenen Ansätze zur Lösung des allgemeinen Falles einer nicht grauen Atmosphäre. Ein Anhang gibt eine Formelzusammenstellung der Integralexponentialfunktionen und Tabellen. — Das Buch ist mit bewundernswertem didaktischem Geschick abgefaßt und eignet sich hervorragend zur Einführung in ein Gebiet und eine Methodik, die in Physik und Astrophysik immer mehr an Bedeutung gewinnt. *G. Burkhardt.*

Allen, D. N. de G. and R. T. Severn: The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations. II. The solidification of liquids. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 447—454 (1952).

Die von den beiden Autoren in der Note I (dies. Zbl. 42, 334) gegebene Methode wird jetzt auf die Bestimmung der Temperaturverteilung in einem linearen Wärmestrom in einer Flüssigkeit erweitert, die sich bis zu einer gegebenen Erstarrungstemperatur abkühlt. Das hinzutretende Merkmal ist die Zulassung der Existenz einer latenten Erstarrungswärme, wobei auf die Bestimmung der Fortschreitung der Erstarrungsfront besonderes Augenmerk gelenkt wird. Das gestellte Problem wird als eindimensional angesehen, als Grundlage wird die klassische Differentialgleichung der Wärmeleitung herangezogen. *Th. Pöschl.*

García, Godofredo: Über die Integration und die Eigenschaften der Integralkurven der vollständigen Diffusionsgleichung. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 15, 3—24 (1952) [Spanisch].

Verf. stellt verschiedene Methoden zur Behandlung der Diffusionsgleichung bei langsamer Bewegung des Lösungsmittels

$$D \cdot \Delta_2 \Gamma + [A + B \varepsilon(t)] \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

einander gegenüber, wobei  $\Gamma$  die Konzentration ist und  $D$  (Diffusionskoeffizient),  $A$  und  $B$  konstant angenommen werden. Ferner betrachtet er die als vollständig bezeichnete Diffusionsgleichung

$$D \Delta_2 \Gamma - \operatorname{div}(\vec{V} \Gamma) + F(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen, insbesondere im eindimensionalen Fall mit Ansatz von  $F(\Gamma)$  in der Form  $\alpha \Gamma$  oder  $\alpha \Gamma(1 - \Gamma)^2$ . *M. J. De Schwarz.*

Jaffé, George: Diffusion of neutrons. Phys. Review, II. Ser. 88, 603—611 (1952).

Es wird die thermische Bewegung des streuenden Mediums in die Betrachtung der Neutronendiffusion aufgenommen. Die streuenden Atome werden als harte, elastische Kugeln mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung angenommen und damit die Transportgleichung aufgestellt. Diese wird unter der Annahme, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen von der Form „Maxwellverteilung mal



beliebige Richtungsfunktion“ ist, auf ein unendliches System von linearen Differentialgleichungen zurückgeführt. Der Fall schneller Neutronen wird durch iterierte Integration behandelt. Als Beispiel wird hier behandelt der senkrechte Einfall eines monochromatischen Neutronenstrahls auf die Grenzfläche eines unendlichen Halbraumes. Es wird darauf hingewiesen, daß in ähnlicher Weise der Fall einer Punktquelle im unendlich ausgedehnten Medium behandelt werden kann. *H. Volz.*

**Surinov, Ju. A.:** Über die Funktionalgleichungen der Wärmestrahlung für den Fall eines Systems grauer Körper, die durch ein diathermisches Medium getrennt sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 223—226 (1952) [Russisch].

Für die in früheren Arbeiten des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 223—226 (1952)] aufgestellten Fredholmschen Integralgleichungen für die Energiedichte der Strahlung eines beliebigen Systems grauer Körper in einem diathermanen Medium werden allgemeine Lösungsmethoden besprochen. *G. Burkhardt.*

**Danilovskaja, V. I.:** Über ein dynamisches Problem der Thermoelastizität. Priklad. Mat. Mech. 16, 341—344 (1952) [Russisch].

The author treats the propagation of stress in a semi-infinite elastic body that is heated on the boundary. The boundary conditions are: at  $t = 0$  the temperature is constant throughout the body; at the boundary, after  $t = 0$ , the temperature gradient is proportional to the difference between the temperature at the boundary and an external constant temperature. *M. P. White.*

## Elektrodynamik. Optik:

**Finzi, Bruno:** Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 378—382 (1952).

Etant données les deux lois fondamentales du champ électromagnétique:

$$(1) \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = 0, \quad (2) \quad F_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = j_{\alpha},$$

H. Weyl montra que (1) étant admis, (2) se déduit d'un principe de moindre action. Introduisant le quadripotential  $\Phi_{\alpha}$ , l'action est définie par:  $\int l d\omega$  avec  $l = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha} j^{\alpha}$ ,  $d\omega$  étant

l'élément de volume quadridimensionnel. L'expression de  $l$  peut être généralisée de telle sorte qu'on obtienne l'électromagnétisme de Mie, Born... L'A. se propose de montrer que (1) et (2) peuvent se déduire d'un même principe de moindre action. Pour cela, il utilise le lemme suivant: „Tout tenseur à deux indices  $F_{\alpha\beta}$  antisymétrique peut s'exprimer comme somme d'un tenseur irrotationnel  $H_{\alpha\beta}$  [satisfaisant à (1)] et d'un tenseur solénoïdal  $K_{\alpha\beta}$ , chacun de ces tenseurs étant antisymétrique“. Plus précisément, l'A. montre qu'il existe deux vecteurs solénoïdaux  $\Phi_{\alpha}$  et  $\Psi_{\alpha}$  tels que:

$$H_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta} \quad K_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Psi^{\gamma}{}_{|\delta}.$$

Considérant alors le champ électromagnétique dans le vide avec  $l = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ , on voit que:

$$\delta \int l d\omega = - \int_{\omega} [F^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} \delta \Phi_{\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta}{}_{|\delta} \delta \Psi^{\gamma}] d\omega,$$

pourvu que:  $\delta \Phi_{\beta} = \delta \Psi_{\gamma} = 0$  sur le contour du volume  $\omega$ . On obtient bien (1) et (2) (avec  $j_{\alpha} = 0$ ). L'A. étudie également  $j_{\alpha} \neq 0$ . *A. Visconti.*

**Finzi, Bruno:** Sopra una estensione dei campi elettromagnetici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 211—215 (1952).

Considérations sur deux Notes précédemment publiées (ce Zbl. 47, 214 et analyse précédente). Après avoir rappelé et résumé les méthodes et les résultats obtenus dans ces Notes, l'A. étudie le principe de la conservation de l'électricité dans ce cadre plus général, montre que la propagation du champ général considéré est la même que celle du champ maxwellien et conclut à la possibilité de déterminer les grandeurs de champ généralisées comme on le fait habituellement dans le cas maxwellien. Il considère enfin ce champ généralisé dans un milieu matériel et affirme que les principes que nous venons de mentionner sont toujours valables. *A. Visconti.*

**Udeschini, Paolo:** Sopra un campo estendente quello elettromagnetico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **13**, 246—253 (1952).

Se reportant à deux Notes de B. Finzi (v. les références dans l'analyse précédente) l'A. met d'abord les équations générales de cette théorie sous forme vectorielle dans un espace euclidien tridimensionnel. Il montre ensuite que si l'on veut construire une électrostatique et une magnétostatique indépendantes l'une de l'autre, les cinq constantes arbitraires de la théorie se réduisent à deux: la première ayant les dimensions de l'inverse d'une longueur, la deuxième étant un nombre pur. On voit que dans l'un comme dans l'autre cas,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ne sont plus irrotationnels, mais peuvent se décomposer — suivant le théorème de Clebsch — en une partie irrotationnelle et un partie dérivant d'un potentiel vecteur. L'A. fait remarquer que les trois constantes que l'on doit supposer nulles, sont précisément celles qui devraient être supposées complexes pour que la densité d'action de Finzi soit réelle. Enfin, l'A. étudie le cas des champs variables et donne une solution à symétrie sphérique pour le champ électrostatique. *A. Visconti.*

**Cini, M.:** A perturbation method for Dirac's new electrodynamics. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **213**, 520—529 (1952).

Verf. gibt eine Störungsmethode für die Bewegung einer Ladung in einem vorgegebenen Feld an (vgl. Dirac, dies. Zbl. **43**, 428). Es wird angenommen, daß die Ladung so klein sei, daß ihr Feld in 0. Näherung vernachlässigt werden kann. Die Methode ist auf die allgemeinere Form der Theorie (Dirac, folg. Referat) nur anwendbar, wenn die Wirbelstärke der Elektronenströmung klein ist. *G. Höhler.*

**Dirac, P. A. M.:** A new classical theory of electrons. II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **212**, 330—339 (1952).

Verf. erweitert seine Theorie (dies. Zbl. **43**, 428) durch Hinzunahme von Bewegungen, bei denen  $k v_\mu - A_\mu$  nicht mehr wirbelfrei ist. Bewegungsgleichungen sind die Lorentzschen Gleichungen für kontinuierlich verteilte geladene Materie. Eine Verallgemeinerung der in der Hydrodynamik bekannten Transformation von Clebsch [J. reine angew. Math. **45** (1857) und **56** (1859)] führt zu der Aussage, daß die Potentiale bei geeigneter Eichung immer in der Form  $A^\mu = k v^\mu + \xi \cdot \partial \eta / \partial x$  darstellbar sind. Es werden zwei verschiedene Variationsprinzipien angegeben, aus denen die Grundgleichungen der Theorie folgen. Als Vorbereitung für eine Quantisierung geht Verf. dann unter Benutzung der Ergebnisse früherer Arbeiten (dies. Zbl. **36**, 141; **42**, 212) zur Hamiltonschen Form über. *G. Höhler.*

**Buneman, O.:** Circulation in the flow of electricity. Dirac's new variables. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **215**, 346—352 (1952).

Verf. beweist einen bisher nur in Spezialfällen bekannten Satz über die Konstanz der Zirkulation im Rahmen der vorsteh. ref. Theorie von Dirac.  $\oint (k v_\mu - A_\mu) dx^\mu$  über eine beliebige raum-zeitliche Kurve ändert sich nicht, wenn die Punkte dieser Kurve längs Weltlinien der kontinuierlichen Elektronenströmung verschoben werden. Die von Dirac eingeführten Variablen  $\xi, \eta$  werden anschaulich gedeutet. Für  $t = \text{const.}$  stellen  $\xi = \text{const.}, \eta = \text{const.}$  die Wellenlinien des Vektors  $(k \mathfrak{B} - \mathfrak{A})$  dar. *G. Höhler.*

**Bechert, Karl:** Ansätze zu einer nicht-linearen Elektrodynamik. II. Ann. der Physik, VI. F. **10**, 430—448 (1952).

Auf wesentlich anderem Wege und zum Teil früher als Dirac hat Verf. eine klassische Elektrodynamik für kontinuierlich verteilte Ladungen entwickelt (vgl. dies. Zbl. **41**, 572). In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der wirbelfreie Fall (vgl. vorstehende Referate) untersucht. Es gelten Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Als Anteil der Materie am Energie-Impuls-Tensor erscheint der kinetische Energie-Impuls-Tensor Minkowskis. Elimination des Feldtensors führt auf Feldgleichungen, welche nur Materiegrößen enthalten: das Feld der Vierergeschwindigkeit  $V_n$  und die Ruhladungsdichte (bis auf einen Faktor gleich  $U$ )

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial V_n}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_n} \right) = \frac{U}{a^2} \cdot V_k; \quad V_n V_n = 1.$$

Verf. diskutiert das Anfangswertproblem, Fragen der Eichinvarianz und die Hamiltonsche Formulierung. Dann wird eine Möglichkeit zur Quantisierung näher untersucht und schließlich noch kurz eine verallgemeinerte Form angegeben, bei der Wirbelfreiheit nicht mehr vorausgesetzt ist und das Verhältnis von Ruhmassendichte zu Ladungsdichte zu einem Zeitpunkt noch eine beliebige Ortsfunktion sein kann. [Bem. des Ref.: eine im wesentlichen gleichwertige klassische Theorie, in welcher umgekehrt nur der Feldtensor vorkommt, hat Infeld aufgestellt. — Der allgemeinste Fall wurde inzwischen auch von Møller, *The theory of relativity*, Oxford 1952 behandelt. — Das System (10, 3) bis (10, 6) enthält nur 9 unabhängige Gleichungen. Dafür sind die Potentiale nur als Viererrotation enthalten.] *G. Höhler.*

**Sugawara, Masao:** The mass variation with velocity in Bopp's unitary field theory. I. *Progress theor. Phys.* 7, 303—316 (1952).

Verf. berechnet im Rahmen der verallgemeinerten linearen Elektrodynamik von Bopp (dies. Zbl. 28, 280) Gesamtenergie und Gesamtimpuls einer gleichförmig bewegten Punktladung. Dabei benutzt er den von Bopp und Heisenberg (Heisenberg, dies. Zbl. 36, 268) angegebenen Energie-Impulstensor. Die von der Relativitätstheorie geforderte Abhängigkeit dieser beiden Größen von der Geschwindigkeit ist nur vorhanden, wenn die Boppsche Strukturfunktion  $\varepsilon(x)$  eine allerdings nicht sehr einschränkende Bedingung erfüllt. *G. Höhler.*

**Sugawara, Masao and Sakae Minami:** The mass variation with velocity in the Bopp's unitary field theory. II. *Progress theor. Phys.* 7, 563—572 (1952).

Da der Energie-Impulstensor von Bopp (s. vorsteh. Referat) nicht ganz zufriedenstellend ist, wird die Rechnung mit dem neuerdings von Ôno (dies. Zbl. 44, 439) angegebenen Tensor wiederholt. Verff. finden die gleiche Bedingung für die Strukturfunktion wie in der ersten Arbeit. Sie klären die Beziehung der Energie-Impulstensen von Bopp und Ôno zueinander und wenden ihre Ergebnisse auf ein von Pais und Uhlenbeck (dies. Zbl. 40, 132) angegebenes Beispiel zur nicht-lokalen Theorie an. Schließlich zeigen sie noch, daß ihre Bedingung mit der Forderung des Verschwindens der Selbstspannung im Ruhssystem identisch ist. *G. Höhler.*

**Socio, Marialuisa De:** Un teorema sul campo elettromagnetico. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 7, 423—427 (1952).

Verf. beweist den Satz: wenn ein regelmäßiges elektromagnetisches Feld zu jeder Zeit eine geschlossene oder offene Fläche berührt (die aber im letzten Fall einfach zusammenhängend ist und den Rand auf einem vollkommenen Leiter hat), verschwindet der Fluß des Poyntingschen Vektors durch jene Fläche. Als Folgerung des obigen Satzes beweist Verf., daß in einem beliebigen Wellenleiter, dessen Wände vollkommen leitend sind, in dessen Inneren ein wenig leitendes Medium liegt und dessen Durchschnitt einfach zusammenhängend ist, nicht mehr als ein Durchschnitt besteht, den die elektrische und magnetische Feldstärke berührt; wenn außerdem ein elektromagnetisches Feld sich frei durch den Raum ausbreitet, dann besteht keine geschlossene feste Fläche, die zu jeder Zeit die elektrische und die magnetische Feldstärke berührt. *D. Graffi.*

**Baños jr., Alfredo and Robert K. Golden:** The electromagnetic field of a rotating magnetized sphere. *J. appl. Phys.* 23, 1294—1299 (1952).

Diese Arbeit soll einen ersten Schritt darstellen zum Verständnis der Vorgänge, die das permanente Magnetfeld der Erde hervorrufen. Es wird das Feld einer homogen magnetisierten Kugel, die um eine der Magnetisierungsrichtung parallele Achse rotiert, vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters beschrieben. Es tritt zu dem magnetischen ein elektrisches Feld hinzu, das im Innern der Kugel auf die Rotationsachse zugerichtet ist und im Außenraum identisch mit dem Feld eines axialen Quadrupoles im Ursprung ist. Weiter wird der Einfluß einer ruhenden, metallischen Schale auf diese Felder diskutiert. *W. Kertz.*

**Nardini, Renato:** Due teoremi di unicità nella magneto-dinamica dei fluidi compressibili. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 7, 403—411 (1952).

Verf. beweist den Eindeutigkeitssatz für die Gleichungen der Magneto-Dynamik



der reibenden, kompressibeln, barotropischen Flüssigkeiten (d. h. deren Druck  $p$  Funktion der Dichte  $\rho$  ist). Zuerst wird der Verschiebungsstrom als vernachlässigbar angenommen und der Satz für einen endlichen Bereich  $D$  bewiesen; außer trivialen physikalischen Bedingungen und Regularitätsannahmen werden die folgenden Größen als bekannt vorausgesetzt: 1) für  $t = 0$  in ganz  $D$  die Geschwindigkeit  $v$  der Flüssigkeit, die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  und  $\rho$ , 2) auf der ganzen Fläche  $\sigma$ , die  $D$  begrenzt, für jedes  $t > 0$ ,  $v$  und die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  und  $\rho$  nur dort, wo die Flüssigkeit in  $D$  eintritt. Verf. dehnt nachher seine Ergebnisse auf den allgemeineren Fall aus, in dem der Verschiebungsstrom nicht vernachlässigbar ist: für die Gültigkeit des Satzes ist es hinreichend, die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  in  $D$  für  $t = 0$  hinzuzufügen; auf  $\sigma$  kann die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  durch jene von  $\vec{E}$  ersetzt werden. Die obigen Eindeutigkeitssätze gelten mit weniger starken Bedingungen auch für die idealen Flüssigkeiten und können auch auf unendliche Gebiete mit geeigneten Konvergenzbedingungen ausgedehnt werden. *D. Graffi.*

**Nardini, Renato:** Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 303—315 (1952).

Wie bekannt, erhält man die Gleichungen von Alfvén der Magneto-Hydrodynamik aus dem System der Gleichungen der Hydrodynamik und den Maxwell'schen Gleichungen, indem man in der ersten Gleichung den ordentlichen Kräften die Lorentzsche Kraft  $[\vec{j} \cdot \vec{B}]$  hinzufügt ( $\vec{j}$  ist Stromdichte,  $\vec{B}$  ist magnetische Induktion) und  $\vec{j} = \gamma (\vec{E} + [v \cdot \vec{B}])$  annimmt ( $\vec{E}$  ist die elektrische Feldstärke,  $v$  die Geschwindigkeit,  $\gamma$  die Leitfähigkeit). Verf. nimmt die Flüssigkeit als inkompressibel an und vernachlässigt zuerst den Verschiebungsstrom: er beweist den Eindeutigkeitssatz für diese Gleichungen in einem endlichen Bereich, indem er als Anfangsbedingungen die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  und  $v$ , als Randbedingungen die tangentielle Komponente von  $\vec{H}$  und die normale Komponente von  $v$  (oder die ganze  $v$ , wenn die Flüssigkeit zäh ist) vorschreibt. Zieht man auch den Verschiebungsstrom in Betracht, so ist der Satz noch gültig, wenn man die Anfangswerte von  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  und  $v$  vorgibt, während in den Randbedingungen die tangentielle Komponente von  $\vec{H}$  durch jene von  $\vec{E}$  ersetzt werden kann. Die Sätze werden auch auf ein unendliches Gebiet ausgedehnt, indem man  $\vec{H}$  und  $v$  (und im zweiten Satz auch  $\vec{E}$ ) unendlich klein von höherer Ordnung als 2 annimmt. In einer späteren Abhandlung (vorsteh. Referat) hat Verf. bewiesen, daß die zwei Sätze auch für die kompressiblen barotropischen Flüssigkeiten gelten. *D. Graffi.*

**Nikitina, V. N.:** Zur Frage der Magnetisierung eines zylindrischen Stabes mit einer Wickelung. Vestnik Moskovsk. Univ. **7**, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7), 51—56 (1952) [Russisch].

**Slichter, L. B.:** An electromagnetic interpretation problem for the sphere. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **214**, 356—370 (1952).

Das behandelte „Interpretations-“ oder inverse Randwertproblem ist folgendes: Gesucht werden in einer isotropen Kugel Leitfähigkeit, Permeabilität und Dielektrizitätskonstante als Funktion des Radius. Von außen wirke ein symmetrisches magnetisches Wechselfeld. Beobachtet wird der magnetische Vektor auf der Kugeloberfläche. Die gesuchten Funktionen erhält man in Form von Taylor-Reihen. Die Lösungen werden an bekannten Beispielen geprüft. Schließlich wird noch angegeben, wie man aus den Beobachtungen des magnetischen Vektors auf das erregende (symmetrische) Außenfeld schließen kann. *W. Kertz.*

**Fraenz, Kurt:** Mathematische Probleme in der Theorie der elektrischen Schaltungen mit verteilten Konstanten. Symposium Problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 161—168 (1952) [Spanisch].

Die Impedanz eines Zweipols mit einer endlichen Schaltung aus konzentrierten Schaltelementen läßt sich bekanntlich als Funktion des Frequenzparameters sowohl

für verlustbehaftete als auch für verlustfreie Schaltungen durch ihre funktionentheoretischen Eigenschaften kennzeichnen. Verf. stellt nun Vermutungen darüber auf, welche Eigenschaften die Impedanzfunktion charakterisieren, wenn Zweipole mit räumlich verteilten Schaltelementen (etwa Kabel, schwingende Hohlräume, Antennen) zugelassen werden. Bei verlustfreien, ganz in einen ideal leitenden endlichen Kasten eingeschlossenen Zweipolen wird ein Verhalten erwartet, das aus dem Verhalten der Zweipole mit konzentrierten Schaltelementen durch Grenzübergang hervorgeht. Dagegen bieten die Antennen wegen der bei ihnen auftretenden Energieausstrahlung besondere Probleme. Verf. formuliert eine Anzahl diesbezüglicher konkreter Fragen und weist auf mathematische Hilfsmittel hin, die zur Behandlung der aufgeworfenen Fragen sowie zur numerischen Berechnung von Antennenimpedanzen möglicherweise von Nutzen sein werden.

A. Stöhr.

**Aymerich, Giuseppe:** Sulle oscillazioni forzate di due circuiti elettrici non lineari con accoppiamento induttivo e capacitivo. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 83—89 (1952).

Il sistema di equazioni differenziali delle oscillazioni forzate di due circuiti non-lineari con accoppiamento induttivo e capacitivo ha la forma:

$$(1) \quad \begin{aligned} L_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + M \frac{d^2 x_2}{dt^2} + g'_1(x_1) \frac{dx_1}{dt} + \frac{x_1}{C_1} + \frac{x_2}{C} &= e_2(t), \\ M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + L_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + g'_2(x_2) \frac{dx_2}{dt} + \frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C_2} &= e_2(t) \end{aligned}$$

in cui  $L_1, L_2, M, C_1, C_2, C$  sono costanti ( $M^2 < L_1 L_2; C^2 > C_1 C_2$ ),  $g_1(x), g_2(x_2)$  funzioni di  $x_1$  e  $x_2$  tali che  $g_1(0) = g_2(0) = 0$ ,  $e_1(t), e_2(t)$  funzioni periodiche di  $t$  con periodo  $T$ .

Supposto  $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{g_1(x_1)}{x_1} = R_1 > 0$ ,  $\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{g_2(x_2)}{x_2} = R_2 > 0$ , e soddisfatta una disu-

guaglianza in cui intervengono le  $L, R, C$  che sarebbe lungo riportare, l'A., mediante considerazioni topologiche, dimostra l'esistenza di una soluzione periodica di periodo  $T$  per il sistema (1).

D. Graffi.

**Suchy, Kurt:** Schrittweiser Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik in inhomogenen anisotropen absorbierenden Medien. I. Gleichungen für Wellennormale, Brechungsindex und Polarisation. Ann. der Physik, VI. F. 11, 113—130 (1952).

Da der — mathematisch exakte — Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  für den Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik physikalisch nicht zu verwirklichen ist, unternimmt Verf. auf Anregung von Prof. Seeliger, die nach der Wellenoptik geltenden mathematischen Formeln und Beziehungen in Reihen zu entwickeln und die höheren Potenzen zu vernachlässigen, was naturgemäß zu den gleichen Grenzbeziehungen führt. Der eingeschlagene Weg ist aber aus dem Grunde interessant, weil er gut erkennen läßt, welche Bedingungen im einzelnen erfüllt sein müssen, um die Vernachlässigungen gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Dabei gelten diese Bedingungen allgemein, also auch für inhomogene anisotrope absorbierende Medien. Sie beschränken die Krümmung der Inhomogenität des Mediums sowie des Verlaufs der Wellennormalen und die Polarisation. Die Untersuchungen sind vektoriell bzw. dyadisch durchgeführt, wobei für die komponentenmäßigen Ausdrücke — insbesondere der Vektoroperationen — krummlinige Koordinaten zugrunde gelegt sind, wie dies den Strahlen in inhomogenen Medien naturgemäß ist.

J. Picht.

**Wait, James R.:** Electromagnetic fields of current-carrying wires in a conducting medium. Canadian J. Phys. 30, 512—523 (1952).

Ein gerader isolierter drahtförmiger Leiter endlicher Länge, welcher eingebettet ist in einem Medium, in welchem Leitungsströme sowie Verschiebungsströme fließen, wird von einem einwellig von der Zeit abhängigen Strom durchflossen. Amplitude und Phase des Stromes sind konstant entlang der Leiterlänge. Es wird ein zylindrisches Koordinatensystem verwendet, in welchem der Leiter sich in der Achse befindet. Die elektrische Feldstärke in einem beliebigen Punkte außerhalb

des Leiters infolge der Wirkung eines Leiterelementes wird aus bekannten Dipolformeln entnommen. Durch Integration über die Leiterlänge wird hieraus die gesamte elektrische Feldstärke, welche der Leiter erzeugt, erhalten. Der Einfluß der Leiterisolation wird diskutiert. Mit Hilfe der allgemeinen Formeln wird das Problem gelöst für einen vertikalen Draht innerhalb einer von 2 parallelen horizontalen Ebenen begrenzten halbleitenden Schicht. In der Grenzebene dieser Schicht wird ein nicht isolierter Leiter endlicher Länge angeordnet. Zwischen dem zuerstgenannten Leiter wird die Impedanz berechnet und graphisch dargestellt. *M. J. O. Strutt.*

**Giovanardi, Ilde:** Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida riempita da un dielettrico eterogeneo. *Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII* 1, 81—87 (1952).

L'A. scrive anzitutto le equazioni per la propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida a sezione rettangolare riempita da un mezzo eterogeneo, ma identico su ogni piano parallelo a un lato della sezione. Supposta poi la costante dielettrica del mezzo poco diversa dal suo valore medio, dimostra che le onde *TE* e *TM* che, nella guida con dielettrico omogeneo si propagano con uguale velocità, si scindono, per effetto dell'eterogeneità, in due onde ibride (cioè nè *TE* nè *TM*) di diversa velocità. *D. Graffi.*

**Agostinelli, Cataldo:** Sulla propagazione di onde elettromagnetiche guidate entro tubi cilindrici. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 11, 121—147 (1952).

L'A. mediante l'uso delle funzioni epicicloidali da lui introdotte in altro lavoro (questo *Zbl.* 44, 75) risolve dapprima il problema della propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida, a sezione epicicloidale, riempita da dielettrico omogeneo. Passa poi al caso di una guida riempita da dielettrico eterogeneo, ma identico su ogni retta parallela alla direzione di propagazione, e con permeabilità  $\mu$  costante. Dopo aver riassunto alcune sue ricerche [*Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 85, 311—347 (1951)] riduce la ricerca delle eventuali onde *TM* e *TE* ad una equazione integrale da cui, in particolare, deduce che onde del primo tipo possono aversi solo in guide a sezione circolare, col mezzo variabile soltanto con la distanza dall'asse, mentre onde del secondo tipo possono aversi, anche nelle guide a sezione rettangolare con dielettrico identico su ogni piano parallelo a un lato della sezione. Dopo aver scritto alcune relazioni integrali a cui soddisfano le predette onde *TM* e *TE*, determina alcuni casi in cui esse si propagano, per particolari frequenze, con velocità  $1/\sqrt{\varepsilon_1 \mu}$  ( $\varepsilon_1$  è il minimo valore della costante dielettrica, questo *Zbl.* 47, 199). *D. Graffi.*

**Zeuli, Tino:** Sulla propagazione di onde elettromagnetiche critiche entro tubi cilindrici circolari e rettangolari con dielettrico eterogeneo. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 11, 297—328 (1952).

L'A. considera le guide a sezione circolare o rettangolare riempite da dielettrico eterogeneo, in cui possono propagarsi onde *TE* o *TM* e, riprendendo studi dell'Agostinelli (questo *Zbl.* 47, 199 e ref. preced.), ricerca quelle onde che, per particolari frequenze, si propagano con velocità  $1/\sqrt{\varepsilon_1 \mu}$  ( $\mu$  indica la permeabilità, per ipotesi costante, del mezzo entro la guida,  $\varepsilon_1$  il valore minimo della costante dielettrica  $\varepsilon$ ). In generale, il problema si riconduce ad una equazione differenziale con singolarità fuchsiane che l'A. discute con una certa ampiezza. Determina poi, valendosi delle funzioni di Bessel ed altre trascendenti note, le onde *TM* e *TE*, di velocità  $1/\sqrt{\varepsilon_1 \mu}$ , in una guida a sezione circolare in cui  $\varepsilon$  varia, secondo una legge lineare o parabolica crescente, con la distanza dall'asse del tubo, oppure onde *TM* in una guida a sezione rettangolare dove  $\varepsilon$  varia secondo una legge lineare o parabolica con la distanza da una faccia. *D. Graffi.*

**Caprioli, Luigi:** Onde elettromagnetiche trasversali dei tipi *TE*, *TM* nelle guide d'onda rettilinee, con dielettrico eterogeneo. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 86, 291—307 (1952).



Verf. betrachtet Wellenleiter, die von einem inhomogenen Dielektrikum erfüllt sind, das aber auf jeder der Leiterachse parallelen Geraden gleich ist, und forscht nach, unter welchen Bedingungen *TE*- und *TM*-Wellen sich ausbreiten können. Sei  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante (die Permeabilität wird überall konstant angenommen). Wenn auf jeder Linie  $\varepsilon = \text{konst.}$  von einem allgemeinen Normal-schnitt des Leiters auch der absolute Betrag von  $\text{grad } \varepsilon$  oder von  $\Delta \varepsilon$  konstant ist, beweist Verf., daß *TE*-Wellen nur entstehen können, wenn jene Linien parallele Segmente oder konzentrische Kreise oder Kreisbogen sind und der Schnitt von Linien  $\varepsilon = \text{konst.}$  und von Linien, die normal in bezug auf diese sind, begrenzt ist. Dagegen können *TM*-Wellen nur in einem Leiter entstehen, dessen Schnitt kreisförmig ist und bei dem die Linien  $\varepsilon = \text{konst.}$  Kreise sind, deren Mittelpunkte auf der Leiterachse liegen. Endlich beweist Verf., daß in dem Wellenleiter, dessen Schnitt kreisförmig ist (mit einem symmetrisch verteilten Dielektrikum) oder dessen Schnitt rechtwinklig ist (mit dem Dielektrikum, das in jeder einer Schnittseite parallelen Ebene gleich ist), nur die *TE*- und *TM*-Wellen möglich sind, die von Graffi und Goldoni studiert wurden (dies. Zbl. 37, 417; 41, 558). Die Ergebnisse sind auch gültig unter der Annahme, daß das Dielektrikum in einem Teil des Leiters homogen ist.

*D. Graffi.*

**Ataman, Adnan:** Theory of artificial slot antennas. Bull. techn. Univ. Istanbul 4, 71—89 (1952).

Unter der „artificial slot antenna“ versteht der Autor eine Anordnung, die eine Art Schlitzantenne darstellt, ohne daß aber tatsächlich irgendein Schlitz in eine leitende Oberfläche eingeschnitten ist. Die wirkliche Ausführung besteht darin, daß ein dielektrischer Stab von rechteckigem Querschnitt und von einer hohen magnetischen Permeabilität und relativ sehr geringen Verlusten auf die leitende Oberfläche gesetzt ist. Die beiden Seitenflächen des dielektrischen Stabes sind mit metallischen Platten belegt. Wird ein elektrisches Hochfrequenzfeld zwischen den oberen Rändern dieser beiden seitlichen Platten aufgebracht, so dringt ein Teil der Energie in das Dielektrikum ein, der restliche Teil wird abgestrahlt. — Der Verf. entwickelt in der Arbeit die Theorie dieses Wellenleiters, indem er ihn als belastete Übertragungsleitung auffaßt. Es wird u. a. der Strahlungswiderstand der Anordnung berechnet und die scheinbare Leitfähigkeit, die infolge der Abstrahlung vorge-täuscht wird.

*H. Buchholz.*

**Brechovskich, L. M. und I. D. Ivanov:** Über eine Erweiterung der Grenzen der Anwendung der Strahlungstheorie bei der Untersuchung der Ausbreitung von Wellen in geschichteten Medien. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 545—548 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht theoretisch den Verlauf eines Strahles, der auf die ebene Grenzfläche  $z = 0$  gegen ein inhomogenes geschichtetes Medium ( $z > 0$ ) von kleinerem Brechungsindex unter einem Glanzwinkel ( $= \pi/2 - \text{Einfallswinkel}$ ) trifft, der so klein ist, daß für den Einfallswinkel der Grenzwinkel der Totalreflexion überschritten ist. Den Reflexionskoeffizienten  $r(\alpha)$  setzt er gleich  $e^{i\eta(\alpha)}$  und schreibt den Ausdruck für eine gebrochene sphärische Welle in der

Form 
$$\psi = - \sqrt{\frac{k_0}{2\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{\pi-i\infty}^{i\infty} e^{ik_0 R \cos(\alpha-\chi) + i\eta(\alpha)} \sqrt{\cos \alpha} d\alpha, \text{ wo } r \text{ der horizontale Abstand}$$

zwischen Strahlungsquelle und -empfänger ist;  $R$  und  $\chi$  sind Länge und Glanzwinkel des hypothetischen Strahls  $ABP$ , der von der Fläche  $z = 0$  reflektiert wird. Im akustischen Fall stellt  $\psi$  das eigene Schallpotential dar, im elektromagnetischen Fall ist es eine der Komponenten des Hertzvektors. Dies Integral behandelt er nach der Sattelpunktmethode für den Fall, daß

$k_0 R \gg 1$  ist, und erhält 
$$\psi = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\cos \alpha_0}{\cos \chi}} \left[ 1 - \frac{\eta''(\alpha_0)}{k_0 R \cos(\alpha_0 - \chi)} \right]^{-1/2} e^{ik_0 R \cos(\alpha_0 - \chi) + i\eta(\alpha_0) + i\pi/2}.$$

Der Austrittspunkt des Strahls aus dem inhomogenen Medium ist von seinem Eintrittspunkt um die Strecke  $A = \frac{1}{k_0 \sin \alpha_0} \left( \frac{d\eta}{d\alpha} \right)_{\alpha_0}$  entfernt. Die Phase, der Exponent von  $e$ , entspricht der optischen Länge des Strahls, der bei  $z < 0$  mit der Geschwindigkeit  $c_0$  unter dem Winkel  $\alpha_0$  zur Grenzebene verläuft und längs der Grenze  $z = 0$  mit der Geschwindigkeit  $c_0/\cos \alpha_0$  versetzt

wird. Verf. behandelt anschließend den Spezialfall:  $n=1$  für  $z \leq 0$ ,  $n = (1 - 2az)^{1/2}$  für  $z > 0$ . Hierfür findet Verf. als Lösung

$$\varphi = A \sqrt{\xi} \left[ H_{1/3}^{(2)}(w) + e^{i\pi/3} H_{1/3}^{(1)}(w) \right], \quad n(z) \geq \cos \alpha,$$

$$\varphi = A \sqrt{\xi} \left[ H_{1/3}^{(2)}(w e^{-2\pi i}) \right], \quad n(z) < \cos \alpha,$$

wo  $H$  die Hankelsche Funktion,  $A$  eine konstante Größe und  $w = \frac{1}{3} \frac{k_0}{a} \xi^{3/2}$  mit  $\xi = \sin^2 \alpha - 2az$  bedeuten. Verf. berechnet hierfür weiter die Strahlversetzung und vergleicht den erhaltenen Wert mit dem, der sich auf Grund rein geometrischer Überlegungen ergibt, und von dem sein Wert um einen Korrektionsfaktor abweicht, der sich wesentlich erst bemerkbar macht, wenn  $\alpha \lesssim \left( \frac{a \lambda_0}{2\pi} \right)^{1/3}$  wird. Graphische Darstellungen des Ausdrucks  $\left( \frac{2\pi a^2}{\lambda_0} \right)^{1/3} \cdot 1$  und  $\left( \frac{2\pi a^2}{\lambda_0} \right)^{1/3} \cdot 1$  geom.

werden gegeben. Zusammenfassend wird noch einmal gezeigt, wie bei sehr kleinem  $\alpha \lesssim \left( \frac{a \lambda_0}{2\pi} \right)^{1/3}$  der Strahlverlauf berechnet werden kann. J. Picht.

**Pohlack, Hubert:** Zur Umkehrbarkeit der Lichtwege in geschichteten Medien. Ann. der Physik, VI. F. 11, 145—154 (1952).

Verf. untersucht die Frage der Umkehrbarkeit der Lichtwege und der Durchlässigkeiten geschichteter Medien, indem er eine ebene, unendlich ausgedehnte, linear polarisierte Lichtwelle senkrecht auf ein geschichtetes Medium mit ebenen Grenzflächen fallen läßt, also — unter Fortlassung des Zeitfaktors — für die einfallende Welle ansetzt:  $E_0 = E_0^- e^{-j t_0 z}$ ,  $H_0 = n_0 E_0^+ e^{-j t_0 z}$ . Die Beziehungen zwischen benachbarten Grenzflächen ergeben sich dann aus

	$E_{i/i+1}$	$H_{i/i+1}$
$E_{i-1/i}$	$\cos \xi_i d_i (= \Re_{11}^{(i)})$	$j \frac{1}{n_i} \sin \xi_i d_i (= \Re_{12}^{(i)})$
$H_{i-1/i}$	$j n_i \sin \xi_i d_i (= \Re_{21}^{(i)})$	$\cos k_i d_i (= \Re_{22}^{(i)})$

mit  $\Re_{11}^{(i)} \Re_{22}^{(i)} - \Re_{12}^{(i)} \Re_{21}^{(i)} = 1$ . Dabei ist  $j = \sqrt{-1}$ ;  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vak}}} n_i$ ;  $n_i = n_i (1 - j \kappa_i) =$  komplexe Brechzahl. Die Transformationsfaktoren als Matrix  $\left\| \Re^{(i)} \right\|$  geschrieben, ergibt sich für die Beziehungen zwischen den Feldgrößen der ersten und letzten Grenzfläche

$$\begin{vmatrix} E_{0/1} & 0 \\ H_{0/1} & 0 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^m \left\| \Re^{(i)} \right\| \cdot \begin{vmatrix} E_{m/m+1} & 0 \\ H_{m/m+1} & 0 \end{vmatrix} = \left\| \Re \right\| \cdot \begin{vmatrix} E_{m/m+1} & 0 \\ H_{m/m+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Es folgt bei nichtabsorbierenden Außenmedien für das Intensitätsdurchlässigkeitsvermögen  $D$ , da mit  $|\Re^{(i)}| = 1$  auch  $|\Re| = 1$  ist, daß  $D_{0/m+1} = D_{m+1/0}$ , während für den Fall, daß sich die Absorptionsindizes  $\kappa_0, \kappa_{m+1}$  der beiden Außenmedien voneinander unterscheiden,  $D_{0/m+1} = D_{m+1/0} \cdot \frac{1 + \kappa_0^2}{1 + \kappa_{m+1}^2}$ , die Durchlässigkeit also von der Durchstrahlungsrichtung abhängt, bedingt

dadurch, daß zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in den absorbierenden Medien eine Phasendifferenz besteht. — Die Resultate bleiben erhalten, wenn es sich bei einer oder mehreren der Schichten um dicke, also „nicht interferenzfähige“ Schichten handelt. Zum Schluß diskutiert Verf. die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Lichtquelle und Empfänger selbst wieder ein (evtl. sehr kompliziertes) optisches Medium darstellen. J. Picht.

**Weyl, Hermann:** Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges. Math. Z. 56, 105—119 (1952).

Die Untersuchung befaßt sich mit der Verallgemeinerung der Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Ist  $u$  ein schiefssymmetrisches Tensorfeld vom Range  $q$  in  $n$  Dimensionen, so läßt sich nach dem Cartanschen Kalkül der linearen Differentialformen der Tensor  $\text{div } u$  vom Range  $q-1$  und der Tensor  $\text{rot } u$  vom Range  $q+1$  definieren. Der Operator  $\Delta = \text{div rot} + \text{rot div}$  stellt dann den  $n$ -dimensionalen Laplace-Operator dar. Verf. untersucht das Außenraumproblem für die Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Dazu werden zunächst die Ausstrahlungsbedingungen der skalaren Schwingungsgleichung auf die Tensorfelder übertragen. Der Eindeutigkeitssatz zeigt dann, daß ein Feld  $u$ , das den Ausstrahlungsbedingungen und der Schwingungsgleichung genügt, durch die Tangentialkomponenten von  $u$  und  $\text{div } u$  auf der Randfläche eindeutig bestimmt ist. Als Randbedingung beim Außenraumproblem tritt daher die Vorgabe der Tangentialkomponenten des Tensors und seiner Divergenz auf. Zur Bestimmung der zugehörigen Lösung werden von Flächenbelegungen erzeugte Tensorfelder eingeführt, wobei die Randbedingungen analog zum skalaren Fall auf lineare Integralgleichungen führen. Die Übertragung der Methode der Strahlungskapazität des Verf. auf den Fall der Tensor-

felder ermöglicht dann eine vollständige Lösung der Randwertprobleme. — Für  $n = 3$  und  $q = 1$  folgt hieraus die Lösung des Außenraumproblems der elektromagnetischen Schwingungen, wenn das Verschwinden der Divergenz am Rande gefordert wird. Allgemein kann nämlich aus dem Verschwinden der Tangentialkomponenten der Divergenz eines der Schwingungsgleichung und den Ausstrahlungsbedingungen genügenden Tensors  $u$  auf  $\operatorname{div} u = 0$  im ganzen Außenraum geschlossen werden. Wesentliche Elemente beim Aufbau dieser Theorie sind ältere Ansätze des Verf. (Rend. Circ. mat. Palermo **39**, 1—49 (1915)], ein Satz von F. Rellich (dies. Zbl. **28**, 164), der für den Eindeutigkeitssatz von Bedeutung ist, die Methode der Strahlungskapazität des Verf. (dies. Zbl. **44**, 97) und die vom Ref. gewonnene Vereinfachung dieses Verfahrens (dies. Zbl. **46**, 107).  
Cl. Müller.

**Jones, D. S.: Removal of an inconsistency in the theory of diffraction.** Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 733—741 (1952).

Bei der Herleitung der Integralgleichungen der Beugungstheorie benützt man üblicherweise die Randbedingungen und die Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen. Da diese Bedingungen bei unendlich ausgedehnten Objekten unter Umständen nicht erfüllt sind, leitet Verf. die Integralgleichungen durch einen sorgfältig geführten Grenzübergang her.

Walter Franz.

**Jones, D. S.: Diffraction by an edge and by a corner.** Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 363—378 (1952).

Die Behandlung der Beugung elektromagnetischer Wellen an Kanten und Ecken vollkommen leitender offener Flächen führt nur dann auf eindeutige Lösungen, wenn der zu berechnenden gebeugten Welle an den Kanten und Ecken zusätzliche, physikalisch begründbare Bedingungen auferlegt werden (vgl. Meixner, dies. Zbl. **34**, 125). In der vorliegenden Arbeit werden diese Bedingungen von der Integralgleichungsformulierung des Beugungsproblems her eingehend diskutiert. Zuerst wird gezeigt, daß sich das elektrische Feld in der Umgebung singulärer Stellen (Kanten und Ecken) stets aus dem retardierten Vektorpotential und skalaren Potential einer geeigneten Strom- und Ladungsverteilung auf der leitenden Fläche mit in erster Näherung vernachlässigter Retardierung herleiten läßt. Dann werden Bedingungen für die Strom- und Ladungsverteilung aufgestellt und ihre physikalischen Grundlagen diskutiert; aus ihnen folgt das Verschwinden der Normalkomponente des Stromes und die Endlichkeit der tangentiellen Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes. Diese Bedingungen für Strom und Feld machen die Lösung des Beugungsproblems eindeutig. Schließlich wird die Stromverteilung in Ecken ebener Flächen diskutiert.

J. Meixner.

**Avazašvili, D. Z.: Das räumliche Problem der Beugung monochromatischer elektromagnetischer Wellen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 29—32 (1952) [Russisch].

The aim of the paper is to prove an existence theorem for an electromagnetic wave with harmonic time-dependence propagated in infinite space containing two homogeneous media separated by a finite closed surface. The boundary problem for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  is replaced by one for scalar and vector potentials  $\varphi$ ,  $\mathbf{F}$ , such that

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi + \frac{i\omega}{c} \mathbf{F}, \quad \varphi = \frac{i\omega}{c k^2} \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Integral equations of Fredholm's type are set up for  $\varphi$ ,  $\mathbf{F}$ , and are shown to be uniquely soluble. The mode of formulation of the boundary problem for  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  and certain omitted calculations appear to receive the due explanation in other works, V. D. Kupradze [„Boundary Problems of the Theory of Oscillations and Integral Equations“. Moskau-Leningrad 1950 (in Russian)] and D. Z. Avazašvili [Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **8**, 109 (1940)], not accessible to the reviewer.

F. V. Atkinson.

**Güttler, A.: Die Miesche Theorie der Beugung durch dielektrische Kugeln mit absorbierendem Kern und ihre Bedeutung für Probleme der interstellaren Materie und des atmosphärischen Aerosols.** Ann. der Physik, VI. F. **11**, 65—98 (1952).

Im Anschluß an die Untersuchungen von G. Mie [Ann. der Physik, IV. F. **25**, 377 (1908)]



über die Beugung an homogenen Kugeln versucht Verf. eine theoretische Behandlung der Beugung des Lichtes an dielektrischen Kugeln mit absorbierendem Kern, auf die eine ebene, zeitlich periodische Welle trifft. Es werden  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  aus zwei Wellenpotentialen  $II'$  und  $II''$  abgeleitet, die elektrischen bzw. magnetischen Multipolschwingungen entsprechen und der Wellengleichung [mit  $k^2 = m^2 \omega^2 / c^2$  und  $m = n(1 - i\kappa)$ ] genügen, wo im absorbierenden Material  $m = m_1$  der komplexe Brechungsindex, in der dielektrischen Kugelschale  $m = m_2$  reell ist. Die Differentialgleichung für  $II(r, \vartheta, \varphi)$  wird mittels Separation der Variablen behandelt und führt zu den Eigenfunktionen  $r \cdot F(r) = \begin{cases} \psi_l(k_r) \\ \chi_l(k_r) \end{cases}$ ;  $\Phi(\varphi) = \begin{cases} \sin \mu \varphi \\ \cos \mu \varphi \end{cases}$ ;  $\Theta(\vartheta) = P_l^{(\mu)}(\cos \vartheta)$ , in denen

$\psi_l$  und  $\chi_l$  die Riccati-Besselschen bzw. die Neumannschen Funktionen sind und  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ , während für  $\mu$  — der Randbedingungen wegen — nur der Wert 1 in Betracht kommt. Die weitere — etwas unübersichtliche und nur in großen Schritten mitgeteilte — Rechnung führt den Verf. zu Näherungsformeln für die optischen Wirkungsquerschnitte der als klein vorausgesetzten Teilchen. — Die Ergebnisse des ersten Teiles der Untersuchungen werden im zweiten Teil für kleine Wassertropfen mit Eisenkern numerisch ausgewertet. Der dritte Teil enthält Betrachtungen bz. der Interpretation der interstellaren Verfärbung durch kleine Teilchen.

J. Picht.

Montroll, Elliot W. and J. Mayo Greenberg: Scattering of plane waves by soft obstacles. III. Scattering by obstacles with spherical and circular cylindrical symmetry. Phys. Review, II. Ser. 86, 889—898 (1952).

Die vorliegende Untersuchung schließt an frühere Arbeiten [R. Hart und E. Montroll, dies. Zbl. 42, 447; 44, 417, R. Hart, J. acoust. Soc. Amer. 23, 373 (1951)] an, in welchen die Streuung an scharfbegrenzten Hindernissen mittels einer Integralgleichung behandelt wurde. Für weiche (d. h. relative Abweichung der optischen Konstanten von denen des Vakuums klein) kugel- und zylinderförmige Streuer ergaben sich dabei einfache geschlossene Formeln. Diese Formeln werden in der vorliegenden Untersuchung auch für einen kugelsymmetrischen Streuer von kontinuierlich variablen optischen Konstanten nutzbar gemacht, indem dieser durch die für die betreffende Wellenlänge „beste“ scharfbegrenzte Kugel ersetzt wird. Radius und Brechungsindex dieser „besten“ Kugel wird aus der Forderung ermittelt, daß die Differenz zwischen den Quadraten der Wellenzahlen der vorgegebenen und der scharfen Ersatzkugel, mit dem Quadrat der Wellenfunktion der scharfen Kugel als Gewichtsfunktion über den Raum integriert, ein Minimum wird. — Als Beispiele werden die Streuung geladener Teilchen an einem Gaußschen, exponentiellen und an einem abgeschirmten Coulomb-Potential behandelt. Wird der Kugelradius groß gegen die Wellenlänge, so wachsen die Streuquerschnitte nicht wie bei der Bornschen Näherung über alle Grenzen, sondern streben beim abgeschirmten Coulomb-Potential einem endlichen Grenzwert zu, in den beiden anderen betrachteten Fällen werden sie sogar beliebig klein.

Walter Franz.

Tai, C. T.: Electromagnetic back-scattering from cylindrical wires. J. appl. Phys. 23, 909—916 (1952).

Die elektromagnetische Streuung an einem dünnen zylindrischen Draht wird mit einer Variationsmethode behandelt und das Ergebnis verglichen mit den Ergebnissen, welche von anderen Autoren durch Berechnung der induzierten EMK oder mittels Integralgleichungen erhalten wurden. Dabei wird vor allem die in früheren Arbeiten benutzte Randbedingung einer Kritik unterzogen, wonach die Stromstärke an den Enden des Drahtes verschwinden sollte. Läßt man bei Anwendung der Variationsmethode diese Randbedingung fallen, so erhält man zwar im allgemeinen automatisch an den Drahtenden sehr kleine Ströme, doch gibt es bestimmte kritische Fälle, für welche die Ströme auch an den Enden groß sind. Die Variationsmethode gibt im allgemeinen kleinere Streuintensitäten als die früheren Rechnungen, liefert jedoch nicht für bestimmte Richtungen Nullstellen wie diese. Die Übereinstimmung mit dem spärlich vorliegenden experimentellen Material wird nach Angabe des Verf. durch Anwendung der Variationsmethode verbessert.

Walter Franz.

Foix, Auguste: Sur la plus simple solution, en coordonnées polaires, des équations de Maxwell, et ses applications aux formules de la réfraction vitreuse dans les lentilles, et aussi sur le principe de Huygens. J. Phys. Radium 13, 445—450 (1952).

Dabrowski, Janusz: The interference of the enforced electric dipole radiation and the spontaneous electric quadrupole radiation. Acta phys. Polon. 11, 131—139 (1952).

**Bolotovskij, B. und A. Kolomenskij:** Zur Frage des Energieverlustes durch eine sich gleichförmig bewegendes Ladung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 59—61 (1952) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß man im Rahmen der von I. Tamm (dies. Zbl. 22, 421) entwickelten Methode, die von E. Fermi [Phys. Review, II. Ser. 57, 485 (1940)] gefundenen Energieverluste der Teilchen, auch ohne eine komplexe Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  einzuführen, ermitteln kann. Man hat nur die Feldgleichungen mit den richtigen, physikalisch begründeten, Anfangsbedingungen zu lösen. Das Resultat ist, daß man in den Formeln von Tamm  $1/\varepsilon$  durch den Operator  $\frac{1}{\varepsilon} + i\pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta(\varepsilon)$  ersetzen muß. Das ist aber gerade äquivalent einem komplexen  $\varepsilon$  mit unendlich kleiner Verdampfung. Die Bedeutung des Resultates liegt in dem Beweis, daß bei solchen Problemen die Einführung eines reellen  $\varepsilon$  nur unvollkommene, physikalisch unbegründete, Resultate liefern kann.

*P. Budini.*

**Kolomenskij, A.:** Die Energieverluste eines geladenen Teilchens, das sich in einem anisotropen Medium bewegt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 1097—1099 (1952) [Russisch].

Es werden die Energieverluste durch Anregung und Cerenkov-Strahlung eines sich in der Richtung der optischen OZ-Achse eines einachsigen Kristalles bewegendes Teilchen gegeben. Die Polarisation wird durch zwei dielektrische Konstanten  $\varepsilon_z(\omega)$  und  $\varepsilon_r(\omega)$  in Richtung der OZ-Achse und der dazu senkrechten Richtung charakterisiert. Die Energie  $W_r$ , die auf der Wegeinheit bei einer Entfernung größer  $r$  von der Achse der Spur verlorengeht, wird mit der üblichen Methode durch Lösung der Maxwell'schen Gleichungen und durch Berechnung des Poyntingschen Flusses ermittelt. Das Resultat ist:

$$(1) \quad W_r = \frac{2e^3 r}{\pi c^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_r} - 1 \right) i \omega \sigma^* K_1(\sigma^* r) K_0(\sigma r) d\omega,$$

wobei  $\sigma^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (1 - \beta^2 \varepsilon_r)$  und  $K_0, K_1$  modifizierte Besselsche Funktionen sind. Der entsprechende Cerenkovsche Verlust ist gegeben durch:

$$(2) \quad W_{\text{Cer}} = \pm \frac{e^2}{c^2} \int \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2} \right) \omega d\omega; \quad \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\beta^2 \varepsilon_r - 1) > 0.$$

Aus dieser Formel ergibt sich die interessante Folgerung, daß die Cerenkovschen Verluste, unter bestimmten Bedingungen ( $\varepsilon_z < 0, \varepsilon_r \sim 0$ ), im anisotropen Medium anomal stark (im Vergleich zum isotropen Medium) zunehmen. Im allgemeinen scheint es, daß bereits eine kleine Veränderung der Anisotropie beide Formen der Verluste [(1) und (2)] wesentlich verändern kann. Es wird am Ende ein Beispiel diskutiert.

*P. Budini.*

**Christov, Chr. Ja.:** Über den Durchgang der Lichtstrahlen durch eine planparallele kristallinische Platte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 1269—1272 (1952) [Russisch].

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 553—556, 799—802 (1951)], in denen der Durchgang elektromagnetischer Wellen willkürlicher Länge, die senkrecht auf eine flächenparallele Platte eines rhombischen Kristalls fallen, behandelt wurden, wobei die einfallende Welle linearpolarisiert in Richtung einer der Kristallachsen vorausgesetzt wurde, wird in vorliegender Arbeit spezieller angenommen, daß die Wellenlänge des einfallenden Lichtes groß ist gegen die Dimensionen der elementaren Kristallzellen. Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß die magnetische Permeabilität des Kristalls gleich der des Vakuums ist, daß aber die Dielektrizitätskonstante nicht gleich ist und im Kristall von der Richtung des elektrischen Vektors abhängt. Die Mittelwerte  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  stehen dauernd auf den Oberflächen senkrecht. Die zeitlichen Mittelwerte des Stromes vor, in und hinter dem Kristall sind einander gleich. Nach Angabe des Verf. ist die Feldverteilung qualitativ der von Ewald und Born gefundenen gleich, doch sind die zahlenmäßigen Zusammenhänge besonders bei den Feldern, die sich auf die Mikroverteilung in der Peripherieschicht beziehen, verschieden.

*J. Picht.*

**Biot, A.:** Sur certaines systèmes pancratiques non symétriques à trois lentilles. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **66**, 152—155 (1952).

Es soll eine Linsenfolge angegeben werden, mit der man durch Linsenverschiebung verschiedene Vergrößerungen herstellen kann. Hierzu kann eine Folge dreier Linsen  $L_1, L_2, L_3$  dienen, wo die Brennweiten  $f'_1, f'_3$  positiv sind,  $f'_2$  negativ. Verschiebt man  $L_1$  und  $L_2$  um den gleichen Betrag unter Festhaltung des Dingortes und des Ortes von  $L_3$ , so lassen sich Brennweiten und Abstände so wählen, daß für einen gewissen Bereich der Verschiebung der Bildort sich praktisch nicht ändert (vgl. den pankratischen Kondensator, Carl Zeiss DRP. 620537 v. 24. XII. 33, veröff. 3. X. 35). Der Verf. hat in einer früheren Arbeit [Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **64**, 116—124 (1950)] den Fall  $f'_1 = f'_3$  behandelt. Jetzt läßt er diese Bedingung fallen. Als Ausgangsstellung sieht er die an, wo der Bildort für  $L_1$  und der Dingort für  $L_3$  in die negativen Hauptebenen von  $L_2$  fallen. Als Bestimmungsgrößen dienen  $f'_2$  und die Abstände  $L_1 L_2 = e_1, L_2 L_3 = e_2; L_2 O = l_1, L_2 O' = l_2$  in der Ausgangsstellung. (Die Linsendicken werden vernachlässigt.) Für den Abstand  $OO'$  bei einer Verschiebung um  $a$  kommt man zu einer Gleichung:  $OO' = -l_1 + l_2 + a\varphi(a)$ , wo  $\varphi(a)$  eine gebrochene Funktion von  $a$  ist, Zähler und Nenner sind vom dritten Grade. Die Bestimmungsstücke sind so zu wählen, daß  $OO'$  als praktisch fest anzusehen ist, doch verzichtet der Verf. wegen der verwickelten Form von  $\varphi$  auf eine nähere Behandlung.

H. Boegehold.

**Iwata, Giiti:** Realization of special contact transformations with static electromagnetic fields in vacuo. Progress theor. Phys. **8**, 183—192 (1952).

Es werden die notwendigen Bedingungen für zwei Berührungstransformationen, nämlich für Koordinaten-Koordinaten-Transformation sowie für Impulsmoment-Koordinaten-Transformation, bei statischen elektromagnetischen Feldern im Vakuum abgeleitet. Es wird weiter gezeigt, daß eine Geschwindigkeits-Koordinaten-Transformation nicht möglich ist. Es wird anschließend ein Beispiel (Bewegung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld) gegeben, das beide Arten von Berührungstransformationen gestattet. — Verf. weist einleitend darauf hin, daß gewisse optische und elektronenoptische Instrumente gewissermaßen mathematische Berührungstransformationen spezieller Art zwischen Anfangs- und Endvariablen ausführen und daß umgekehrt die Berührungstransformation es möglich macht, vollkommene Instrumente zu konstruieren, durch die alle von einem Punkt in beliebiger Richtung und mit beliebiger Geschwindigkeit emittierten Teilchen in einem anderen Punkte vereinigt werden.

J. Picht.

### Relativitätstheorie:

**Schlomka, Teodor:** Zur Darstellung physikalischer und geometrischer Größen durch Welttensoren 1. und 2. Stufe. Z. Naturforsch. **7a**, 637—645 (1952).

Es wird die Zuordnung von Größen verschiedener Transformationseigenschaften im  $R_3$  (Skalar, Vektor, Tensor) zu Größen des  $R_4$ , die sich bei allgemeinen Lorentztransformationen wie Tensoren verschiedener Stufe verhalten, untersucht. Diese Zuordnung läßt sich bekanntlich in einem bestimmten Bezugssystem (z. B. Ruhesystem) auf mannigfache Weise vermitteln. Die in jedem Bezugssystem gültige Darstellung kann man aber hieraus erst gewinnen, wenn man die Transformationsgleichungen der betreffenden dreidimensionalen Größe bei Lorentztransformation kennt. Diese wiederum lassen sich nur aus der physikalischen Definition der Größe und der Lorentzinvarianz der Grundgleichungen der betreffenden Theorie gewinnen (z. B. die Transformation von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  aus der Lorentzinvarianz der Maxwell'schen Gleichungen) und damit hat man dann auch die Viererdarstellung der Größe des  $R_3$  (z. B.  $F^{ik} = (\mathfrak{H}_{ik}; \mathfrak{E}_i)$ ). Insofern liefert die Arbeit nichts Neues, sondern gibt eine Zusammenstellung der Zuordnungen in den in der Physik am häufigsten vorkommenden Fällen. Ein Mangel scheint dem Ref. der Verzicht auf die Unterscheidung zwischen



polaren und axialen Raumvektoren zu sein, da dieser Unterschied gerade beim Übergang zum  $R_4$  wesentlich wird.

*F. Beck.*

**Ueno, Yoshio and Hyôitirô Takeno:** On equivalent observers. Progress theor. Phys. 8, 291—301 (1952).

L'intension des auteurs est de considérer des observateurs mutuellement équivalents pour „quelque“, et non pour „toutes“ les lois physiques. Ils cherchent à construire les groupes de transformations correspondants par un tenseur des deux „sous-groupes“ suivants: a) mouvements euclidiens et translations dans le temps, b) rotations tridimensionnelles. Ils obtiennent dans le cas a) le groupe de Lorentz, celui de Galilée, et un groupe à temps absolu et expansion de l'espace; dans le cas b), les transformations de la géométrie ondulatoire“ de Sibatà, de la „nouvelle relativité“ de Page, à côté de transformations classiques de la Relativité cosmologique (et, bien entendu, de celle de Lorentz).

*O. Costa de Beauregard.*

**Jordan, Pascual:** Über die Erhaltungssätze der Physik. Z. Naturforsch. 7a, 78—81 (1952).

Verf. deutet an, wie man sich etwa eine sechsdimensionale Transformationsgruppe konstruieren könnte, um neben den Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und elektrische Ladung, die sich aus der Invarianzgruppe der vierdimensionalen Koordinatentransformationen und Eichtransformationen, bzw. der dazu isomorphen fünfdimensionalen homogenen Koordinatentransformationen ergeben, noch einen weiteren Erhaltungssatz für die Neutronenladung herzuleiten, die die Quellstärke des Kernkraftfeldes bestimmt.

*G. Ludwig.*

**Mikhail, F. I.:** The relativistic clock problem. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 608—615 (1952).

Verf. untersucht mittels der Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie das sogenannte Uhrenparadoxon, welches darin besteht, daß zwei relativ zueinanderbewegte Beobachter für die Zeit zwischen zwei Begegnungen verschiedene Messungen machen. Das Problem wird dahingehend formuliert, daß ein Vergleich der Bogenlängen zweier geodätischer Kurven gezogen wird, die sich in zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten schneiden. Eine Spezialisierung, bei der sich in einer Schwarzschildmetrik ein Beobachter radial pendelnd und der andere das Zentrum umkreisend bewegt, wird in drei verschiedenen Näherungen durchgerechnet, und das so erhaltene Resultat wird verglichen mit einem Ergebnis, das sich aus einer „naiven Anwendung der speziellen Relativitätstheorie“ ergibt. — Interessant ist die Bemerkung, daß es — auf Grund einer Arbeit von McCrea [Nature 167, 680 (1950)] — schon in der speziellen Relativitätstheorie gelingt, das Paradoxon aufzulösen.

*F. Cap.*

**Raychaudhuri, Amal Kumar:** Radiation sphere in Einstein universe. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 31—36 (1952).

Zur Untersuchung der Möglichkeit von Inhomogenitäten im Einsteinschen Weltmodell wird ein durch eine Kugel begrenzter Bereich in das Weltmodell eingebettet, der von Hohlraumstrahlung erfüllt ist, aber sonst keine Materie enthält. Verf. bestimmt die Energieverteilung im Innern dieser Kugel und schließt den Druck und die  $g_{ik}$ , die für diesen Bereich gelten, stetig an die entsprechenden Größen der Umgebung an. Die Energiedichte wird dann an der Grenzfläche unstetig.

*R. Kippenhahn.*

**Frankl', F. I.:** Über Gravitationswellen und über die Bewegung von Gasen in starken, veränderlichen Gravitationsfeldern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 51—54 (1952) [Russisch].

Es wird die Bestimmung des Gravitationsfeldes und der Bewegung eines Gases auf Grund der strengen nichtlinearen Einsteinschen Feldgleichungen untersucht. Sind die  $g_{ik}$ , ihre Ableitungen, die Zustandsgrößen des Gases und die Geschwindigkeit seiner Teilchen auf einem Gebiet einer (raumartigen) Hyperfläche vorgegeben und widersprechen diese Anfangsbedingungen nicht den Gravitationsgleichungen,

so ist die Lösung eindeutig bis auf Koordinatentransformationen, welche die Anfangsbedingungen ungeändert lassen.

*R. Kippenhahn.*

**Donder, Théophile De:** Le rôle des liaisons de solidité en relativité générale. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 347—348 (1952).

L'A se propose d'adapter ses résultats concernant les liaisons de solidité en relativité restreinte (ce Zbl. **28**, 90) à la relativité générale. Il a étudié précédemment les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $M$  [qui figure dans la relation fondamentale invariante  $M d(x) = M' d(x')$ ] soit facteur tensoriel dans les potentiels  $g_{\alpha\beta}$  et leurs dérivées premières. Il introduit les liaisons correspondantes dans l'expression du principe variationnel de la relativité générale.

*A. Lichnerowicz.*

**Majumdar, Nandagopal:** A note on the apparent disappearance of radiation in the theory of expanding universe. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 86—88 (1952).

**García, Godofredo:** Die neue allgemeine Relativitätstheorie. Symposium Proplem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 139—160 (1952) [Spanisch].

L'A. donne un exposé d'ensemble de sa théorie relativiste de la gravitation (ce Zbl. **44**, 423) qui est étroitement liée avec les idées de G. D. Birkhoff (théorie alternative), mais en diffère par modification de la métrique et conservation dans celle-ci d'un potentiel gravitationnel temporel  $g_{00}$ . Notons en particulier dans ce papier la comparaison avec le potentiel de Levi-Civita en seconde approximation, qui est instructive.

*A. Lichnerowicz.*

• **Jordan, Pascual:** *Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie.* (Die Wissenschaft, Bd. 107.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1952. VIII, 207 S.

Das Buch umfaßt im ersten Teil die klassische Einsteinsche Gravitationstheorie und im zweiten Teil die projektive Relativitätstheorie mit variabler Gravitationsinvariante, die auf einem neuartigen Gedanken des Verf. beruht. — Nach einer kurzen halb empirischen, halb theoretischen Einführung in das Problem der Raumkrümmung beginnt das Buch mit mehreren Paragraphen über die mathematischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Diese Grundlagen werden von Anfang an in konsequenter und sehr übersichtlicher Form dargestellt. Besonders hervorzuheben sind die vom Verf. teilweise neu eingeführten recht geistreichen Beweise, die eine relativ kurze Fassung der Darstellung erlauben, so daß die gesamten mathematischen Grundlagen, d. h. praktisch alles Wesentliche der Riemannschen Geometrie, auf weniger als 40 Seiten zusammengefaßt erscheint. Im Anschluß an die mathematische Grundlegung wird die physikalische Deutung der Riemannschen Geometrie als Gravitationstheorie durchgeführt, wobei die wichtigsten speziellen Lösungen der Gravitationsgleichungen explizit vorgerechnet werden. Den Abschluß bilden die kosmologischen Modelle, die sich aus der allgemeinen Relativitätstheorie ergeben. Zur Einführung der im zweiten Teil des Buches dargestellten projektiven Relativitätstheorie wird die Invarianzgruppe der Einstein-Maxwell-Theorie (nämlich die allgemeinen vierdimensionalen Koordinatentransformationen und die Eichtransformationen) untersucht und in Zusammenhang mit fünfdimensionalen homogenen Koordinatentransformationen gebracht. Die sich auf Grund dieser letzten Transformationsgruppe entwickelnde Vektor- und Tensor-Rechnung wird einschließlich der zugehörigen kovarianten Differentiation und des Überganges von der fünfdimensionalen zu einer inhomogenen vierdimensionalen Beschreibung dargestellt. Im letzten Kapitel des Buches werden dann mögliche Feldgleichungen aufgestellt, in speziellen Fällen besonders für kosmologische Modelle gelöst und mit der ursprünglichen Einsteinschen Theorie und der Erfahrung verglichen. — Wenn auch manche der angeschnittenen Probleme heute noch keine endgültige und abgeschlossene Lösung gestatten, so wird das Buch jedem Leser eine Menge interessanter und geistreicher Anregungen bieten.

*G. Ludwig.*

**Jordan, P.:** Zur Integration der kosmologischen Gleichungen. Z. Phys. **132**, 655—658 (1952).

Die kosmologischen Feldgleichungen (abgeleitet z. B. in P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig 1952, vgl. vorsteh. Referat, und G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, Braunschweig 1951, dies. Zbl. **44**, 424) erlauben eine Lösung, bei der der Radius der Welt linear mit der Zeit anwächst. In der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe des Störungsverfahrens Lösungen untersucht, die dieser benachbart sind.

*G. Ludwig.*

**Jordan, P.:** Die Nichtigkeit des Birkhoffschen Satzes in der erweiterten Gravitationstheorie. Z. Phys. **133**, 558—560 (1952).

Es wird gezeigt, daß in der Gravitationstheorie mit variabler Gravitationsinvariante der Birkhoff'sche Satz, daß jedes kugelsymmetrische Vakuumfeld notwendigerweise ein statisches Feld ist, also der Schwarzschild'schen Lösung entspricht, nicht mehr gültig ist. —

G. Ludwig.

Thiry, Yves: Sur une généralisation du problème de Schwarzschild à une théorie unitaire. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1480—1482 (1952).

L'A. donne les équations fondamentales du problème de Schwarzschild dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry. Le problème revient à la recherche d'une métrique à 5 variables de la forme

$$d\sigma^2 = -e^\nu (dx^0 - e^{-\nu} \gamma_{40} dt)^2 + e^\lambda dt^2 - e^\mu dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

satisfaisant aux équations  $S_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = 0$  ou = un tenseur connu. Les équations correspondantes sont formées et leur compatibilité assurée. Une solution particulière est donnée qui est équivalente au champ extérieur (au sens unitaire) dû, en relativité générale, à une sphère électrisée.

A. Lichnerowicz.

Ingraham, L.: Conformal relativity. Nuovo Cimento, Ser. IX **9**, 886—926 (1952).

Verzichtet man auf die Invarianz des vierdimensionalen Abstandes und fordert nur die Invarianz der Winkel (Invarianz des Lichtkegels), so erhält man die konforme Relativitätstheorie. Hierdurch wird die Gesamtheit der physikalisch gleichwertigen Beobachter schon in der speziellen Theorie erweitert auf alle diejenigen, die sich mit gleichmäßiger Beschleunigung relativ zueinander bewegen. In der konformen allgemeinen Relativitätstheorie wird die Forderung nach einem Krümmungsminimum aufgestellt, was zum Auftreten mehrerer Feldtypen führt. Die ganze Theorie kann in vierdimensionaler Schreibweise formuliert werden, doch ebenso — und zwar ohne „Zylinderbedingungen“ — auch in höherdimensionalen Räumen. Verf. verwendet in seiner Arbeit die fünfdimensionale projektive Schreibweise unter Verwendung von sechs homogenen Koordinaten. Mit Hilfe dieser „hexasphärischen“ Koordinaten ist es möglich, die konforme Geometrie von vier Dimensionen durch konstante lineare Transformationen zu beschreiben. Nach Aufstellung einer Lagrange-Funktion, Variation nach den beiden unabhängigen Variablen  $\Gamma_{\mu\rho}^k$  (projektiver Zusammenhang,  $k=1, \dots, 5$ , inhomogene Koordinaten im  $P_5$ ,  $\mu, \rho=0, \dots, 5$ , homogene Koordinaten im  $H_5$ ) und  $S_{\mu\nu}$  (symmetrischer Tensor, quadratische Form, Signatur  $-+++-$ ) liefert  $\delta \int L dx$  die Bedingung für minimale Krümmung und materielle Feldgleichungen ( $\alpha, \beta$  inhomogene Koordinaten im  $H_5$ ), in welchen keine reinen Materieglieder auftreten. Seien  $x^\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, 5$ ) die inhomogenen Koordinaten im  $H_5$  und  $X^\mu$  ( $\mu=1, \dots, 5$ ) die homogenen Koordinaten im  $H_5$ , dann gelten  $x^\alpha = f^\alpha(X^\mu)$ ; mit  $\gamma^{\alpha\beta}$ , der „Metrik“ im  $H_5$ , lauten dann die Feldgleichungen ( $G_{\alpha\beta}$  Einsteintensor von  $R_{\alpha\beta}$ )

$$G_{\alpha\beta} = 2f_{\alpha}^{\gamma} f_{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (f)^2, \quad -\overset{\gamma}{V}_{\beta} f_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad \text{wo } f_{\alpha\beta} = f_{\beta, \alpha} - f_{\alpha, \beta}$$

und  $\overset{\gamma}{V}_{\beta}$  die invariante Ableitung bezüglich der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{smallmatrix} \right\}_{\gamma}$ . Zum Zweck der Aufspaltung in die verschiedenen Felder setzt Verf.

$$\gamma_{mn} = g_{MN} + \varphi_M \varphi_N, \quad \gamma_{m5} = \varphi_M, \quad \gamma_{55} = +1, \quad g_{MN}: (+ + + -)$$

( $m, n$   $\left( \begin{smallmatrix} m, n \\ M, N \end{smallmatrix} \right) = 1, \dots, 4$ , Koordinaten der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit) und erhält in vierdimensionaler Schreibweise  $G_{MN} = K_{MN}$ , wo  $K_{MN}$  ein sich linear aus 5 Energietensoren zusammensetzender Tensor ist. Außerdem ergeben sich 2 (skalare und vektorielle) „Mesonengleichungen“ und ein Maxwell'sches Quadrupel — alle diese Felder sind in  $K_{MN}$  vertreten.  $g_{MN}$  bestimmt die Winkel im physikalischen vierdimensionalen Raum. — Die — eichinvarianten — neuen Feldgleichungen tauchen ganz automatisch auf — bloß durch die, durch den konformen Standpunkt erwungene Erweiterung:  $4 \times 4 g_{MN}$  (allgemeine übliche Relativitätstheorie)  $\rightarrow 5 \times 5 \gamma_{\alpha\beta}$  (projektive Theorie)  $\rightarrow 6 \times 6 S_{\mu\nu}$  (konforme Theorie). Die erhaltenen Feldgleichungen sind untereinander gekoppelt und nichtlinear. Aus der Kopplung schließt Verf., daß demnach alle Felder (auch die Mesonen) einer rein klassischen oder — nach Quantisierung — alle (auch Gravitation) einer rein statistisch-quantenhaften Interpretation zugänglich sein müssen. Da aus den Feldgleichungen ersichtlich ist, daß Energie, gleich welcher Art, den Raum krümmt, sei zu schließen, daß die heute üblichen, linearen Feldtheorien der Elementarteilchen im flachen Raum in Gebieten hoher Energiekonzentrationen, z. B. im Kern, versagen müssen. Läßt man aber nichtlineare Glieder in den Feldtheorien zu, so gäben nach Ansicht des Verfassers nur seine Feldgleichungen geometrisch bedeutungsvolle Nichtlinearitäten. Verf. hebt weiter — mit einem Seitenblick auf die verschiedenen Mesonenmassen — hervor, daß in seiner Theorie die Ruh-



masse nicht invariant ist gegenüber Transformationen zwischen physikalisch gleichwertigen Beobachtern. Schließlich wird die — nach Meinung des Ref. gewagte — Hypothese aufgestellt, daß Quanteneffekte durch „bumps“ der Raumkrümmung erzeugt werden könnten. — Die beiden letzten Teile der sehr umfangreichen Arbeit beschäftigen sich mit rein geometrischen Fragen und mit einer Erweiterung der Theorie auf Spinorfelder. Im einzelnen werden die Begriffe der physikalischen Geometrie und der Geometrie der quadratischen Formen definiert, es werden die „Hauptsätze“ der konformen Relativitätstheorie (die physikalische Geometrie ist die konforme des flachen  $C_4 = P_3$ ), der projektiven Relativitätstheorie, der affinen Theorien erläutert, sowie Einsteins Einwände gegen die „projektiven Theorien“ besprochen. Die „Vergeometrisierung“ des Elektrons schließlich erfolgt durch den Übergang zum lokalen komplexen  $P_4^*$ , der mit dem achtdimensionalen Spinraum  $S_8$  im  $P_5$  zusammenfällt. Die Verdoppelung des üblichen vierdimensionalen Spinraumes bringt Verf. in Zusammenhang mit den beiden Vorzeichen der Energie.

F. Cap.

**Tonnellat, Marie-Antoinette:** Compléments à la théorie unitaire des champs.

J. Phys. Radium **13**, 177—185. (1952).

Eine frühere Arbeit brachte die Lösung der Gleichungen  $\nabla_\nu r_{\mu\lambda} = 0$  unter sehr allgemeinen Bedingungen [J. Phys. Radium **12**, 81—88 (1951)]. Es kommen hier folgende Punkte zur Sprache: 1. Konsequenzen der Änderung der Tensoren der Valenz zwei, von denen die Weltfunktion abhängt; 2. Kompatibilität der Gleichungssysteme; 3. Bedingungen, denen das Bivektorfeld zu genügen hat, damit die elektromagnetischen Gleichungen, die Maxwellsche Form annehmen. Der letzte Paragraph enthält einiges über Massenglied und kosmologisches Glied.

J. A. Schouten.

### Quantentheorie:

● **Bohm, D.:** Quantum theory. London: Constable & Co. Ltd., 1951. 646 p. 45 s.

Verf. schildert zunächst eingehend, wie aus der klassischen Physik und der Diskussion zahlreicher Experimente die Begriffsbildungen der Quantentheorie hervorgegangen sind. Erst dann folgen die mathematische Formulierung der Theorie und Anwendungen auf einfache Probleme. Die anschließenden Kapitel über Näherungslösungen der Schrödingergleichung und Theorie der Streuung sind reichhaltiger als in andern Darstellungen. Ein letztes Kapitel über die Quantentheorie des Mesonenprozesses behandelt u. a. das Paradoxon von Einstein, Rosen und Podolsky, jedoch nicht die Arbeiten des Verf. zur Frage der verborgenen Parameter. — Im Hinblick auf den Umfang des Buches vermißt man zunächst die relativistische Theorie, die Quantentheorie der Felder, einige mathematische Fragen und vor allem eine angemessene Berücksichtigung des Mehrteilchenproblems. Jedoch liegt der Wert dieses Buches gerade in der gründlichen Durcharbeitung des vorher genannten Stoffes. Verf. beschränkt sich nicht auf eine formale mathematische Behandlung, sondern legt großen Wert auf die anschauliche physikalische Interpretation der Rechnung. Man findet zahlreiche Hinweise auf Bücher und neuere Originalarbeiten sowie viele Aufgaben.

G. Höhler.

**Takabayasi, Takehiko:** On the formulation of quantum mechanics associated with classical pictures. Progress theor. Phys. **8**, 143—182 (1952).

Es wird die Möglichkeit klassischer Bilder der Quantenmechanik untersucht. Eine konsequente Durchführung der Analogie führt zu falschen Erwartungswerten. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, muß man mit Bohm (dies. Zbl. **46**, 210) eine Theorie der Messungen hinzufügen, die mit der Quantentheorie der Messungen identisch ist und dazu führt, daß die Meßwerte nur durch die Gesamtheit, nicht aber durch die verborgenen Parameter bestimmt sind. Die Arbeit schließt mit einigen Anwendungen und einem Vorschlag zur Erweiterung der Theorie.

F. Penzlin.

**Falk, Gottfried:** Eine kanonische Formulierung der Relativitätsmechanik und ihr quantentheoretisches Analogon. Z. Phys. **132**, 44—53 (1952).

Es gelingt, eine relativistisch invariante kanonische Formulierung der klassischen Punktmechanik zu finden, wobei die Masse als Funktion der vier Orts- und

Impuls-Koordinaten die Stellung der Hamilton-Funktion übernimmt. Die korrespondenzmäßige Übertragung in die Quantenmechanik führt zu einem Eigenwertproblem für die Masse, das in den bisher behandelten Fällen, z. B. dem des freien Massenpunktes, zu einem kontinuierlichen Massenspektrum führt, so daß eine Begründung des empirischen Massenspektrums prinzipiell weitergehende Voraussetzungen erfordert.

*G. Ludwig.*

**Kar, S. C.: Versuch einer logischen Quantendynamik des Elektrons. I.** Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 1—21 (1952).

Der Umstand, daß eine (der Diracschen ähnliche) quantentheoretische Bewegungsgleichung des Elektrons durch Umkehr des Vorzeichens von Ladung und Masse in eine andere Bewegungsgleichung übergeht, wird als Zeichen des Versagens des Kausalitätsprinzips angesehen. Hypothetisch werden einige statistische Sätze aufgestellt.

*F. Hund.*

**Jánossy, L.: The passage of a wave packet through a potential barrier.** Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **2**, 171—174 (1952).

Es wird die Aufspaltung eines beliebig geformten Wellenpaketes beim Auftreffen auf eine  $\delta$ -artige Potentialschwelle untersucht.

*F. Penzlin.*

**Bargmann, V.: On the number of bound states in a central field of force.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 961—966 (1952).

Es wird gezeigt, daß für die Zahl  $n_l$  der diskreten Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung in einem kugelsymmetrischen Potentialfeld, die zum Drehimpuls  $l$  gehören,  $(2l+1)n_l < J$  gilt, wobei  $J = \int r |V(r)| dr$  ist mit  $V(r)$  als Potential.

*G. Ludwig.*

**Gáspár, R.: Über ein analytisches Näherungsverfahren zur Bestimmung von Eigenfunktionen und Energieeigenwerten von Atomelektronen. I.** Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **2**, 151—170 (1952).

Ein analytisches Verfahren zur Bestimmung einer näherungsweise Eigenfunktion wird folgendermaßen gewonnen: 1. wird angenommen, daß die effektive Kernladung  $Z_p/Z$  eine universelle Funktion von  $x = Z^{1/3} r/0,8853 a_0$  ist; 2. zeigt ein Vergleich mit den nach der Methode des „self-consistent field“ gewonnenen Werten, daß (1)  $Z_p/Z = e^{-\lambda_0 x}/(1 + A_0 x)$  mit  $\lambda_0 = 0,1837$  und  $A_0 = 1,05$  die Tatsachen gut beschreibt; 3. werden in

$$(2) \quad \frac{Z_p^0 e}{r} = \frac{Z^* e}{r} + \frac{1}{2} \frac{\lambda e a_0}{r^2} + \frac{\lambda_0}{e}$$

die Parameter  $Z^*$ ,  $\lambda$  und  $\lambda_0$  so bestimmt, daß für  $r_{\max}$  möglichst gute Übereinstimmung mit (1) herauskommt. Mit (2) läßt sich dann die Schrödingergleichung analytisch integrieren. Die Rechnung wird durchgeführt. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen, die nach der Methode des „self-consistent field“ gewonnen wurden, ist befriedigend.

*F. Penzlin.*

**Baranova, E. I.: Über die Verschiebung des Energieniveaus eines atomaren Elektrons in einem zentral-symmetrischen Felde bei verallgemeinerter Coulombscher Wechselwirkung.** Vestnik Moskovsk. Univ. **7**, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7), 71—73 (1952) [Russisch].

**Vigier, Jean-Pierre: Forces s'exerçant sur les lignes de courant usuelles des particules de spin 0, 1/2 et 1 en théorie de l'onde-pilote.** C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1107—1109 (1952).

Etant données des équations d'ondes:  $\hbar D_\nu \beta^\nu \varphi + \mu \varphi = 0$  avec:  $D_\nu = \partial_\nu - i \varepsilon A_\nu$ ,  $\mu = m_0 c$ ;  $\varepsilon = e/\hbar c$ , l'A. calcule le courant:  $j^\nu = \varphi^\dagger \beta^\nu \varphi$  et montre que la particule — en théorie de l'onde pilote — se meut comme si elle était soumise à un potentiel invariant et à un potentiel quadrivecteur. Dans l'interprétation de la double solution, l'A. détermine la forme des  $g_{\mu\nu}$  — qui définissent les particules élémentaires — de telle sorte que les lignes singulières soient en même temps lignes de courant et géodésiques.

*A. Visconti.*

**Vigier, Jean-Pierre:** Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1372—1375 (1952).

Etude de la validité des hypothèses introduites par L. de Broglie (v. l'analyse suivante) pour l'extension de l'équation de Schrödinger à des systèmes à plusieurs particules dans le cadre de la théorie de la double solution. L'A. considère deux particules décrites à l'aide d'une théorie unitaire qu'il a précédemment proposée (v. l'analyse précédente); l'étude de leurs mouvements est simplifiée, dans l'espace de configuration construit à l'aide de leurs coordonnées  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  et du temps  $t$ , par l'hypothèse:

$$m_j \vec{V}_j = - \text{grad}_j \varphi, \quad j = 1, 2;$$

$m_j, \vec{V}_j$ : masse et vitesse de la  $j$ -ième particule et  $\varphi$  représentant par hypothèse, une fonction de Jacobi pour l'ensemble des deux particules. En joignant à cette première hypothèse deux autres portant toujours sur les mouvements de ces particules et faisant appel à un théorème de A. Régnier [C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1370 (1952)], l'A. montre que la fonction d'ondes  $\Psi$  satisfait effectivement à l'équation de Schrödinger et conclut par certaines remarques sur l'interprétation statistique de cette équation.

A. Visconti.

**Broglie, Louis de:** Sur l'interprétation de la mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration par la théorie de la double solution. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1345—1349 (1952).

Etude, dans le cadre de la double solution, du passage de la Mécanique ondulatoire d'un seul corpuscule placé dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire d'un système de corpuscules, représentés dans l'espace de configuration, et soumis à un champ donné. Considérant pour plus de simplicité deux corpuscules, l'A. obtient à partir de la compatibilité des représentations de ce système dans l'espace physique et l'espace de configuration, la forme générale des phases des ondes individuelles  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  de chacun des corpuscules ainsi que la phase de l'onde  $\Psi$  dans l'espace de configuration. Considérant ensuite que les forces quantiques doivent avoir même valeur dans l'espace de configuration et l'espace physique, l'A. obtient également leurs expressions et montre que le passage des forces quantiques  $Q_1$  et  $Q_2$  à la force quantique  $Q$  de l'espace de configuration se fait — comme en Mécanique classique — en ne prenant qu'une fois le terme d'énergie mutuelle. Il déduit enfin de l'ensemble de ces résultats, que pour obtenir l'énergie dans l'espace de configuration on traite de façon symétrique les potentiels classique d'interaction et celui quantique. Il convient de remarquer enfin que cette Note trouve sa conclusion dans une note suivante [C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1453 (1952)] où l'étude des particules de même nature permet de conclure que dans l'espace de configuration, l'onde  $\Psi$  doit être symétrique ou antisymétrique.

A. Visconti.

**Majumdar, R. C., S. P. Pandya and S. Gupta:** The equation of motion of a spinning particle in a meson field. Progress theor. Phys. **8**, 670—672 (1952).

**Bustamante, Enrique:** Elementary particles at rest. Phys. Review, II. Ser. **88**, 1179—1181 (1952).

**Corben, H. C.:** A unified field theory with varying charge and rest-mass. Nuovo Cimento, Ser. IX. **9**, 235—252 (1952).

Verf. greift einen alten Gedanken von Kaluza und Klein wieder auf, um eine einheitliche Feldtheorie für Protonen und Neutronen aufzustellen. Masse und Ladung sind jedoch keine Konstanten der Bewegung. Die Bedingungen, unter denen eine Änderung dieser Größen zu erwarten ist, werden näher untersucht: sie tritt insbesondere dann ein, wenn die Teilchen sehr nahe aneinander herankommen. Einige Grenzfälle werden betrachtet. Eine Quantisierung wird nicht versucht.

F. Penzlin.



**Caldirola, P. e P. Gulmanelli:** Su una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin  $1/2$ . Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 834—845 (1952).

An Hand des Wasserstoffspektrums und des magnetischen Moments des Elektrons wird die von H. C. Corben (siehe folgendes Referat) vorgeschlagene Theorie mit der Diracschen Theorie verglichen.

*F. Penzlin.*

**Corben, H. C.:** A reformulation of field theory. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 580—596 (1952).

Eine der Theorie von Kaluza und Klein ähnliche Feldtheorie wird quantisiert. Die elektrische Ladung wird dabei als Operator eingeführt, was zu einigen Vereinfachungen in der (nicht dargestellten) Quantenelektronendynamik führt, da die mit den Massentermen zusammenhängenden Schwierigkeiten nicht auftreten.

*F. Penzlin.*

**Corben, H. C.:** The current density in quantum electrodynamics. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 1071—1079 (1952).

Zu der im vorsteh. Referat vorgeschlagenen Theorie wird ein neuer Energie-Impuls-Ladungstensor aufgestellt und untersucht.

*F. Penzlin.*

**Yevick, George J.:** On the quantum theory for a finite-sized electron. I. Phys. Review, II. Ser. 85, 911—917 (1952).

Verf. betrachtet klassische Modelle des Elektrons, die eine lorentzinvariante Ausdehnung beschreiben. Die „Gestalt“ eines Elektrons hängt dabei von seiner Bewegung ab. — Des weiteren wird die quantentheoretische Behandlung mit Hilfe der von Feynman gegebenen Lagrange-Formulierung der Quantentheorie in Angriff genommen.

*H. Lehmann.*

**Morpurgo, G.:** Sulla corrispondenza tra elettrodinamica classica e quantistica. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 808—817 (1952).

Verf. vergleicht die klassische Dirac-Eliezer-Gleichung [Reviews modern Phys. 19, 147—184 (1947)] mit der quantenelektrodynamischen Gleichung, welche die Zeitabhängigkeit des Erwartungswerts für den Ort des Elektrons bestimmt. Er findet im nichtrelativistischen Fall und in Dipolnäherung insbesondere beim harmonischen Oszillator, daß die Schwierigkeiten der nichtphysikalischen Lösungen beim Übergang zur Quantentheorie erhalten bleiben.

*G. Höhler.*

**Dodo, T. and R. Utiyama:** On the equivalence principle. Progress theor. Phys. 7, 589—591 (1952).

Verff. weisen darauf hin, daß man die Äquivalenz zwischen pseudoskalarer und pseudovektorieller Kopplung (vgl. M. M. Case, dies. Zbl. 33, 328) durch eine Variablentransformation in der Lagrange-funktion darstellen kann.

*H. Lehmann.*

**Fujiwara, Izuru:** Operator calculus of quantized operator. Progress theor. Phys. 7, 433—448 (1952).

Die Operator-Methode von Fujiwara [Progress theor. Phys. 7, 433 (1952)] wird benutzt, um verschiedene Resultate anderer Autoren neu abzuleiten. Es handelt sich im wesentlichen um den Beweis der Äquivalenz von Feynmans Theorie des positiven Elektrons und der Methode der zweiten Quantelung, ferner um Schwingers Behandlung der Feldquantisierung mit Greenschen Funktionen (dies. Zbl. 44, 430) und die „Diffusions“-gleichung Feynmans [dies. Zbl. 40, 280; 44, 233; gemeint sind die Gleichungen (45) a. a. O.]. Die  $S$ -Matrix wird in formal geschlossener Gestalt angegeben. Am Schlusse wird die Vielfacherzeugung von Paaren von Bosonen und Fermionen untersucht. Für Bosonen ergibt sich die schon von Glauber (dies. Zbl. 44, 436) gefundene Poisson-Verteilung  $W^n e^{-W}/n!$ ; für Fermionen erhält man eine entsprechende Formel mit Faktoren  $W_{2n}$  statt  $W^n$ , die vom Verf. schrittweise bestimmt werden.

*W. Wessel.*

**Nishijima, Kazuhiko:** On Lagrangian formalism. Progress theor. Phys. 8, 401—415 (1952).

Verf. studiert den formalen Zusammenhang zwischen dem Tomonaga-Schwinger-

schen Formalismus und dem Feynmanschen Linienintegral. Für diesen Zweck wird das schon früher vom Verf. eingeführte Symbol  $P^*$  verwendet [Progress theor. Phys. 5, 405 (1950)].  $P^*$  ist ungefähr wie das Dysonsche  $P$  definiert, aber mit dem Unterschied, daß  $P^*$  auch für gleiche Zeiten der eingehenden Operatoren wohldefiniert ist. Am Ende der Arbeit werden die Kommutatoren von Peierls [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 143—157 (1952)] mit Hilfe des kanonischen Formalismus abgeleitet.

G. Källén.

Cini, M.: The commutation laws in the theory of quantized fields. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 1025—1028 (1952).

Verf. studiert den expliziten Zusammenhang zwischen den Methoden von Schwinger (dies. Zbl. 43, 422) und Peierls [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 143—157 (1952)] zur Quantisierung einer Feldtheorie. Es wird gezeigt, daß sich die Peierlssche Methode aus der Schwingerschen ableiten läßt, wenn die Feldgleichungen aus einer Lagrangefunktion erhalten worden sind.

G. Källén.

Günther, Marian: The relativistic configuration space formulation of the multi-electron problem. Phys. Review, II. Ser. 88, 1411—1421 (1952).

Verf. schreibt die quantenelektrodynamischen Gleichungen für ein System von  $\nu$  Elektronen und Strahlungsfeld im leeren Raum in einer mehrzeitigen Konfigurationsraumschreibweise nieder und beweist deren Äquivalenz mit der feldtheoretischen Formulierung. In der Konfigurationsraumschreibung hängt die Schrödingerfunktion  $\varphi$  außer vom Strahlungsfeld noch von den  $\nu$  Elektronenkoordinaten  $x_1, \dots, x_\nu$  ab:  $\varphi(A_\mu(x); x_1, \dots, x_\nu)$ , wobei die  $x_k$  ( $k = 1, \dots, \nu$ ) zunächst der Bedingung genügen müssen, daß die Verbindungslinien je zweier  $x_k$  raumartig sind. Verf. betrachtet sodann verallgemeinerte Funktionen  $\varphi$ , für welche diese Beschränkung aufgehoben ist, und leitet Bewegungsgleichungen für diese ab; für den obigen Spezialfall raumartiger  $x_i - x_k$  gehen diese in die vorigen über. Sie enthalten zwar eine Potenzreihenentwicklung nach der Feinstrukturkonstanten, gestatten aber in vorgegebener Ordnung derselben die Retardierung exakt zu berücksichtigen. Insbesondere wird für die Wechselwirkung zweier Elektronen in erster Näherung der Feinstrukturkonstanten die erste Näherung einer von H. A. Bethe und E. E. Salpeter [Phys. Review, II. Ser. 82, 309 (1951)] angegebenen Gleichung wiedergefunden. Der wesentliche Nachteil dieser Methode ist, daß sie die Löchertheorie nicht zu berücksichtigen gestattet, da das Vakuum bereits ein System von  $\infty$  vielen Elektronen darstellt. [Wir unterscheiden hier zwischen „leerem Raum“ und „Vakuum“. Im letzteren sind alle Elektronenzustände negativer Energie aufgefüllt, diejenigen positiver Energie leer (Löchertheorie) im ersten alle Zustände überhaupt leer.] Alle Gleichungen, die man so erhält, beschreiben demnach Systeme, die durch Übergänge in Zustände negativer Energie in kürzester Frist zerfallen. Eine zweite Arbeit, die diesen Mangel beheben soll, wird in Aussicht gestellt.

M. R. Schafroth.

Lopuszański, Jan: The derivation of Vlasov's equation from Fock's equation. Acta phys. Polon. 11, 196—199 (1952).

Jean, Maurice: Sur une possibilité de généralisation covariante de la théorie du couplage intermédiaire. II. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1197—1199 (1952).

Teil I siehe dies. Zbl. 47, 218. Es wird gezeigt, daß eine früher vom Verf. angegebene Gleichung sich aus einem Variationsprinzip erhalten läßt. Durch Vergleich mit der Störungstheorie erreicht der Verf. ein System von Funktionen, die in gewissem Sinne an das Problem angepaßt sind, und die unter Umständen eine Möglichkeit für eine angenäherte Behandlung eines Protons mit seinem Mesonenfeld geben könnten.

G. Källén.

Rzewuski, Jan: A note on perturbation theory. Acta phys. Polon. 11, 179—188 (1952).

Verf. gibt eine sehr ausführliche Diskussion über die Äquivalenz der alten und der neuen, kovarianten Methoden der Störungstheorie. An einigen Beispielen wird gezeigt, daß in Näherung  $e^2$  die Ergebnisse der alten Methode sich aus den Gleichungen der neuen Methode ableiten lassen.

G. Källén.

Fubini, S.: Sull'operatore  $U(t)$  di Dyson-Feynman. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 846—851 (1952).

Verf. will ohne Störungstheorie beweisen, daß die Funktion  $U(t)$ , die durch

die Gleichungen

$$\frac{dU(\alpha, t)}{dt} + i\lambda(\alpha, t) V(t) U(\alpha, t) = 0, \quad U(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U(\alpha, t); \quad t \text{ endlich,}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda(\alpha, t) = 0; \quad \alpha \text{ endlich,} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha, t) = 1; \quad t \text{ endlich}$$

und schließlich durch die Gleichung (\*)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\lambda(\alpha, t)}{dt} = 0; \quad t \text{ endlich}$

definiert ist, die totale Energie diagonal macht.  $V(t)$  ist die Wechselwirkungsenergie des Systems. Die verwendeten Überlegungen scheinen dem Ref. nicht immer als ganz stichhaltig. Aus Gl. (\*) oben folgt z. B. nicht, daß für jedes Integral

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t \frac{d\lambda(\alpha, t')}{dt'} f(t') dt' = 0$  gilt, wenn  $f(t)$  eine beliebige Funktion ist. Als Bei-

spiel setzt man  $f(t) = 1$ , woraus  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t \frac{d\lambda(\alpha, t')}{dt'} dt' = 1$  folgt. Ohne genauere

Untersuchungen läßt sich also Gl. (15) der Arbeit aus Gl. (13) nicht erhalten. In einer älteren Arbeit haben Born und Fock eine ähnliche Fragestellung untersucht [Z. Phys. 51, 165 (1928)]. Aus dem Ergebnis dieser Autoren läßt sich schließen, daß die oben angedeuteten Resultate richtig sind, wenn das Potential  $V$  gewisse einschränkende Bedingungen erfüllt. Diese Bedingungen sind aber auch bei einigen elementaren Beispielen nicht erfüllt (z. B. bei dem harmonischen Oszillator), und für die komplizierten Wechselwirkungsenergien der Feldtheorien sind sie nicht bewiesen worden.

G. Källén.

**Miyatake, Osamu:** On the non-existence of solution of field equations in quantum mechanics. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 89—99 (1952).

Für den Fall eines Nukleons in Wechselwirkung mit einem Mesonfeld wird streng gezeigt, daß Zustände mit nur endlich vielen Mesonen nicht zum Definitionsbereich des Hamiltonoperators gehören.

M. R. Schafroth.

**Friedrichs, K. O.:** Mathematical aspects of the quantum theory of fields. III. Commun. pure appl. Math. 5, 1—56 (1952).

Teil I, II vgl. Commun. pure appl. Math. 4, 161—224 (1951). Teil III behandelt ein der Klein-Gordon-Gleichung genügendes Boson-Feld in Wechselwirkung mit einer vorgegebenen Quellenverteilung. Der Zustand zur Zeit 0 oder  $-\infty$  ist als Anfangsbedingung gegeben, gesucht sind Erwartungswerte der Teilchenzahl und der Energie zu einer späteren Zeit sowie die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß bei einer Messung bestimmte Werte dieser Größen gefunden werden. Die Arbeit enthält u. a. eine Diskussion der Ultrarotkatastrophe und des Ein- und Ausschaltens der Wechselwirkung mit der Quellenverteilung.

G. Höhler.

**Daykin, P. N.:** An analysis of the self-energy problem for the electron in quantum electrodynamics. Canadian J. Phys. 30, 70—78 (1952).

By modifying suitably the contours of integration in Feynman's formulation of relativistic electrodynamics (this Zbl. 37, 124) one obtains either the one-electron theory (i. e. electrodynamics without the hole theory) or Dirac's theory of photons with both, positive and negative energies [Dirac, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 180, 1—40 (1942)]. The self-energy problem is investigated from the point of view of these modifications. It is shown that the one-electron theory as well as the theory of photons with negative energies contradict the experimental evidence. In particular, it is found that correct decay probabilities of bound states arise from only one contour, that corresponds to the hole theory and interaction with only positive energy photons.

J. Rayski.



Arnous, E. und K. Bleuler: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. II. Abseparierung der virtuellen Zustände. Korrekturen zweiter Ordnung. Helvet. phys. Acta 25, 581—598 (1952).

Arnous, E.: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. III.  $e^4$ -Korrekturen zur Linienbreite. Helvet. phys. Acta 25, 631—652 (1952).

Verff. berechnen im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 43, 423) die höheren strahlungstheoretischen Näherungen für eine Emissionslinie. Da eine kovariante Formulierung für gebundene Zustände besondere Schwierigkeiten macht, gehen sie von einer Hamiltonfunktion mit Coulomb-Term aus. Nach Masse- und Ladungsrenormierung werden alle  $e^2$ - und  $e^4$ -Korrekturen endlich und eindeutig. Die Verschiebung des Maximums hat fast genau den Wert, der auch aus den Berechnungen der Termverschiebungen bekannt ist, die Korrekturen zur Wigner-Weißkopfschen Linienform sind sehr klein. Die Ausdehnung des anregenden Spektrums ist nur von wesentlicher Bedeutung, wenn sie mit der Linienbreite vergleichbar ist.

G. Höhler.

Hayashi, Chushiro and Yasuo Munakata: On a relativistic integral equation for bound states. Progress theor. Phys. 7, 481—516 (1952).

Es wird eine Ableitung der homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung (dies. Zbl. 44, 431) angegeben, die auf der Korrespondenz mit der nicht-relativistischen Gleichung beruht. Die Verff. beschränken sich zur Lösung ausschließlich auf die „ladder-approximation“. Der Übergang von der relativistisch invarianten Gleichung zum nicht-relativistischen Grenzfall wird allgemein vollzogen und die Lösung durch Entwicklung nach Kugelfunktionen bestimmt. Es ergibt sich hierbei eine einfache Integralgleichung für den Radialanteil. Im relativistischen Fall wird die Lösung versucht, indem die  $\delta_+$ - und  $I_+$ -Funktion (s. hierzu Feynman, dies. Zbl. 37, 124) durch  $\delta(r+t)/r$  bzw.  $\{\delta(r+t) + \delta(r-t)\}/2r$  ersetzt werden. Im Falle skalarer Teilchen mit skalarer Wechselwirkung führt dies auf eindimensionale explizit lösbare (homogene) Integralgleichungen, und es treten keine Divergenzen auf. Die Eigenwerte werden im allgemeinen komplex. Die Integro-Differentialgleichungen für die Wellenfunktion (die bereits bei Bethe-Salpeter stehen) werden abgeleitet. Im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung der Spinorteilchen gelingt es nicht, eine relativistisch invariante Lösung zu finden. Außerdem treten erwartungsgemäß divergente Terme auf.

H. Kümmel.

Namiki, M. and Y. Suzuki: On the corpuscular aspect of quantum theory of field. Progress theor. Phys. 8, 572—573 (1952).

Die Verff. kündigen eine Untersuchung der Lösungen der homogenen und inhomogenen Bethe-Salpeter-Gleichung (dies. Zbl. 44, 431) bzw. der zugeordneten Integrodifferentialgleichung für das Zweiteilchensystem an. Am Beispiel der Bindung eines Teilchens an ein festes Potential wird gezeigt, daß im allgemeinen komplexe Energieeigenwerte erhalten werden (vgl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen von Freese, Diss. Göttingen 1953; d. Ref.).

H. Kümmel.

Lévy, Maurice N.: Non-adiabatic treatment of the relativistic two-body problem. Phys. Review, II. Ser. 88, 72—82 (1952).

Verf. verallgemeinert die Methode von Tamm und Dancoff [I. Tamm, J. Phys. USSR 9, 449 (1945); S. M. Dancoff, dies. Zbl. 36, 273], so daß auch Effekte höherer Ordnung (Paarerzeugung und gleichzeitiger Austausch mehrerer Mesonen) berücksichtigt werden können. Der Vergleich mit der nicht-adiabatischen Näherungslösung der Bethe-Salpeter-Gleichung zeigt, daß man (praktisch) dieselbe Lösung erhält, solange man sich in beiden Fällen auf die „ladder-approximation“ beschränkt. Jedoch ist der Fehler, den man durch Weglassen von Graphen z. B. mit sich kreuzenden Mesonenlinien begeht, sehr groß. Die Tamm-Dancoff-Methode liefert also bessere Ergebnisse als die Bethe-Salpeter-Gleichung, da man bei letzterer bisher nur die „ladder-approximation“ rechnerisch behandeln kann.

H. Kümmel.

Salpeter, E. E.: Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms. Phys. Review, II. Ser. 87, 328—343 (1952).

Die Behandlung des Wasserstoffatoms als relativistisches Einkörperproblem liefert exakte Werte für die Feinstruktur bei Annahme eines unendlich schweren Kerns. Für einen Kern endlicher Maße  $M$  erwartet man Korrekturen der Form  $(m/M) \cdot f(\alpha)$  ( $m$  = Elektronenmasse,  $\alpha$  = Feinstrukturkonstante). Frühere Rechnungen mit der Breitschen Zweikörpergleichung, welche Retardationseffekte angenähert zu berücksichtigen gestattet, hatten ergeben, daß insbesondere keine Terme der Form  $(m/M) \cdot \alpha$  auftreten. Verf. wendet eine neue, von Bethe und Salpeter (dies. Zbl. 44, 431) angegebene Gleichung auf das Problem an. Diese Gleichung ist streng lorentzinvariant, und Verf. behauptet, daß sie das relativistische Zweikörperproblem exakt darstelle. Mit ihrer Hilfe gewinnt er neue Ausdrücke für die Korrekturen zur Feinstruktur, welche insbesondere auch Terme der Form  $(m/M) \cdot \alpha$  enthalten.

M. R. Schafroth.

Karplus, Robert and Abraham Klein: Electrodynamic displacement of atomic energy levels. III. The hyperfine structure of positronium. Phys. Review, II. Ser. 87, 848—858 (1952).

Teil I und II siehe dies. Zbl. 47, 231. Die Verff. berechnen den Energieunterschied zwischen dem Singulettzustand und dem Triplettzustand des 1 S-Niveaus des Positroniums. Als Rechenmethode wird eine Entwicklung in Potenzen von  $\alpha$  (der Feinstrukturkonstante) verwendet. Als nullte Näherung benutzen die Verff. das System von einem Elektron und einem Positron, die nur durch das elektrostatische Coulombfeld aneinander gebunden sind. Die nichtmomentane Wechselwirkung wird als Störung behandelt, und Glieder der Größenordnung  $\alpha^2 R_y$  und  $\alpha^3 R_y$  werden berücksichtigt. Das Ergebnis der Rechnung ist

$$\Delta E_{ts} = \frac{1}{2} \alpha^2 R_y [7/3 - (32/9 + 2 \cdot \ln 2) \alpha / \pi] = 2,0337 \cdot 10^5 \text{ Mc/s.}$$

Das experimentelle Ergebnis ist  $\Delta E_{ts} = (2,035 \pm 0,003) \cdot 10^5 \text{ Mc/s.}$  G. Källén.

Ascoli, R.: Interazioni non localizzabili. Esempio dell'effetto Compton. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 757—763 (1952).

Verf. wendet die von G. Wataghin entwickelte Methode der nicht lokalen Wechselwirkung bei der Behandlung der Quantenelektrodynamik an und insbesondere zu der Berechnung des Compton-Effektes. Die wesentlichste Schwierigkeit, die in solchen Anwendungen vorkommt, die Eichinvarianz, ist aber vom Verf. nicht berücksichtigt.

P. Budini.

Thirring, Walter E.: Nichtlineare Terme in Meson-Gleichungen. Z. Naturforsch. 7a, 63—66 (1952).

Aus den Streuversuchen bei hohen Energien weiß man, daß das Zweinukleonenpotential den Sättigungsbedingungen für den Aufbau schwerer Kerne (Energie  $\sim A$ ) nicht genügt. Man kann vermuten, daß die Sättigung durch nichtlineare Terme in den Mesonengleichungen hervorgerufen wird; denn die nichtlinearen Glieder verhindern, daß sich der Kern zu sehr zusammenzieht. Diese ergeben sich in einer gequantelten Feldtheorie aus der Kopplung zwischen Nukleonen und Mesonen. Dies wird gezeigt. Sie sind wegen der starken Kopplung viel größer als im Parallelfall des elektromagnetischen Feldes. Hier wird an Hand eines groben Modells studiert, wie sich nichtlineare Terme, die in die Lagrangefunktion eingeführt wurden, für die Sättigung auswirken. Das Modell nimmt die Nukleonendichte  $D$  im Innern des Kerns konstant zu  $gA/V$  an. Als Lagrangefunktion wird angesetzt  $L(x) = \psi(x) \cdot \psi^+(x) + D(\psi(x) + \psi^+(x)) - \lambda \psi(x) \psi^+(x) \psi(x) \psi^+(x)$ . Daraus folgen die Feldgleichungen  $-\psi = D - 2\lambda \psi \psi^+ \psi$ ;  $-\psi^+ = D - 2\lambda \psi^+ \psi \psi^+$ , und die potentielle Energie  $E = \int L(x) dx = \int (-\psi \psi^+ + 3\lambda \psi \psi^+ \psi \psi^+) dV$ . Wenn  $\lambda > 0$ , so hat die potentielle Energie in Abhängigkeit von  $D$  ein Minimum in Form einer Spitze. Der Kern kann sich also nicht zu immer größeren Nukleonendichten zusammenziehen. Das Volumen kleinster potentieller Energie, d. h. größter Bindungsenergie, ist proportional dem Atomgewicht. Der Radius pro Nukleon ist ungefähr die Comptonwellenlänge des Mesons. Die Minimumsenergie ist proportional  $A$ , die potentielle Energie  $\approx 15 \text{ MeV}$ , wobei  $\lambda \approx 1$  angesetzt ist. Wenn  $\lambda < 0$ , so hat die potentielle Energie kein Minimum, sie nimmt ständig ab proportional  $D^{4/3}$ . Wäre  $\lambda = 0$ , so wird  $E \sim -D^2$ . Die kinetische Energie der Nukleonen ist wie beim Fermigas  $\sim D^{5/3}$ . Durch beider Überlagerung kommt ein Minimum zustande, d. h. auch bei  $\lambda < 0$  tritt Sättigung ein.

K.-H. Höcker.



Ivanenko, D. und A. Brodskij: Mehrfache Prozesse und Nicht-Linearität in der Theorie der Elementarteilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 683—686 (1952) [Russisch].

Lévy, Maurice: Sur la théorie relativiste des forces nucléaires. I. Théorie générale. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 815—817 (1952).

Lévy, Maurice: Sur la théorie relativiste des forces nucléaires. II. Equivalence avec le formalisme de Bethe et Salpeter. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 922—924 (1952).

Lévy, Maurice: Sur la théorie relativiste des forces nucléaires. III. Corrections relativistes à l'interaction produite par un champ scalaire. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1255—1257 (1952).

Erweiterung der „nicht-adiabatischen“ Methode zur feldtheoretischen Berechnung gebundener Zustände (insbesondere des 2-Nukleonen-Systems) von Tamm [J. Phys. USSR 9, 449 (1945)] und Dancoff (dies. Zbl. 36, 273) für den Fall mehrerer Gruppen von Zwischenzuständen. — I. Formulierung der Grundgleichung für die Fälle, daß in den Zwischenzuständen außer 2 Nukleonen eine beliebige Zahl von Mesonen oder aber außer 2 Nukleonen höchstens ein Meson und eine beliebige Anzahl von Nukleonenpaaren vorhanden ist. — II. Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Levyschen Formulierung und der Bethe-Salpeter-Gleichung (dies. Zbl. 44, 431). Der Nachweis der Äquivalenz wird nicht streng, sondern nur näherungsweise durchgeführt. — III. Berechnung der relativistischen Korrekturen für ein System von 2 Nukleonen, das skalar durch ein skalares Feld gekoppelt ist. G. Lüders.

Michel, Louis: Applications de la conservation de la parité en mécanique quantique. I. Desintégration en deux ou trois bosons de masses non nulles. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 703—705 (1952).

Michel, Louis: Les représentations du groupe des rotations et des retournements. Applications de la conservation de la parité en mécanique quantique. II. Annihilation d'une particule et d'une antiparticule de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2161—2163 (1952).

J. Auswahlregeln für den Zerfall von Teilchen ganzzahligen Spins werden auf gruppentheoretischer Grundlage abgeleitet; dabei ergeben sich einige Erweiterungen der schon bekannten Auswahlregeln. — II. Auswahlregeln für die gegenseitige Vernichtung zweier Diraceteilchen im  $^1S$ - und  $^3S$ -Zustand werden abgeleitet. Ergebnis: ein Teilchen-Anteilchen-System verhält sich im  $^1S$ -Zustand wie ein pseudoskalares Teilchen, im  $^3S$ -Zustand wie ein pseudovektorielles Teilchen. G. Lüders.

Lévy, Maurice M.: Meson theory of nuclear forces and low energy properties of the neutron-proton system. Phys. Review, II. Ser. 88, 725—739 (1952).

Verf. wendet die von ihm in einer früheren Arbeit [Phys. Review, II. Ser. 88, 72 (1952)] zu einem systematischen Verfahren ausgebaute Tamm-Dancoff-Methode auf das Proton-Neutron-System an. Es wird versucht, die Eigenschaften des Deuterons und der  $p-n$ -Streuung bei kleinen und mittleren Energien aus der symmetrischen Theorie pseudoskalarer Mesonen mit pseudoskalarer Kopplung herzuleiten. Die „Wellenfunktion“ des Systems genügt einer (einzeitigen) Integralgleichung, deren Kern sich als Potenzreihe in der Kopplungskonstanten ( $G^2$ ) berechnen läßt. Während für kleine Abstände der Nukleonen die Vernachlässigung höherer Potenzen von  $G^2$  nicht zu rechtfertigen ist, kann der Verf. plausibel machen, daß für größere Abstände die Terme mit  $G^2$  und  $G^4$  den Hauptbeitrag liefern (wobei das  $G^4$ -Glied entscheidende Bedeutung hat). Das von diesen Termen herrührende Potential wird bestimmt und der weiteren Betrachtung zugrunde gelegt. Für kleine Abstände benutzt der Verf. einen phänomenologischen Ansatz (für den einige Argumente gegeben werden), der einer starken Abstoßung der Nukleonen entspricht. — Die numerische Auswertung liefert (mit  $G^2/4\pi \approx 10$ ) eine überraschend gute Beschreibung des Proton-Neutron-Systems, soweit seine Eigenschaften durch Bindungsenergie und Quadrupolmoment des Deuterons, Streulängen und effektive Reichweiten charakterisiert sind. Ebenso läßt sich die  $p-n$ -Streuung bei 40 MeV befriedigend darstellen. — Nicht vollständig diskutiert ist das Problem der Strahlungskorrekturen. Da eine direkte Renormalisierung nicht möglich ist, versucht der Verf. durch Vergleich mit der Bethe-Salpeter-Gleichung die Vernachlässigung dieser Korrekturen zu rechtfertigen. Jedoch wird auf eine Serie von Beiträgen hingewiesen, deren Berücksichtigung den  $G^4$ -Teil des Potentials mit einem nicht



berechneten Faktor multiplizieren würde. — Auf einige Fehler in der besprochenen Arbeit ist von Klein [Phys. Review, II. Ser. 89, 1158 (1953)] hingewiesen worden. Es ist noch nicht bekannt, ob dadurch die Endresultate wesentlich beeinflusst werden. *H. Lehmann.*

**Minami, Shigeo, Tadao Nakano, Kazuhiko Nishijima, Hisaichirō Okonogi und Eiji Yamada:** Pion reactions in one nucleon system and nucleon isobars. Progress theor. Phys. 8, 531—548 (1952).

Die Verff. untersuchen die Wechselwirkung zwischen Pion und Nukleon auf Basis der Nukleonenisobaren. Die Nukleonenisobare wird als Elementarpartikel mit dem Spin  $3/2$  aufgefaßt; zu ihrer Beschreibung wird die Gleichung von Rarita und Schwinger für das Spin- $3/2$ -Teilchen herangezogen. Unter Verwendung der Feynman-Dyson-Methodik wird die Pion-Proton-Streuung und die Photoproduktion von Pionen an Protonen untersucht. Die Ergebnisse stimmen mit denen der starken Kopplungstheorien im großen und ganzen überein. *F. Cap.*

**Sasaki, Muneco:** Photodisintegration of the deuterons at high energies. Progress theor. Phys. 8, 557—564 (1952).

Verf. untersucht die Wirkung der Tensorkräfte auf den Photozerfall des Deuterons und gibt eine allgemeine Formel für die Winkelverteilung an, deren erste zwei Terme mit einer experimentell aufgestellten Streuformel von Krohn und Schrader übereinstimmen. Im Hinblick auf die Erforschung der Kernkräfte hat die Untersuchung von Tensorkräften eine gewisse Bedeutung. Die experimentellen Ergebnisse zeigen allerdings ein stärkeres Anwachsen für höhere Energien, als es die Theorie liefert. Bei niederen Energien, etwa bis zu 100 MeV, ist die Übereinstimmung befriedigend, darüber hinaus jedoch werden gewisse Modifikationen notwendig sein, um das experimentelle Verhalten auch theoretisch zu begründen. *P. Urban.*

**Minami, Shigeo:** Neutral meson production by gamma-ray. Progress theor. Phys. 7, 69—92 (1952).

Verf. behandelt die Erzeugung neutraler Mesonen durch Photonen bei pseudoskalarer Mesontheorie im Rahmen einer Entwicklung nach dem Kopplungsparameter. Während die Resultate der ersten Näherung in krasssem Gegensatz zum experimentellen Befund stehen, zeigt Verf., daß die zweite Näherung zu qualitativ richtigen Ergebnissen führt. [Vgl. Brückner-Watson, Phys. Review, II. Ser. 79, 187 (1950).] — Weiterhin wird ein Ansatz mit Berücksichtigung der anomalen magnetischen Momente der Nukleonen durch einen Pauli-Term durchgerechnet. *H. Lehmann.*

**Ioffe, B. L. und I. M. Šmuškevič:** Die Bildung von  $\pi$ -Mesonen durch  $\gamma$ -Strahlen auf ein Deuteron. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 869—872 (1952) [Russisch].

Ziel der Arbeit ist der Vergleich der Mesonenerzeugung durch  $\gamma$ -Strahlung an Deuteronen und an freien Nukleonen. Er wird zunächst durchgeführt an den Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte, die sich bei Störungsrechnung (1. Näherung) in der pseudoskalaren Mesonentheorie ergeben. Verff. zeigen dann, daß, während die einzelnen so errechneten Querschnitte problematisch sein mögen, ihr Verhältnis weitgehend unabhängig von den Voraussetzungen der Störungstheorie gültig ist. — Dieses Argument beruht auf einer a. a. O. geschilderten phänomenologischen Methode [im wesentlichen die sog. „impulse approximation“, siehe V. B. Beresteckij und I. Ja. Pomerančuk, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 1019—1021 (1951); Sh. Machida und T. Tamura, Progress theor. Phys. 6, 572—580 (1951)]. Sie wird angewandt auf die Mesonenerzeugung bei kleinen Winkeln nach verschiedenen Mesonentheorien. *R. Haag.*

**Humblet, J.:** Perturbation des niveaux virtuels. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 323—326 (1951).

**Humblet, Jean:** Sur la définition des niveaux virtuels des noyaux atomiques et l'établissement de la formule de dispersion. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. Sér. 12, Nr. 4, 114 S. (1952).

Verf. studiert die Streuung von Nukleonen an Kernen unter der Mitwirkung reeller und virtueller Niveaus. Die Arbeiten von Siegert [Phys. Review, II. Ser.

56, 750 (1939)] werden erweitert auf Streuungen mit  $l \neq 0$ . Die allgemeinen Ergebnisse werden angewandt auf die Störung virtueller Niveaus und auf spezielle Fälle wie den durch die Breit-Wigner-Formel beschriebenen. Das Bemühen um einen mathematisch eleganten Formalismus für die gesamten Streuprozesse soll Grundlage sein für eine noch zu schaffende Theorie der Kernreaktionen, die sich statt auf Entwicklungen vom Sturm-Liouvilleschen Typus auf dem Satz von Mittag-Leffler aufbaut.

*K.-H. Höcker.*

**Sugawara, Masao:** Phenomenological explanation of magnetic moments of the excited states of nucleons. *Progress theor. Phys.* 8, 549—556 (1952).

**Alfsen, Érik:** Diffusion magnétique multiple. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 535—537 (1952).

Verf. behandelt das Problem der Vielfachstreuung eines Neutronenstrahles in einem ferromagnetischen Material. Mittels der von Melvin Lax (dies. Zbl. 45, 134) angegebenen Grundgleichungen für die Vielfachstreuung wird der Brechungsindex eines Neutronenstrahles bezüglich eines solchen Mediums bestimmt. *G. Heber.*

**Huybrechts, M. and M. Schönberg:** Ionization at relativistic energies and polarization effects. *Nuovo Cimento, Ser. IX* 9, 764—807 (1952).

Um einige neuerdings ausgeführte Experimente über Ionisation in Photoplatten zu erklären, schlagen die Verff. eine Theorie des Energie-Verlustes eines ionisierenden Teilchens in einem dichten Mittel vor, die verschiedenen von derjenigen von Fermi [Phys. Review, II. Ser. 57, 485 (1940)] ist. Die Verff. nehmen an, daß das Gebiet, wo die Bethe-Bloch-Theorie anwendbar ist, sich bis zu einem Abstand  $R = \sqrt{m c^2 / 4 n e^2}$  ( $m$  = Masse des Elektrons,  $c$  = Geschwindigkeit des Lichts,  $n$  = Zahl der Elektronen pro  $\text{cm}^3$ ,  $e$  = Ladung des Elektrons) von der Trajektorie des Teilchens erstreckt, statt bis etwa  $10^{-8}$  cm wie in der Fermi-Theorie. Für das Übrige entwickeln die Verff. die Theorie im Rahmen des Fermi-Modells, d. h. durch Lösung der Maxwell'schen Gleichung für eine mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegende Ladung, mit Berücksichtigung der Polarisierbarkeit des Mittels. In solcher Weise erhalten die Verff. eine partielle Übereinstimmung mit den Experimenten. Spätere Arbeiten haben bewiesen, daß die Experimente im Rahmen der Fermi-Theorie interpretiert werden können. *P. Budini.*

**Amaldi, E.:** Diffraction effects in the scattering of neutrons,  $\mu$  mesons and electrons by nuclei. *Proc. Indian Assoc. Cultiv. Sci.* 35, 1—47; Suppl. to Indian J. Phys. 26 (1952).

Vorliegende Arbeit beinhaltet einen ausgezeichneten ausführlichen Bericht über die Beugungseffekte bei der Streuung von Neutronen an Kernen (Teil I) und bei der Streuung von  $\mu$ -Mesonen und Elektronen an Kernen (Teil II) auf Grund der phänomenologischen Theorie der Streuung von Nukleonen an Kernen, wie sie zuerst von E. Guth und Th. Sexl bei dem Problem der anomalen Streuung von Alpha-Teilchen an Kernen systematisch entwickelt wurde. *Th. Sexl.*

**Olsson, P. O.:** A differential equation for the phase shifts in scattering problems. *Ark. Fys.* 4, 217—221 (1952).

Es sei ein wellenmechanisches Streuproblem durch die Wellengleichung

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 - \varrho(x) \right] u(x) = V(x) u(x)$$

unter der Annahme, daß  $\varrho(x)$   $x^2$  und  $x V(x)$  ganze Funktionen sind, vorgegeben. Dann wird gezeigt, daß 1. die das Streuproblem beherrschende Phasenänderung  $\delta$  der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung genügt:

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = -\frac{V(x)}{k} [v_1(x) \cos \delta(x) + v_2(x) \sin \delta(x)]^2,$$

wobei  $v_1(x)$  und  $v_2(x)$  die Lösungen der homogenen Wellengleichung sind, und daß 2. die Phasenänderung selbst gegeben ist als Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = \delta$ .  $\varrho(x) = 0$

führt auf bekannte Resultate (R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Band I, 2. Auflage Berlin 1931; dies. Zbl. 1, 5; S. 287 des Buches), ebenso  $\varrho(x) = L(L+1)/x^2$  ( $L$  = Azimutalquantenzahl). Durch eine Umformung der Differentialgleichung für die Phasenänderung erhält man im Falle  $L = 0$  eine

Differentialgleichung für die Fermische Streulänge  $a$ . Für ein Yukawa- und ein Exponentialpotential werden durch numerische Integration derselben Werte von  $a$  berechnet und tabelliert. *Th. Sexl.*

**Bhatia, A. B. and K. Huang:** Note on the perturbation calculation of phase shifts for central and non-central interactions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect A 35, 14—18 (1952).

Die Berechnung des Phasenwinkels kann auf ein gewöhnliches Eigenwertproblem zurückgeführt werden. Wird dieses mit störungstheoretischen Methoden gelöst, so erhält man den Phasenwinkel als eine Potenzreihe in dem Wechselwirkungspotential. Das Vorgehen kann auf Zentralkräfte angewandt werden. Formeln, die die Glieder bis zur zweiten Ordnung in der Reihenentwicklung berücksichtigen, sind für beide Arten von Wechselwirkungen ausgerechnet. *K.-H. Höcker.*

**Kynch, G. J.:** The calculation of scattering amplitudes. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 708—718 (1952).

Die Bornsche Näherung gibt für die Streuamplitude am Zentrum  $V(r)$  die Formel

$$f(k_1 : k_2) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp(-i k_2 r) \cdot V(r) \cdot \exp(i k_1 r) d\tau.$$

Es wird eine analog gebaute exakte Formel hergeleitet, nämlich

$$df(k_1 : k_2) = -\frac{1}{4\pi} \int \psi(-k_2) \cdot dV \cdot \psi(k_1) d\tau,$$

worin  $\psi(-k_2)$  und  $\psi(k_1)$  exakte Lösungen im Potential  $V(r)$  darstellen, die in ihren „einfallenden“ Anteilen die Richtungen  $-k_2$  bzw.  $k_1$  haben.  $df$  stellt die durch die Potentialänderung  $dV$  hervorgerufene Veränderung der Streuamplitude dar. Die Differentiale  $dV$  werden nun dadurch gebildet, daß das gegebene Potential aus dünnen „Schalen“ aufgebaut wird. Die rechte Seite läßt sich dann in ein Oberflächenintegral überführen. Man kommt so zu einer Integralgleichung für die Größen  $f$ . Es wird gezeigt, daß diese sich auch auf den Fall mehrerer Teilchen, die teilweise frei, teilweise gebunden sein können, sowie auf den Fall der Diracgleichung ausdehnen läßt. *H. Volz.*

**Biswas, S. N.:** Influence of radiation damping on the scattering of pseudo-scalar charged mesons by nucleons. Indian J. Phys. 26, 617—626 (1952).

Berücksichtigt man den Einfluß der Strahlungsdämpfung bei der Streuung von  $\pi^+$ -Mesonen mit einer Energie größer als 200 MeV an Protonen, so erhält man die richtige Energieabhängigkeit des gesamten Streuquerschnittes in Übereinstimmung mit Experimenten von Anderson und von Sachs und Steinberger. *Th. Sexl.*

**Laurikainen, K. V.:** Asymptotic eigensolutions of the radial deuteron equation. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 130, 10 S. (1952).

Weiterführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 219), Beschränkung auf s-Zustände. *G. Höhler.*

**Kompaneec, A.:** Eine Anwendung der Methode des self-consistent field auf den Atomkern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 301—304 (1952) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß Energieinhalt und Volumen des Kerns proportional zur Nukleonenzahl sind. Als Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen dient das Yukawapotential mit einem Austauschoperator für Spin und Ladung als Faktor. Es wird der quantenmechanische Mittelwert der Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen mit Hilfe ebener Wellenfunktionen für die Teilchen berechnet. Die Gesamtenergie erhält man durch Integration dieses Ausdrucks über alle Impulse bis zum Grenzpuls der Fermikugel. Für das Potential gilt eine Differentialgleichung vom Yukawaschen Typ. Deren Lösung wird diskutiert. Zur sinnvollen Interpretation sind die Austauschglieder wichtig. Damit ergibt sich, daß in nullter Näherung auf jedes Nukleon gleich viel Energie und Volumen entfallen. *K.-H. Höcker.*



**Umezawa, Minoru:** The  $j-j$  coupling shell model. *Progress theor. Phys.* 8, 509—523 (1952).

Unter Benutzung der symplektischen Transformation werden die durch Seniority- und Isotopenspinquantenzahl  $(s, t)$  charakterisierten Eigenfunktionen für  $j-j$ -Kopplung angegeben und mit ihrer Hilfe die magnetischen Momente der leichten Kerne berechnet. Folgende Annahmen liegen der Berechnung zugrunde: 1. Die Termfolge lautet  $1s, 2p_{3/2}, 3p_{1/2}, 3d_{5/2}, 2s_{1/2}, 3d_{3/2}, 4f_{7/2}$ . 2. Die Kernkräfte sind ladungsunabhängig. 3. Der Grundzustand des Kerns hat kleinst möglichen Isotopspin. 4. Für Kerne mit ungerader Teilchenzahl gilt  $(s, t) = (\lambda_1, \lambda_1/2)$  bzw.  $(\lambda_2, \lambda_2/2)$ , je nachdem ob die Neutronenzahl  $\lambda_1$  oder die Protonenzahl  $\lambda_2$  der betrachteten Schale ungerade ist. Für ungerade-ungerade Kerne wurde  $(s, t) = (\lambda_1 + \lambda_2, \frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2|)$  angenommen. Die errechneten magnetischen Momente sind in Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten. Weiterhin läßt das Modell die  $\beta$ -Zerfallsdaten verstehen. B. Stech.

**Danos, Michael:** Zur Hydrodynamik der Multipelschwingungen des Atomkerns. *Ann. der Physik*, VI. F. 10, 265—281 (1952).

Die bisher vorliegenden Untersuchungen über die aus dem Tröpfchenmodell folgenden  $\gamma$ -Resonanzen werden in folgenden Punkten ergänzt: 1. Die Annahme von über das Kernvolumen konstanten Nukleonendichten wird fallengelassen. Hieraus ergibt sich eine mit  $A$  anwachsende Korrektur der Resonanzfrequenzen, wodurch deren Abhängigkeit von  $A$  schwächer als  $A^{-1/3}$  ist, wie die Erfahrung verlangt. 2. Der Einfluß der endlichen Größe der Lichtwellenlänge auf den Wirkungsquerschnitt wird berücksichtigt. Hierzu werden die allgemeinen Eulerschen Gleichungen einer Zweiflüssigkeitsströmung aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet. Es zeigt sich, daß man im Bereich der Gültigkeit der linearisierten Bewegungsgleichungen mit einer Potentialströmung rechnen kann. Hiermit ergibt sich für die Wirkungsquerschnitte: a) Der Wert des Wirkungsquerschnittes der Dipolgrundschwingungen ist praktisch gleich demjenigen, welcher sich mit der Annahme einer gegen den Kernradius großen Lichtwellenlänge ergeben hatte; b) von den Schwingungen höherer Ordnung hat allein die Quadrupolgrundschwingung einen merklichen Wirkungsquerschnitt und zwar von 8% desjenigen der Dipolgrundschwingung. K.-H. Höcker.

**Nishimura, Jun and Koichi Kamata:** On the theory of cascade showers. I. *Progress theor. Phys.* 7, 185—192 (1952).

Die Diffusionsgleichungen der Elektronen-Photonen-Kaskade mit dem Ionisationsterm (Annäherung „ $B''$ “) werden im Falle eines einfallenden Elektrons gelöst. Das differentielle Elektronen-Spektrum  $\pi(E, t)$ , erhalten mit einer analytischen Fortsetzung der Bhabha- und Chakrabartyschen Reihe, lautet:

$$(1) \quad \pi(E, t) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty} dp \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^p \Gamma(-p) M(p, s, t),$$

wobei  $\varepsilon$  die kritische Energie ist und  $M(p, s, t)$  durch eine Rekursionsformel definiert wird. Für  $E \gg \varepsilon$  identifiziert sich (1) mit der Bhabha- und Chakrabartyschen Reihe. Wenn man in (1) die Annäherung  $M(p, s, t) = M(p, s) e^{\lambda_1(s)t}$  einführt, erhält man die Lösungen von H. S. Snyder (dies. Zbl. 35, 280) und von W. T. Scott (dies. Zbl. 41, 334). — Die Methode wird angewandt, um analytische Ausdrücke für die Winkel- und räumlichen Verteilungsfunktionen zu erhalten, deren Eigenschaften in einer späteren Arbeit im einzelnen studiert werden. P. Budini.

**Monticelli, F.:** Sui metodi di soluzione delle equazioni della cascata elettrofotonica. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 477—486 (1952).

Die Integrodifferentialgleichungen der Photonen-Elektronen-Kaskade werden, durch Anwendung der Laplace-Transformation, zu einer einzigen Volterraschen Integralgleichung zweiter Art gemacht. Der Kern der Gleichung ist weder sym-

metrisch noch antisymmetrisch, so daß die Gleichung nicht durch die gewöhnliche Variationsmethode lösbar ist. Die angenäherten Lösungen von H. Snyder (dies. Zbl. 35, 280) und W. T. Scott (dies. Zbl. 41, 334) ebenso wie diejenigen von H. J. Bhabha und S. K. Chakrabarty (dies. Zbl. 39, 431) genügen der so gefundenen Gleichung. *P. Budini.*

**Jánossy, L.: Studies on the theory of cascades.** Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 2, 289—333 (1952).

Verf. definiert in ganz allgemeiner Weise die Verteilungsfunktionen der Teilchen in einer Kaskade und stellt die Diffusionsgleichungen der Verteilungen im Falle von 1 bis  $k$  Teilchen auf. Für die Verteilungsfunktionen einer unbestimmten Zahl von Teilchen definiert Verf. eine erzeugende Funktion  $G$  und ermittelt die bezügliche Diffusionsgleichung ( $G$ -Gleichung). Führt man in  $G$  die Energie der Teilchen als Parameter ein, so erhält man eine eindimensionale Theorie der Schauer; führt man die Impulse ein, so hat man die Theorie der Winkel- und räumlichen Verteilung der Teilchen der Schauer. — Die Gleichungen für die Verteilungsfunktionen und für  $G$  sind praktisch unlösbar (vielleicht mit Hilfe einer elektrischen Rechenmaschine); vielmehr besteht ihre Bedeutung darin, daß man aus ihnen die Gleichungen für die verschiedenen Momente der Verteilungsfunktionen (von direkter physikalischer Bedeutung) ableiten kann. Die so gefundenen Gleichungen sind zu den bekannten Diffusionsgleichungen, die ausführlich von verschiedenen Autoren behandelt worden sind, äquivalent. — Verf. diskutiert im Falle der Elektronen-Photonen-Kaskade im einzelnen die Diffusionsgleichungen der ersten und zweiten Momente der Verteilungen und die bekannten Lösungen für den Fall der ersten Momente. *P. Budini.*

**Ramakrishnan, Alladi: A note on Jánossy's mathematical model of a nucleon cascade.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 451—456 (1952).

Verf. studierte kürzlich das Verhalten einer Anzahl von Teilchen, die in einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Zuständen, charakterisiert durch den (Energie-) Parameter  $E$ , verteilt sind, und wo diese Verteilung von einem anderen Parameter  $t$  ( $=$  Zeit) abhängt (dies. Zbl. 39, 137). In vorliegender Note wird gezeigt, daß diese Arbeit äquivalent ist zu dem Verfahren, das Jánossy und Messel in ihren Veröffentlichungen über die Berechnung der Nukleonenkaskaden angewandt haben [s. z. B. L. Jánossy, Proc. Irish Acad. A 53, 181 (1950)]. *K.-H. Höcker.*

**Messel, H. and R. B. Potts: Note on the fluctuation problem in cascade theory.** Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 854—856 (1952).

Diese Note ist eine Fortsetzung zweier früherer Arbeiten [H. Messel, Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 465—472 (1952) und H. Messel und R. B. Potts, Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 473—480 (1952)] und zeigt, daß die Verwendung der Jánossy- $G$ -Gleichung auch für die Bestimmung der Momente der Verteilungsfunktionen vermieden werden kann. *P. Budini.*

**Fortet, K.: Les méthodes de Monte-Carlo en physique nucléaire.** Trabajos Estadist. 3, 341—371 (1952).

Die Arbeit ist ein Auszug eines vom Verf. gehaltenen Vortrages über die Monte-Carlo-Methoden und ihre Anwendungen. Die Probleme der Diffusion der Neutronen in Materie und der Lösung der Schrödinger-Gleichung im Rahmen der Monte-Carlo-Methode sind im einzelnen diskutiert. *P. Budini.*

● **Tables for the analysis of beta spectra.** (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 13.) Washington: U. S. Government Printing Office 1952. 61 p. 35 cents.

Die beim radioaktiven Zerfall von Elementen (Atomkernen) auftretenden Spektren der emittierten Elektronen bzw. Positronen sind hinsichtlich der Teilchenenergie kontinuierlich. Aus ihrer Gestalt lassen sich wichtige Schlüsse auf Daten der beteiligten Atomkerne ziehen, wenn man einen Vergleich der gemessenen Spektren mit den theoretisch von Fermi und anderen Autoren gewonnenen Ausdrücken vornimmt. Für diesen Vergleich normiert man die gemessenen Spektren zunächst so, daß man die gemessene Teilchenzahl durch Ausdrücke dividiert, die den Impuls der Elektronen und eine charakteristische Funktion  $f(Z, \eta)$  enthalten ( $Z =$  Kernladungszahl,  $\eta =$  Teilchenimpuls in Einheiten  $mc$  mit  $m =$  Elektronenruhemasse,  $c =$  Lichtgeschwindigkeit). Diese Funktion  $f(Z, \eta)$  ist in der vorliegenden Arbeit

tabelliert für  $Z = 1$  bis 100 und  $\eta = 0$  bis 7 ( $\eta$  ansteigend in Stufen von 0,05 und 0,1). Für  $\eta > 7$  werden Näherungsformeln für  $f(Z, \eta)$  angegeben. Auf den ersten 14 Seiten wird eine Übersicht über die Auswertungsmethoden der Spektren gegeben und eine Darstellung des Rechnungsganges für die theoretischen Überlegungen bei der Gewinnung eines Ausdrucks für das Spektrum. [Eine im Tabellenteil angegebene Funktion  $\varphi(z)$  ist mit Rechenfehlern behaftet, dagegen ist  $f(Z, \eta)$  richtig.]

*D. Kamke.*

### Bau der Materie:

Jabłoński, A.: A note on the Franck-Condon principle. Acta phys. Polon. 11, 195—196 (1952).

March, N. H.: The virial theorem in the Thomas-Fermi theory. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 1042—1046 (1952).

Verf. dehnt die von Duffin [Phys. Review, II. Ser. 47, 421 (1935)] für die Thomas-Fermi-Theorie erhaltenen Resultate auf den Thomas-Fermi-Dirac-Fall aus.

*F. Penzlin.*

Luke, P. J., R. E. Meyerott and W. W. Clendenin: Wave function of ionized lithium. Phys. Review, II. Ser. 85, 401—409 (1952).

Unter Vernachlässigung des Spins wird die Wellenfunktion für den  $1s2s^2S$  Zustand des einfach ionisierten Lithiums nach Legendreschen Polynomen  $P_l$  entwickelt:

$$\psi = (r_1 r_2)^{-1} \varphi, \quad \varphi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^{1/2} \Phi_l(r_1, r_2) P_l(\cos \theta),$$

wo  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Abstände der Elektronen 1 und 2 vom Kern und  $\theta$  der Winkel zwischen  $r_1$  und  $r_2$  bedeuten. Für die  $\Phi_l$  ergibt sich durch Einsetzen in die Schrödingergleichung ein unendliches System von simultanen Differentialgleichungen (Dgln.):

$$(1) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} - l(l+1) \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{M_{ll}}{2Z} \right] \Phi_l = \sum_{m \neq l} \frac{M_{lm} \Phi_m}{2Z}$$

( $Z$  = Kernladungszahl,  $\lambda$  = Energieparameter,

$$M_{l,m}(r_1, r_2) = (2l+1)^{1/2} (2m+1)^{1/2} \frac{1}{r_1} \sum_{n=|l-m|}^{l+m} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^n \int_0^\pi P_l P_m P_n \sin \theta d\theta).$$

In der Entwicklung von  $\varphi$  überwiegt das erste Glied  $\Phi_0(r_1, r_2)$  alle andern. Dieser Umstand wird zur iterativen Berechnung der  $\Phi_l$  herangezogen. Der Hauptanteil von  $\Phi_0$  wird durch Separierung der im Fall  $l = 0$  aus (1) bei Vernachlässigung der rechten Seite entstehenden homogenen Dgl. ermittelt. Diese Separierung führt auf Whittakersche Dgln. Eine zu  $\Phi_0$  hinzutretende Korrektur und die übrigen  $\Phi_l$  werden unter Heranziehung von Differenzenverfahren und einer von den Verf. angegebenen numerischen Variationsmethode bestimmt (sies. Zbl. 47, 364). — Als Energiewert wird  $1,135724 R h c Z^2$  ( $R$  = Rydbergsche Zahl für Lithium,  $Z$  = Kernladungszahl,  $h$  = Plancksche Konstante,  $c$  = Lichtgeschwindigkeit) berechnet. Dieses Ergebnis stimmt mit dem unter Berücksichtigung der Kernbewegung und des relativistischen Effektes korrigierten experimentellen Wert  $1,135722 \pm 0,000025 R h c Z^2$  gut überein. Für das Hyperfeinstruktur-Integral  $1 + \varepsilon$  von Breit und Doermann [Phys. Review, II. Ser. 36, 1732—1751 (1930)] wird der Wert  $1,06191 \pm 0,00003$  ermittelt. Die Wellenfunktion wird noch an Hand weiterer Kriterien überprüft und ihre Güte aufgezeigt.

*H.-K. Dettmar.*

Nakamura, Takashi, Kimio Ohno, Masao Kotani and Katsunori Hijikata: Interaction of  $\pi$ -electrons in the acetylene molecule. Progress theor. Phys. 8, 387—400 (1952).

Taking all excited configurations of the four  $\pi$ -electron system into account, the lower energy levels are computed. Molecular-Orbital calculations, including configuration interaction, are compared with Valence-Bond ones, including ionic homopolar resonance, Slater  $2p\pi$ -atomic orbitals being used. For the ground state configuration interaction causes a shift of 2,38 e. v., but no simple rule for correlating depression with symmetry emerges. Indeed, the  $^3\Delta_g$  shift is greater than the  $^1\Delta_g$  one. Ultra-violet spectral data are not sufficiently accurate to allow a comparison with these theoretical values.

*J. Jacobs.*



**Rosenzweig, Norbert:** The configuration interaction between the odd terms in the iron group. Phys. Review, II. Ser. 88, 580—586 (1952).

Mit Hilfe der Methode von Racah [Phys. Review, II. Ser. 61, 186 (1942); 62, 438 (1942) und 63, 367 (1943)] werden die Matrixelemente der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen den Termen der Konfigurationen  $d^{n-2} s p$  und  $d^{n-1} p$  als Linearkombination Slaterscher Integrale [Phys. Review, II. Ser. 34, 1293—1322 (1929)] ausgedrückt. Eine für die Bildung der Matrixelemente für die ganze Eisengruppe geeignete Koeffiziententafel ist angegeben.

*E. Kreyszig.*

**Twiss, R. Q.:** Propagation in electron-ion streams. Phys. Review, II. Ser. 88, 1392—1407 (1952).

Verf. gibt eine sehr ausführliche mathematische Behandlung der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem Strom von Elektronen und Ionen. Es zeigt sich, daß die Durchführung der Rechnung für willkürliche Anfangs- und Randbedingungen in geschlossener Form nur dann möglich ist, wenn gewisse Voraussetzungen hinsichtlich des Stromes der Ladungsträger gemacht werden. Die mit Hilfe einer Erweiterung der Hansenschen Theorie gefundene relativistische Vektorlösung trägt den Randbedingungen explizit Rechnung. Unter gewissen Einschränkungen hinsichtlich der Grenzbedingungen läßt sich die allgemeine Lösung für willkürliche Anfangsbedingungen nach einem vollständigen Funktionensystem einfacher Vektorlösungen entwickeln. In diesem Fall kann man notwendige und hinreichende Bedingungen für Verstärkung und Instabilität angeben. Die Rechnungen umfassen auch den Fall der kontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilung.

*G. Ecker.*

**Elwert, G.:** Verallgemeinerte Ionisationsformel eines Plasmas. Z. Naturforsch. 7a, 703—708 (1952).

Zur Berechnung des Ionisationsgrades von Gasen werden in der Astrophysik je nach den vorliegenden Verhältnissen drei verschiedene Ionisationsformeln, nämlich die Sahagleichung, die Eddingtonsche Ionisationsformel der Gasnebel und die Ionisationsgleichung der Sonnenkorona verwendet. Verf. gewinnt eine allgemeine Formulierung der Ionisationsverhältnisse, indem er die Bilanz der Stoß- und Photoionisation mit der Rekombination im Dreierstoß und der Rekombination unter Aussendung von Photonen aufstellt. Die auf diese Weise gewonnene Formel enthält die oben genannten Gesetzmäßigkeiten als Spezialfälle. Allerdings ist hier zu beachten, daß bei der Herleitung der allgemeinen Formulierung die Sahagleichung bereits verwendet wurde. An Hand von zwei graphischen Darstellungen wird eine Zuordnung der astronomischen Erscheinungen zu den verschiedenen Formeln diskutiert.

*G. Ecker.*

**Sen, Hari K.:** Solar „enhanced radiation“ and plasma oscillations. Phys. Review, II. Ser. 88, 816—822 (1952).

Bekanntlich geht von den Sonnenflecken über Zeiträume von einigen Stunden bis Tagen eine wesentlich verstärkte, zirkular polarisierte Kurzwellenstrahlung im Meterbereich aus. Verf. versucht, diese Strahlung an Hand von Plasmaschwingungen zu deuten. Er legt die Vorstellung zugrunde, daß in den magnetischen Feldern der Sonnenflecken Elektronen um die magnetischen Feldlinien kreisen, die für die Kurzwellenstrahlung verantwortlich gemacht werden sollen. Die Berechnung geht, wie üblich, von der Boltzmannschen Fundamentalgleichung aus und verwendet die Methode der Laplacetransformation. Das Ergebnis bestätigt die von Gross auf anderem Wege hergeleitete Dispersionsverteilung. Das System erweist sich in der Nähe ganzzahliger Vielfacher der Lamorfrequenz als instabil. Die Anwendung der Ergebnisse auf die Verhältnisse der Sonnenflecke liefert eine ausreichende Verstärkung, um die intensive Kurzwellenstrahlung verständlich zu machen.

*G. Ecker.*

**Wannier, Gregory H.:** Motion of gaseous ions in a strong electric field. II. Phys. Review, II. Ser. 87, 795—798 (1952).

Verf. behandelt in der vorliegenden und einer vorausgegangenen Arbeit (dies. Zbl. 43, 438) die Bewegung von Ionen in einem starken elektrischen Feld. Bisher liegen nur Untersuchungen

über die Ionendrift vor, bei denen die von dem Feld auf die Ionen übertragene Energie vernachlässigbar klein gegenüber der thermischen Energie ist. Bei den Elektronen ist die Entwicklung beispielsweise durch Chapman und Cowling weitergetrieben worden. Die Umstände liegen hier günstiger, da die starke Impulsänderung der Elektronen beim Zusammenstoß die Annahme einer kugelsymmetrischen Verteilung ermöglicht. Verf. setzt voraus, daß die Dichte der Ionen verschwindend gering ist, so daß im wesentlichen nur Zusammenstöße der Ionen mit neutralen Molekülen in Betracht zu ziehen sind. Das elektrische Feld ist homogen, aber so stark, daß die übertragene Energie gegenüber der thermischen Energie nicht außer Acht zu lassen ist. Die Berechnungen nehmen, wie üblich, ihren Ausgang von der Boltzmannschen Fundamentalgleichung, wobei jedoch zur Ermittlung der gesuchten Geschwindigkeitsmittelwerte, insbesondere der Ionendriftgeschwindigkeit, ein Verfahren eingeschlagen wird, welches die Bestimmung der eigentlichen Geschwindigkeitsverteilung vermeidet. Für den Fall konstanter freier Flugdauer (Polarisationskräfte) ist eine exakte Lösung möglich. Eine Methode zur Behandlung des allgemeinen Falles wird entwickelt und auf das Beispiel des Kugelmodells unter der Voraussetzung gleicher Ionen- und Molekülmasse angewendet. — Während im ersten Teil der Arbeit gleichmäßige Ionendichte vorausgesetzt wurde, behandelt der zweite Teil den Fall veränderlicher Ionenkonzentration. Es zeigt sich, daß unter diesen Umständen der Driftgeschwindigkeit des Ions eine Diffusionsbewegung überlagert ist, wobei allerdings die Diffusionskonstante als ein axialsymmetrischer Tensor in der Richtung des Feldes mit einer longitudinalen und einer transversalen Komponente aufzufassen ist. Die genannten Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der ungestörten Geschwindigkeitsverteilung berechnen und enthalten das elektrische Feld als Parameter. Wird die mittlere freie Flugdauer als geschwindigkeitsunabhängig vorausgesetzt, dann lassen sich explizite Ausdrücke für die beiden Diffusionskonstanten berechnen. Die erhaltenen Beziehungen erweisen sich als eine sinngemäße Erweiterung der bekannten Einsteinschen Relation zwischen Diffusionskoeffizienten und Beweglichkeit im Fall geringerer Energieaufnahme. Für das Beispiel des Kugelmodells und das Massenverhältnis 1 läßt sich der Diffusionskoeffizient in der Feldrichtung ebenfalls bestimmen. Über den Vergleich mit experimentellen Untersuchungen wird nicht berichtet.

G. Ecker.

**Kramers, H. A.: On a modification of Jaffé's theory of column-ionization.** Physica 18, 665—675 (1952).

Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit haben Experimente von Gerritsen über die Ionendrift in flüssigen Gasen ( $N_2$ ,  $H_2$ , He) gegeben. Die Ionen wurden hierbei durch Röntgenstrahlen bzw.  $\alpha$ -Strahlen radioaktiver Präparate erzeugt. Die Anwendung der Jafféschen Theorie der Kolonnenionisation führt zu Widersprüchen mit den Ergebnissen dieser Experimente im Bereich geringer Stromdichten (gemessen am Sättigungsstrom). Wie eine gegenseitige Abwägung der Einflüsse des Feldes, der Diffusion und der Rekombination ergibt, beruht der Hauptfehler der Jafféschen Theorie in der mangelhaften Berücksichtigung des Rekombinationsanteiles, der zunächst völlig vernachlässigt wurde. Verf. zeigt, daß es vielmehr sinnvoll ist, in erster Näherung den Diffusionstrom zu unterdrücken. Seine Rechnung liefert für kleine Stromdichten wesentliche Abweichungen gegenüber der Jafféschen Theorie und erzielt bessere Übereinstimmung mit den Experimenten.

G. Ecker.

**Scoins, H. I.: A note on the linearized integral equation of Green.** Philos. Mag., VII. Ser. 43, 806—808 (1952).

H. S. Green (dies. Zbl. 30, 429) hat als Spezialfall der allgemeinen kinetischen Theorie der Flüssigkeiten von Born und Green eine lineare Integralgleichung aufgestellt für die radiale Dichte-Verteilungsfunktion, welche das thermische Gleichgewicht einer aus kugelsymmetrischen Molekülen bestehenden Flüssigkeit beschreibt. Bei der Auswertung dieser Gleichung durch komplexe Integration ist ein Fehler unterlaufen, der in der vorliegenden Note berichtet wird. Der physikalischen Brauchbarkeit der Greenschen Gleichung geschieht dadurch kein Abbruch.

L. Waldmann.

**Kroll, Wolfgang: On the determination of the elastic spectra of solids from specific heat data.** Progress theor. Phys. 8, 457—460 (1952).

Die Berechnung der spezifischen Wärme eines Festkörpers liefert als Ergebnis ein Integral über die Verteilungsfunktion der Kristallfrequenzen, in welchem die Beiträge der einzelnen Eigenschwingung zur spezifischen Wärme addiert werden. Umgekehrt ist es aber auch möglich, die Verteilungsfunktion durch ein Integral über die spezifische Wärme (als Temperaturfunktion) auszudrücken. Verf. gibt

eine reelle Integraldarstellung an, die es gestattet, aus Messungen der spezifischen Wärme Aussagen über das Spektrum zu bekommen. Bei Anwendungen ist die Frage, wie genau die Methode ist und wie weit sich die Abweichungen vom idealen Verhalten (thermische Ausdehnung usw.) in dem so ermittelten Spektrum bemerkbar machen.

*G. Leibfried.*

**Viswanathan, K. S.:** The characteristic vibrations of a rectangular lattice. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 36, 306—314 (1952).

Verf. zeigte in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 47, 232), daß eine atomistische Störung in der linearen Kette schließlich in einen Zustand führt, der durch eine Überlagerung von Grenzschwingungen mit zeitlich abnehmender Amplitude beschrieben werden kann. Grenzschwingungen sind diejenigen Schwingungsformen der Kette, deren Gruppengeschwindigkeit verschwindet. Dieses Resultat wird auf ein zweidimensionales Gitter erweitert. (Das bedeutet aber nicht, daß schließlich nur noch die Grenzfrequenzen angeregt sind. Die Intensität einer beliebigen Eigenschwingung des Gitters ist auf jeden Fall zeitlich konstant.)

*G. Leibfried.*

**Blackman, M.:** On the limiting vibrational frequencies of an ionic lattice. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 394—404 (1952).

Für reguläre Ionenkristalle mit Gitter vom Steinsalztyp weiß man, daß die Grenzfrequenzen der thermischen Schwingungen von der Richtung der einfallenden Strahlung unabhängig sind. Verf. verneint die Frage, ob diese Richtungsunabhängigkeit bei jedem Kristallgittertyp gilt, indem er bereits am Gegenbeispiel eines in Richtung orthogonaler Achsen gestreckten NaCl-Gitters, nämlich des (ortho-)rhombischen Gitters vom TlF-Typ, rechnerisch den Nachweis führt, daß diese Frequenzen von der Einfallrichtung abhängig sein können für Wellenlängen, die groß sind im Vergleich zur Gitterkonstanten, jedoch klein gegenüber den räumlichen Abmessungen des Kristallstückes. — Zur Durchführung der Berechnung bedient sich Verf. gewisser vom Ref. in die Kristallgitterphysik eingeführter verallgemeinerter (Epsteinscher) Zetafunktionen, wobei im vorliegenden Fall eine quadratische Form mit gemischten quadratischen Gliedern auftritt. Für einige spezielle Richtungen des Einfallstrahls werden die Frequenzen berechnet — die höheren longitudinalen und die niedrigeren transversalen Frequenzen; diese werden mit den Infrarotfrequenzen des Gitters in gut übereinstimmende Beziehungen gebracht. Das numerische Ergebnis bestätigt die Richtungsabhängigkeit. — Verf. ergänzt seine Arbeit durch Mitteilung über Betrachtungen anderer Gittertypen und kommt zu dem Schluß, daß ähnliches Verhalten für alle anderen Kristalle, die keine kubische Symmetrie besitzen, zu erwarten sein dürfte. — In bewährter Weise rechnet Verf. im wesentlichen mit Coulombschen Kräften zwischen den Ladungen.

*O. Emersleben.*

**Hagedorn, R.:** Statisches Modell von Bariumtitanat bei Zimmertemperatur. Z. Phys. 133, 394—421 (1952).

Verf. zeigt, daß spontane elektrische Polarisierung und Dielektrizitätskonstante (DK.) von BaTiO<sub>3</sub> verstanden werden können, wenn man die elektrostatischen Wechselwirkungen der Ionenladungen untereinander und mit den Dipolen sowie der Dipole untereinander innerhalb des Kristalles genauer betrachtet. Elektrische Dipole treten neben den Ionen auf, weil die Gleichgewichtslagen der Ti- und gewisser O-Ionen im Gitter nicht völlig symmetrisch liegen. Dadurch bilden diese Ionenpaare selbst Dipole; außerdem aber werden alle Ionen des Gitters durch Influenz polarisiert. Bei gegebenen Ionenladungen, Polarisierbarkeiten und äußeren Feldern können dann Polarisierungen und DK. bestimmt werden. Der Vergleich mit dem Experiment ergibt eine um den Faktor 50 zu große Polarisierung und eine um etwa 20% zu kleine DK. Verf. zeigt, daß diese Diskrepanzen verschwinden, wenn man nicht mehr einen reinen Ionenkristall (mit Ba<sup>2+</sup>, Ti<sup>4+</sup>, O<sup>2-</sup>-Ionen), sondern einen halbpolaren Gitteraufbau zugrunde legt. Man erhält nähert die richtige Polarisierung und DK., wenn man folgende Ionen-Ladungen annimmt: Ba: 0,555 *e*; Ti: 0,300 *e*; O<sub>1</sub>: -0,365 *e*; O<sub>2</sub>: -0,125 *e*. (*e* = Elementarladung; O<sub>1</sub>: symmetrisch; O<sub>2</sub>: unsymmetrisch gelegenes O-Ion).

*G. Heber.*

**Adams II, E. N.:** Motion of an electron in a perturbed periodic potential. Phys. Review, II. Ser. 85, 41—50 (1952).

Verf. entwickelt aus der Schrödingergleichung des Problems eine Verallgemeinerung des Wannierschen Theorems (dies. Zbl. 17, 236), bei der auch magnetische Felder auftreten können und auch Übergänge zwischen Bändern Berücksichtigung finden. Anwendung auf langsam veränderliche Felder.

*G. Höhler.*

**Feuer, Paula:** Electronic states in crystals under large over-all perturbations. Phys. Review, II. Ser. 88, 92—100 (1952).



Verf. führt die Schrödingergleichung des Problems durch Entwicklung nach Wannierfunktionen in Differenzgleichungen über. Für einen eindimensionalen Kristall im homogenen elektrischen Feld wird dann in der Näherung tiefer Energien die Wahrscheinlichkeit eines Band-Bandübergangs berechnet. Vgl. hierzu vorsteh. Referat.

G. Höhler.

Parmenter, R. H.: Electronic energy bands in crystals. Phys. Review, II. Ser. 86, 552—560 (1952).

In der Näherung für tiefe Energien [Bloch, Z. Phys. 52, 555—600 (1928)] werden die Eigenfunktionen aus Atomfunktionen zusammengesetzt. Verf. gibt eine Verbesserung dieses Verfahrens an, die seine Anwendung auf Valenzelektronen ermöglicht und sich als gleichwertig mit der Methode der orthogonalisierten ebenen Wellen (Herring, dies. Zbl. 27, 187) erweist. Anwendung auf Li. G. Höhler.

Paterson, M. S.: X-ray diffraction by face-centered cubic crystals with deformation faults. J. appl. Phys. 23, 805—811 (1952).

In einem flächenzentriert kubischen Gitter hat man es, in Richtung (111) betrachtet, bekanntlich mit 3 Netzebenensorten  $A, B, C$  zu tun, die in hexagonalen Koordinaten  $(h_1, h_2, h_3)$  ausgedrückt um  $(h_1, h_2) = (0, 0)$  bzw.  $(1/3, 2/3)$  bzw.  $(2/3, 1/3)$  senkrecht aus der (111)-Richtung gegeneinander verschoben sind. Ist  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit für die Versetzung einer ganzen Netzebene in eine gestörte Lage, so ist im ungestörten kubischen Gitter ( $\alpha = 0$ ) bzw. ( $\alpha = 1$ ) also die Reihenfolge  $ABCABC \dots$  bzw.  $ACBACB$  (Zwilling an der ersten Struktur) zu beobachten. Bei Störungen durch mechanische Deformation versetzen sich ganze Netzebenenpakete, wobei allerdings nie eine Reihenfolge  $AA$ , bzw.  $BB$ , bzw.  $CC$  möglich ist. In der ersten genannten Struktur wirkt sich dann eine einzige derartige Störung beispielsweise aus zu  $ABABCA \dots$ . Ein etwaiger Wachstumsfehler dagegen an derselben 3. Netzebene erzeugt eine andere Struktur  $ABACBA$  (Zwillingsbildung). Berechnet wird für beliebiges  $\alpha$  die gestreute Intensität bei reinen Deformationsstörungen und reinen Wachstumsstörungen, wobei angenommen ist, daß jede Netzebene in sich kristallin bleibt, also kristalline Kreuzgitterinterferenzen erzeugt. Für den unendlich großen Kristall ergibt sich die Streuintensität dann zu  $I = NZ^{1/r}$  ( $N$  Zahl der einfachen primitiven Gitterzellen,  $Z^{1/r}$  Gitterfaktor des gestörten Gitters). Die Reflexe  $h_1 - 2h_2 = 3n$  ( $n$  ganze Zahl) bleiben ungestört, die Reflexe  $h_1 - 2h_2 - 3n \pm 1$  dagegen verbreitern sich alle gleichstark und verschieben sich im Fourierraum senkrecht zu den Netzebenen  $(0, 0, L)$  um denselben Betrag. Man findet für sie  $Z^{1/r} = \text{Re}(1+q)/(1-q)$  mit  $q = -\sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)} e^{-2\pi i(h_3/3 \pm \varphi/2\pi)}$ ,  $\varphi = \arctg(\sqrt{3}(1-2\alpha))$ , wobei die integrale Breite dieser Reflexe gegeben ist durch  $\Delta h_3 = 3[1 - \sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)}] / [1 + \sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)}]$  und ihre Lage durch  $h_{3m} = 3n + 3 \pm \frac{3\varphi}{2\pi}$  (oberes Vorzeichen jeweils für  $h_1 - 2h_2 = 3n + 1$ , unteres für  $h_1 - 2h_2 = 3n - 1$ ). Für  $\alpha = 0$  ergibt dies die ursprünglichen kristallinen Reflexe, für  $\alpha = 1$  diejenigen des Zwillings, während für  $\alpha = 1/2$  die Reflexe eine integrale Breite  $\Delta h_3 = 1$  haben und an den Stellen  $h_{3m} = 3n + 3/2$  liegen, also genau zwischen den Reflexlagen des ungestörten Kristalls und seines Zwillings. Bei reinen Wachstumsfehlern treten für  $\alpha = 2/3 - 3$  asymmetrische und verschobene Reflexe und für  $1/2 < \alpha < 1$  verbreiterte Reflexe gleichzeitig bei  $h_3 = 3n$  und  $3n + 3/2$  auf, die für  $\alpha = 1$  speziell kristallin werden, so daß Wachstums- und Deformationseinflüsse grundsätzlich schon im Pulverdiagramm unterscheidbar sind.

R. Hosemann.

Artmann, Kurt: Unter welchen Bedingungen ist Interferenzdoppelbrechung von Kathoden- und Röntgenstrahlen an Kristallen beobachtbar? Z. Phys. 133, 576—588 (1952).

Die dynamische Theorie der Raumgitterinterferenzen nach von Laue-Ewald wird in etwas vereinfachter Form für den Fall der bekannten Interferenzdoppelbrechung diskutiert. Es besteht für die Linearausdehnung der Kristallite in der Ebene dieser Doppelbrechung eine untere Grenze  $L_u$ , unterhalb derer die räumliche Trennung der zwei Teilstrahlen infolge der verbreiterten Fraunhoferischen Beugungsbilder ihrer jeweiligen Intensitätsverteilungen nicht mehr möglich ist. Erst oberhalb dieser Grenze tritt die dynamische Gittertheorie beobachtbar an die Stelle der geometrischen Gittertheorie und dies um so eher, je niedriger indiziert die Reflexe sind. Ein einfaches Diagramm klärt die Existenzbereiche für die Aufspaltung und für keine Aufspaltung von Laue-Reflexen (Stachelstruktur) in Abhängigkeit von der Kristallitdimension und der Abweichung  $\Delta\theta$  aus ihrer idealen Reflexionslage. Für die Doppelbrechung besteht aber auch eine obere Grenze  $L_o$  der Kristallitdimensionen, da sonst bei gegebenem Abstand  $R$  zwischen Kristall und Beobachtungsschirm beide Teilstrahlen bei Fresnel'scher Beugung nicht mehr räumlich getrennt sind. Hierfür wird eine einfache, rein geometrische Näherungsformel ein-

gesetzt. Für Kathodenstrahlen von 40 kV ist  $L_u \sim 800 \text{ AE}$ ,  $L_o \sim 4000 \text{ AE}$ , bei Röntgenstrahlen der Wellenlänge 0,15 AE ist selbst für  $R = 100 \text{ cm}$   $L_u > L_o$ . Deshalb spalten dort die Debye-Ringe sicher nur auf bei Verwendung von Kammern von noch größerem Kammerradius. Auf die experimentelle Prüfbarkeit weiterer Details wird hingewiesen.

R. Hosemann.

**Spencer, L. V.: Penetration and diffusion of X-rays. Calculation of spatial distributions by semi-asymptotic methods.** Phys. Review, II. Ser. 88, 793—803 (1952).

Eine neuartige Methode einer „halbasympotischen“ Berechnung der Energieverteilung nach Wellenlänge, Ort und Fortpflanzungsrichtung ultraharter parallel einfallender Röntgenstrahlen in einem homogenen Medium wird auseinandergesetzt. Dazu wird die bekannte Transportgleichung unter Benutzung der Wahrscheinlichkeit nach Klein-Nishina für einen Comptonprozeß und der Diracschen Deltafunktion aus dem Ortsraum in den  $p$ -Raum Laplace-transformiert und dort über die Austrittswinkel der Sekundärquanten nach Multiplikation mit einer höheren Potenz des Ablenkungswinkels integriert. Es entsteht auf diese Weise ein verknüpft System simultaner Integralgleichungen zwischen den höheren Winkelmomenten der unbekannten Winkelverteilung. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen lassen sich in einem schnellkonvergierenden Iterationsprozeß diese Winkelmomente berechnen, wenn man für die Winkelverteilung selbst „well-behaved“, „educated“ spezielle Funktionen wie etwa die Gaußsche Glockenkurve oder eine Summe aus ihnen ansetzt. Durch Anpassung ihrer Parameter entstehen dann die beobachteten Winkelmomente und aus ihnen wieder die Winkelverteilung in Laplace-Raum in Form geschlossener Ausdrücke, die sich leicht zurücktransformieren lassen und zum Teil auf hypergeometrische Funktionen führen. Beispielsweise haben 10,22 MeV-Photonen in Blei schon nach zehnfacher mittlerer Weglänge ein spektrales Maximum bei 2,5 MeV, dessen Flanke bei 10 MeV auf 10% abgesunken ist und mit zunehmender Eindringtiefe sein Maximum nur noch unwesentlich nach 2 MeV verlagert, wobei die Flanken allerdings bei 160 mittleren Weglängen schon sehr steil geworden sind. Anders sieht es bei 5,11 MeV-Photonen in Eisen aus, weil hier der Schwächungskoeffizient nicht wie dort bei 3,3 MeV ein Minimum hat, sondern monoton mit abnehmender Wellenlänge absinkt. Bei 10 mittleren Weglängen ist zwischen 1 und 5 MeV die spektrale Verteilung fast gleichmäßig, während sie bei 50 mittleren Weglängen ein schwaches Maximum bei 3 MeV aufweist, dessen eine Flanke bei 1 MeV um 20%, bei 5 MeV um 40% abgesunken ist.

R. Hosemann.

**Lee-Whiting, G. E.: X-ray absorption line-width and electron stopping power calculated with a screened Coulomb interaction.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212, 362—376 (1952).

Verf. erhält durch Aufsummierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts Näherungswerte für Stoßzahl und Bremsformel für ein schnelleres Elektron in einem entarteten Elektronengas. Als Wechselwirkung wird ein abgeschirmtes Coulombpotential verwendet, dessen Abschirmungsparameter nach dem Verfahren von Kramers [Physica 13, 401 (1947)] abgeschätzt wurde. Mit der zeitabhängigen Störungsrechnung findet Verf. hingegen ein wesentlich anderes, mit dem Experiment nicht verträgliches Ergebnis. Er führt dies auf Überschreitung der Grenzen der Störungsrechnung zurück. — Dieses Ergebnis ist dem Ref. nicht verständlich; vgl. Schiff, Quantum Mechanics, New York 1949, S. 195 und auch die Beziehung zur Theorie der Sekundäremission.

G. Höhler.

**Schafroth, M. R.: Coulomb interaction and the Meissner-Ochsenfeld effect.** Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 291—303 (1952).

In einer vorangegangenen Untersuchung (dies. Zbl. 44, 452) hat Verf. für linearen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Vektorpotential  $i_\mu(\vec{x}) = \sum_\nu \int d^3x' K_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{x}') A_\nu(\vec{x}')$  ein allgemeines Kriterium für das Auftreten des Meißner-Effektes abgeleitet. Schreibt man die Fourier-Komponenten im isotropen Fall  $i_\mu(\vec{q}) = \sum_\nu (\vec{q}_\mu \vec{q}_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) K(q^2) A_\nu(\vec{q})$ , so ist notwendige Bedingung, daß  $K(q^2)$  einen Folterster Ordnung an der Stelle  $q^2 = 0$  hat. Es wurde weiter gezeigt, daß für die Elektron-Schallquantenwechselwirkung die von freien Teilchen ausgehende Störungsrechnung in ihrem Konvergenzbereich in keiner Ordnung zu einer solchen Form von  $K_{\mu\nu}$  führt und folglich keine Supraleitung liefern kann. In dieser Untersuchung wird die Coulomb-Wechselwirkung (ohne Berücksichtigung des Spins) mit denselben Methoden untersucht. Durch sie treten Matricelemente der Form  $\sim 1/k^2$  ( $k$ : Impulsdifferenz) auf, die den Pol in  $K(q^2)$  hervorbringen könnten. Es wird jedoch für die erste Näherung durch direktes Ausrechnen gezeigt, daß sich diese Terme gerade kompensieren. Dieser Schluß wird sodann auf Näherungen beliebig hoher Ordnung durch Inbetrachtziehung der Symmetrieeigenschaften gewisser Entwicklungskoeffizienten verallgemeinert. Schließlich werden einige Schlüsse aus den beiden Untersuchungen gezogen: I. Jede Zweikörperkraft führt zu dem gleichen Ergebnis,



liefert also keine Supraleitung. II. Berücksichtigung des Spins bringt Komplikationen, die jedoch das Ergebnis nicht ändern. III. Es besteht Hoffnung, eine Mehrkörperkraft zu finden, die den Meißner-Effekt in der Näherung schwacher Kopplung liefert, es kann jedoch gezeigt werden, daß dies keine statische Mehrkörperkraft sein kann. *F. Beck.*

**Tessman, Jack R.:** The parallel susceptibility of an antiferromagnet at low temperatures. Phys. Review, II. Ser. 88, 1132—1137 (1952).

Verf. benutzt die Kramers-Hellersche halbklassische Spinwellenmethode, um die Parallel-Suszeptibilität eines einfach-kubischen antiferromagnetischen Kristalles zu bestimmen. Es werden im Hamiltonschen Operator (abgesehen vom äußeren Felde) berücksichtigt: Die Austauschwechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn; eine Anisotropie-Energie und die magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn. *G. Heber.*

**Néel, Louis:** Antiferromagnetism and ferrimagnetism. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 869—885 (1952).

Bericht.

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Stöhr, Alfred:** Über die Differentialgleichungen eines dynamischen Weltmodells. II. Math. Nachr. 7, 339—357 (1952).

Zu dem in Teil I [Math. Nachr. 6, 71—88 (1951)] der Arbeit behandelten Problem werden die Fälle  $\sigma = 0$ ,  $\mathfrak{B} = \sigma \mathfrak{C}$  und der Fall, daß  $\mathfrak{B}$  (bei geradem  $n$ ) nur zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, diskutiert. Ferner untersucht Verf. die Fälle, daß  $\sigma$  die Form  $c(t - t_0)^{-2}$  hat, und  $n = 3$ ,  $n = 4$ . *R. Kippenhahn.*

**Dilgan, Hâmit:** Sur la vitesse moyenne des planètes. Bull. techn. Univ. Istanbul 4, 21—24 (1952).

**Cowling, T. G.:** The oscillation theory of magnetic variable stars. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 112, 527—539 (1952).

Die Theorie, nach der die bei einigen Sternen beobachtete periodische Umkehrung des Magnetfeldes auf Schwingungen im Sterninnern zurückzuführen sein soll, wird auf ihre Haltbarkeit hin genauer geprüft. Wenn auch eine bestimmte Klasse von hydrodynamischen Schwingungen, die auf die oberflächennahen Schichten eines Sternes beschränkt ist, die richtige Periode zu ergeben scheint, so ist doch, wie Verf. zeigt, die Schwingungstheorie als Erklärung für variable Magnetfelder von Sternen in jeder Form bis jetzt noch unbefriedigend. *H. Vogt.*

**Ferraro, V. C. A. and D. J. Memory:** Oscillations of a star in its own magnetic field: An illustrative problem. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 112, 361—373 (1952).

Es werden die freien Schwingungen eines nach einem vereinfachten Modell aufgebauten Sterns in seinem eigenen Magnetfeld untersucht, wobei angenommen wird, daß das Magnetfeld nicht — wie bei Schwarzschild — ein gleichförmiges ist, sondern von der Sternoberfläche nach innen hin zunimmt. Verf. kommt dabei zu wesentlich anderen Ergebnissen als Schwarzschild. Insbesondere findet er für Sterne mit einem Oberflächen-Magnetfeld von der Größenordnung, wie es Babcock beobachtet hat, bedeutend längere Perioden der freien Schwingungen als Schwarzschild, und er schließt daraus, daß freie Schwingungen nicht die Ursache der bei manchen Sternen festgestellten kurzperiodischen Änderungen des Magnetfeldes sein können. *H. Vogt.*

**Kaplan, S. A.:** Über die Bedingungen der wirbelfreien Strömung eines Gases im interstellaren Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 909—912 (1952) [Russisch].

**Velghe, A.:** Contribution théorique à l'étude des nébuleuses obscures. Nova Acta Soc. Sci. Upsal., Ser. IV 15, Nr. 5, 42 p. (1952).

Es werden die verschiedenen bis jetzt benutzten Methoden, die Entfernungen, die Dimensionen und das Absorptionsvermögen der Dunkelwolken in unserem



Milchstraßensystem zu bestimmen, diskutiert und dann eine neue Methode vorgeschlagen, die als eine Verallgemeinerung der Malmquistschen Methode angesehen werden kann und die von den Fehlerquellen der bisher angewandten Methoden weitgehend frei sein soll. Den Abschluß der Arbeit bildet eine numerische Anwendung.

H. Vogt.

**Scheidegger, Adrian E.:** Physical aspects of the orogenesis. Canadian J. Phys. 30, 14—25 (1952).

Es werden einige geophysikalische Vorgänge, die in der Kontraktionstheorie der Gebirgsbildung wesentlich sind, quantitativ untersucht, so das Verhalten einer Scholle bei Schrumpfung, die Wirkung von wandernden radioaktiven, wärmeerzeugenden Schichten auf die Abkühlungsgeschwindigkeit und die Bedingungen für eine spannungsfreie Fläche.

W. Kertz.

**Lapwood, E. R.:** The effect of contraction in the cooling by conduction of a gravitating sphere, with special reference to the earth. Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophys. Suppl. 6, 402—407 (1952).

Die thermischen Vorgänge bei der Schrumpfung der Erde werden untersucht. Es ergibt sich, daß man mit Recht die Erwärmung durch die Schrumpfung bei der Bearbeitung der thermischen Geschichte der Erde vernachlässigen darf und nur mit einer sich abkühlenden Kugel zu rechnen braucht, die noch wärmeerzeugende radioaktive Substanzen enthält.

W. Kertz.

**Chandrasekhar, S.:** The thermal instability of a fluid sphere heated within. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 1317—1329 (1952).

Das von Jeffreys und Bland (dies. Zbl. 43, 239) behandelte Problem der thermischen Instabilität einer inkompressiblen Flüssigkeitsmasse, die von innen erwärmt wird, wird erneut untersucht. Es wird auf ein geeigneteres Variationsproblem zurückgeführt, und deshalb können genauere kritische Werte für das Einsetzen der Konvektion angegeben werden.

W. Kertz.

**Hwang, S. S.:** On the role of anticyclones in the atmosphere. Sci. Record 5, 139—144 und chines. Zusammenfassg. 139 (1952).

Verf. vertritt die Ansicht, daß die zur Aufrechterhaltung der Zyklonenbewegung nötige Energie von benachbarten Antizyklonen stammt, eine Ansicht, die er durch Diskussion eines — allerdings sehr einfachen — Modelles zu unterbauen versucht. Der daraus gezogene Schluß: „daß die Intensität der atmosphärischen Zirkulation durch antizyklonale Systeme bestimmt wird“, scheint dem Ref. zu weitgehend, weil zu wenig begründet. — Der Name des Meteorologen Margules ist falsch („Margulas“) geschrieben.

H. Nabl.

**Mitra, A. P.:** Effects of the variations of recombination coefficient and scale height on the structures of the ionized regions. Indian J. Phys. 26, 79—102 (1952).

Für die verschiedenen Ionosphärenschichten wird versucht, die Elektronendichteverteilung quantitativ zu berechnen. Für den effektiven Rekombinationskoeffizienten  $\alpha$ , wie für die Skalenhöhe  $H$  wird eine Variation mit der Höhe angenommen. Bei der  $D$ -Schicht wird auf eine frühere Arbeit d. Verf. zurückgegriffen [J. Geophys. Research 56, 373 (1951)]. Aus dem Jahresgang der kritischen Frequenz der  $E$ -Schicht wird auf eine Höhenvariation von  $\alpha$  geschlossen (die im wesentlichen aus der Temperaturvariation der Anlagerung kommt). Für die Höhenabnahme der  $O_2$ -Moleküle wird ein Ansatz mit einem offengelassenen Parameter gemacht. Ein gemeinsamer Ionisierungsmechanismus wird für die  $F_1$ - und  $F_2$ -Schicht angenommen, wobei  $F_1$  etwa im Maximum der Elektronenproduktion läge, während  $F_2$  dadurch zustande käme, daß  $\alpha$  nach oben abnimmt. (Auch hier soll Anlagerung der entscheidende Vorgang sein.) Diese „Aufspaltung“ der  $F$ -Schicht wird für eine Reihe von Fällen berechnet: zuerst im stationären Fall, dann mit einer Korrektur zur Berücksichtigung des nicht eingestellten Ionisationsgleichgewichtes. Hierbei werden drei, mehr oder weniger verfügbare Parameter eingeführt. (Die Grenzen der



Methode dürften einerseits in der Gleichung für den Rekombinationskoeffizienten  $\alpha$  liegen, die neueren Ansätzen nicht mehr voll entspricht, andererseits in den benutzten Werten von  $H$ , die aus verschiedenwertigen Quellen stammen. Ref.).

Rawer.

Heading, J. and R. T. P. Whipple: The oblique reflexion of long wireless waves from the ionosphere at places where the earth's magnetic field is regarded as vertical. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 244, 469—503 (1952).

Das von Wilkes (dies. Zbl. 29, 380) aufgestellte Differentialgleichungssystem (Ausbreitung elektromagnetischer Wellen unter dem Winkel  $\theta$  in einem horizontal-geschichteten inhomogenen Medium mit einem äußeren Magnetfeld längs der vertikalen  $z$ -Achse) soll für die Reflexion langer Radiowellen an der Unterseite der Ionosphäre gelöst werden. Vertikal polarisierte Wellen werden in zwei Zonen stark beeinflusst: Zone I liegt dort, wo das Verhältnis der Betriebs- zur Plasmafrequenz ( $\sqrt{X}$ ) etwa 1 ist (für kurze Wellen wäre dieser Einfluß allein entscheidend). In Zone II liegt bei hohen  $X$ -Werten (ca. 100) die Plasmafrequenz beim geometrischen Mittel zwischen Betriebs- und Gyrofrequenz. Horizontal polarisierte Wellen werden nur in Zone II wesentlich beeinflusst. Zwischen beiden Zonen hat man ungestörte Ausbreitung. — In der Zone I spielt das Magnetfeld keine Rolle; bei vertikaler Polarisation (in der  $xz$ -Ebene) gilt für die Feldkomponente  $E_z$  die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dz^2} [(1 + a - b \cdot v(z)) \cdot E_z] + (a - b \cdot v(z)) \cdot k^2 E_z = 0,$$

wo  $k$  die Wellenzahl,  $v = X/(1 - iZ)$  ( $Z$ , die reduzierte Stoßzahl, verursacht eine Dämpfung). Mit dem speziellen Ansatz  $X(z) = \exp(\alpha(z - z_1))$ ;  $Z = \text{const}$  erreicht man durch Einführung der neuen Variablen  $v$  und  $F = v^{\pm i(k \cdot \cos \theta)/\alpha} \cdot E_z$  die hypergeometrische Differentialgleichung. Als Lösungen treten also hypergeometrische Funktionen auf; ober- bzw. unterhalb der Schicht ist je ein bestimmtes Paar unter den 6 Gaußschen Lösungen den physikalischen Bedingungen angepaßt, weil ihm in der ursprünglichen Variablen je eine auf- bzw. abwärtslaufende Welle entspricht. Eine Verknüpfung der Lösungen ober- und unterhalb der Schicht liefern die Gaußschen „relations inter contiguas“ (Epstein 1931). So ergeben sich Reflexions- und Durchgangskoeffizienten als Produkte von komplexen Gammafunktionen. — In der Zone II ist  $E_z$  unwesentlich,  $E_x$  und  $E_y$  gehorchen gekoppelten Differentialgleichungen; das Kopplungsglied enthält den Faktor  $X/Y$ , entsteht also durch das Magnetfeld ( $Y$  reduzierte Gyrofrequenz). Hier wird für  $X/Y$  ein exponentieller Ansatz (Konstante  $\gamma$ ) gemacht, der nach der Transformation  $w \sim e^{2\gamma z}$  auf

$$[c^2 + \partial^2] E_{x,y} = \mp i \sqrt{w} \cdot E_{y,x}$$

führt [ $\partial = w \cdot d/dw$ ]. Löst man die Kopplung durch Differentiation, so entsteht die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(\partial - p_1) \cdot (\partial - p_2) \cdot (\partial - p_3) \cdot (\partial - p_4) F = w \cdot F.$$

Sie kann als Spezialfall der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung gelöst werden. An der Unterseite der Zone ( $w < 1$ ) sind die 4 Barneschen Integrale ( $\nu = 1, \dots, 4$ )

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint \prod_{j=1}^4 (s + p_j - 1)! w^{-s} ds$$

ein brauchbares Lösungssystem (der Integrationsweg umfaßt je eine Zeile der in vier Zeilen angeordneten Pole des Integranden). Weiter oben ( $w > 1$ ) genügen die zwei Lösungen

$$\sum_{\nu=1}^4 I_\nu(w) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^4 \exp(2\pi i p_\nu) \cdot I_\nu(w)$$

den Grenzbedingungen (dort sind nur nach oben laufende Wellen gestattet.) Der ersten entspricht eine elliptisch polarisierte (ordentliche) Welle, die total reflektiert wird; der zweiten eine ebenfalls elliptisch polarisierte (außerordentliche) Welle, die nur partiell reflektiert wird. Verfolgt man eine geeignete Kombination beider Lösungen nach unten (wo die  $I_\nu$  selbst auf- bzw. absteigende, gedämpfte bzw. ungedämpfte Wellen bedeuten), so ergeben sich die Reflexions- und Durchgangs-Koeffizienten für lineare Polarisation. — Durch Kombination der Resultate für beide Zonen ergeben sich schließlich die effektiven Reflexionsverhältnisse nach Amplitude und Phase. Die numerische Auswertung (für 16 und 80 kHz) hängt stark von den Modellannahmen ( $\alpha$ ,  $\gamma$  und Höhendifferenz der Zonen) ab (benutzte  $\alpha$  und  $\gamma \approx 1 \text{ km}^{-1}$ ). Es ergibt sich, daß der Einfluß der Stoßzahl gering ist, entscheidend ist die Brechung. Die virtuelle Reflexionshöhe (die sich aus der Phase ergibt) ist nur wenig vom Einfallswinkel abhängig. Der Reflexionskoeffizient dagegen steigt i. a. mit flacherem Einfall der Welle. Auf 80 kHz wird jedoch bei einem mittleren Winkel ein Minimum des Reflexionskoeffizienten gefunden, das durch Interferenz zwischen Zone I und II entsteht.

K. Rawer.